中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 8 期: 1～18
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

支持 n 个展式的基

献给文志英教授 80 寿辰

蔡懿[1], 李文侠[2*]

1. 上海应用技术大学理学院, 上海 201418;
2. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241

E-mail: caiyi@sit.edu.cn, wxli@math.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2025-02-12; 接受日期: 2025-04-23; 网络出版日期: 2025-05-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12301108 和 12471085) 资助项目

摘要 设 $\mathcal{B}_n$ 表示 q- 展式中存在点恰好具有 n 个展式的基的全体构成的集合. Sidorov (2009) 首次研究了集合 $\mathcal{B}_n$ 并对集合 $\mathcal{B}_2$ 提出了一些问题. 最近, Komornik 和 Kong (2019) 对集合 $\mathcal{B}_2$ 进行了进一步的研究并部分地回答了 Sidorov 提出的问题. 本文对集合 $\mathcal{B}_n$, $n \geqslant 3$ 开展进一步研究.

关键词 q- 展式 唯一 q- 展式 贪婪 q- 展式 拟贪婪 q- 展式

MSC (2020) 主题分类 11A63, 37F20, 37B10

1 引言

给定实数 $q > 1$, 序列 $(c_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 记

$$((c_i))_q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{q^i} =: x. \tag{1.1}$$

对于表达式 (1.1), 称序列 (c_i) 或级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{q^i}$ 为 x 的一个 q- 展式.

我们将集合 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{0,1\}^k$ 中的元素称为词, 例如, 称 1011 为一个长度为 4 的词. 对于一个词 a 及正整数 n, a^n 表示 n 个 a 连接而成的词, 而 a^∞ 表示集合 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中的一个序列, 它由词 a 不断连接而成, 如 $(1011)^2 = 10111011$, $(1011)^\infty = 101110111011\cdots$. 特别地, a^0 表示空词. 称一个序列 (c_i) 是无限的 (infinite), 是指该序列不以 $10^\infty = 1000\cdots$ 结尾; 而称序列 (c_i) 是双面无限的 (doubly infinite), 是指 (c_i) 本身以及它的反射 (reflection) $\overline{(c_i)} = (1 - c_i)$ 均是无限的. 于是, 以 10^∞ 结尾的序列 (c_i) 被称为有限的 (finite).

注意到任给序列 $(c_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 总有

$$0 = ((0^\infty))_q \leqslant ((c_i))_q \leqslant ((1^\infty))_q = \frac{1}{q-1}.$$

英文引用格式: Cai Y, Li W X. Bases which admit exactly n expansions (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–18, doi: 10.1360/SSM-2025-0029

于是, (1.1) 中得到的 x 一定落在区间 $I_q := [0, \frac{1}{q-1}]$ 中.

容易证明: 每个 $x \in I_q$ 均存在至少一个 q- 展式当且仅当 $1 < q \leqslant 2$. 事实上, 当 $1 < q \leqslant 2$ 时, 区间 I_q 恰为由迭代函数系统 $\{f_k(x) = \frac{x+k}{q} : k = 0, 1\}$ 生成的自相似集. 特别地, 当 $q = 2$ 时, $f_0(I_2) \cap f_1(I_2)$ 仅含一个点. 这一特征表明, I_2 中有可数个点, 它们恰好具有两个 2- 展式, 而其他的点只有唯一一个 2- 展式. 然而, 当 $1 < q < 2$ 时, $f_0(I_q) \cap f_1(I_q)$ 具有非空的内部. 此时 Lebesgue 几乎所有的 $x \in I_q$ 均具有不可数个 q- 展式. 更具体地, 当 $q \in (1, G)$ 时, 每个 $x \in (0, \frac{1}{q-1})$ 都有不可数个 q- 展式, 这里 $G = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ 为黄金分割数; 当 $q \in [G, 2)$ 时, Lebesgue 几乎所有的 $x \in I_q$ 均具有不可数个 q- 展式, 其他的数则具有可数或有限个 q- 展式 (参见文献 [12, 26, 28, 29]).

本文总假设 $q \in (1, 2]$, 于是区间 I_q 中的每个点均存在至少一个 q- 展式.

Erdős 等 [10,11,13] 发现存在具有唯一 q- 展式的点, 之后有关唯一 q- 展式研究的文章大量涌现. de Vries 和 Komornik [6] 研究了全体具有唯一 q- 展式的点构成的集合 $\mathcal{U}_q$ (称为唯一 q- 展式集) 的拓扑结构 (也见参见文献 [7, 14]); 之后, Komornik 等 [19]、Kong 和 Li [23] 研究了它们的 Hausdorff 维数 $\dim_H \mathcal{U}_q$, 并给出了计算 $\dim_H \mathcal{U}_q$ 的方法 (也可参见文献 [15–17]). 集合 $(1, 2]$ 中那些使得 1 具有唯一 q- 展式的 q 组成的集合, 我们将它记为 $\mathcal{U}$ (参见文献 [8, 9, 20–22]). 另一个重要的集合 $\mathcal{V}$ 定义为 $(1, 2]$ 中的那些 q 所构成的集合, 它使得实数 1 具有唯一双面无限 q- 展式. 集合 $\mathcal{V}$ 为闭集, 它满足

$$\mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{V}.$$

记 $(1, 2) \setminus \overline{\mathcal{U}} = \cup (q_0, q_0^*)$, 其中 (q_0, q_0^*) 是连通分支, 这里 q_0 取遍 $\{1\} \cup (\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U})$, 而 q_0^* 取自于 $\mathcal{U}$ 的某个真子集 $\mathcal{U}^*$ (参见文献 [8]).

给定 $q \in (1, 2]$ 和正整数 n, 记 $\mathcal{U}_q^n$ 为 I_q 中恰好具有 n 个 q- 展式的数构成的集合. 于是, $\mathcal{U}_q^1$ 即为前面提及的唯一 q- 展式集 $\mathcal{U}_q$. 用 $\mathcal{U}_q'$ 表示 $\mathcal{U}_q$ 中的数所对应的 q- 展式集合, 即 $\mathcal{U}_q' = \{(c_i) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : ((c_i))_q \in \mathcal{U}_q\}$. 对于正整数 $n \geqslant 1$, 设

$$\mathcal{B}_n = \{q \in (1, 2] : \exists x \in \mathcal{U}_q^n\}, \tag{1.2}$$

即 $\mathcal{B}_n$ 表示 $(1, 2]$ 中那样的 q 组成的集合, 在基 q 下存在 x, 它恰好具有 n 个 q- 展式. 显然 $\mathcal{B}_1 = (1, 2]$, $2 \in \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_2 \subseteq (G, 2]$. 此外, 由上面的讨论可知当正整数 $n \geqslant 3$ 时有 $\mathcal{B}_n \subseteq (G, 2)$. 于是, 由 (1.2) 可得

$$\mathcal{B}_n = \{q \in (G, 2) : \exists x \in \mathcal{U}_q^n\}, \quad n \geqslant 3.$$

Sidorov [27] 证明了 $\min \mathcal{B}_2 \approx 1.71064$. Baker 和 Sidorov [5] 证明了 $\min \mathcal{B}_n \approx 1.75488$ ($n \geqslant 3$), 同时它也是集合 $\mathcal{B}_2$ 中第二小的数. Komornik 和 Kong [18] 回答了 Sidorov [27] 提出的部分问题, 证明了 $\mathcal{B}_2$ 为紧集, 它的第二小的数是聚点, 它在 $(1, q_{\mathrm{KL}})$ ($q_{\mathrm{KL}} \approx 1.78723$ 为 Komornik-Loreti 常数) 中存在无穷多个孤立点, 同时也存在无穷多个聚点等. 涉及集合 $\mathcal{B}_n$ 的相关研究可参见文献 [3, 24, 30, 31] 等.

此外, Sidorov [27] 宣称对每个 $3 \leqslant m \in \mathbb{N}$ 均存在正数 γ_m, 满足 $\lim_{m \to \infty} \gamma_m = 0$, 使得

$$[2 - \gamma_m, 2) \subseteq \mathcal{B}_m, \quad m \geqslant 3. \tag{1.3}$$

然而, 人们发现上述结果 (1.3) 的推理过程存在一些不可修复的错误. 2025 年, Baker 和 Bender [4] 给出了一个更强的结论. 他们证明了对于每个 $\mathcal{B}_m$, $m \geqslant 3$, 它包含数 q_k, $k \geqslant K_m$ 的一个 (显式的) 非常接近 2 的小邻域, 这里 q_k 是 Multinacci 数, 满足

$$q_k^k = q_k^{k-1} + q_k^{k-2} + \cdots + q_k + 1.$$

除了上述区间外, $\mathcal{B}_m$ 还包含哪些点呢? 本文对集合 $\mathcal{B}_m$, $m \geqslant 3$ 开展进一步研究, 主要结果如下.

定理 1.1　$\mathcal{V}\setminus\{G,2\}\subseteq\mathcal{B}_3$.

定理 1.2　$\mathcal{V}\setminus(\{G,2\}\cup(\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}^*))\subseteq\mathcal{B}_n$, $n>3$.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节简要介绍有关唯一展开集合与唯一基集合的若干性质. 第 3 节给出集合 $\mathcal{B}_3$ 的一些刻画和定理 1.1 (即定理 3.1) 的证明. 定理 1.2 (即定理 4.1) 的证明放在第 4 节.

2　有关 q- 展式的若干已知结果

本节介绍一些符号和本文需要用到的一些已有的结论.

在 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中可以定义字典序关系 $\prec$: 对于 $(a_i),(b_i)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 如果存在某个正整数 n 使得对所有的 $i<n$ 都有 $a_i=b_i$ 成立且 $a_n<b_n$, 则记 $(a_i)\prec(b_i)$. 用 $(a_i)\preccurlyeq(b_i)$ 表示 $(a_i)\prec(b_i)$ 或 $(a_i)=(b_i)$. 此外, 对于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{0,1\}^n$ 中两个词 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 及一个序列 (a_i), 若 $\mathbf{A}0^\infty\prec\mathbf{B}0^\infty$ ($\mathbf{A}0^\infty\preccurlyeq\mathbf{B}0^\infty$), 则记 $\mathbf{A}\prec\mathbf{B}$ ($\mathbf{A}\preccurlyeq\mathbf{B}$); 若 $\mathbf{A}0^\infty\prec(a_i)$ ($\mathbf{A}0^\infty\preccurlyeq(a_i)$), 则记 $\mathbf{A}\prec(a_i)$ ($\mathbf{A}\preccurlyeq(a_i)$).

对 $x\in I_q$, x 的贪婪 q- 展式是指 x 的所有 q- 展式中按字典序最大的那个, x 的拟贪婪 q- 展式是指 x 的所有无限 q- 展式中按字典序最大的那个. 区间 I_q 中的每个点的贪婪及拟贪婪 q- 展式总是唯一存在的. 若点 x 的贪婪 q- 展式是无限时, 则它同时也是 x 的拟贪婪 q- 展式.

特别地, 1 的拟贪婪 q- 展式和贪婪 q- 展式分别使用记号 $\alpha(q)$ 和 $\beta(q)$ 来表示. 1 的拟贪婪 q- 展式 $\alpha(q)$ 在 q- 展式研究中发挥着重要的作用.

我们如下定义一个词 $c_1\cdots c_n$ 或一个序列 (c_i) 的反射:

$$\overline{c_1\cdots c_n}:=(1-c_1)\cdots(1-c_n)\quad 和\quad \overline{(c_i)}:=(1-c_1)(1-c_2)\cdots.$$

对于词 $c_1\cdots c_n$, 若 $c_n=0$, 记

$$c_1\cdots c_{n-1}c_n^+:=c_1\cdots c_{n-1}(c_n+1);$$

若 $c_n=1$, 记

$$c_1\cdots c_{n-1}c_n^-:=c_1\cdots c_{n-1}(c_n-1).$$

以下关于 1 的拟贪婪 q- 展式 $\alpha(q)$ 的性质源于 Parry [25] 的工作 (或参见文献 [2,7]).

引理 2.1　映射 $q\mapsto\alpha(q)$ 是一个将 $(1,2]$ 映到满足下列不等式的 (非 0^∞) 无限序列 (α_i) 所成的集合上的严格递增双射:

$$\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots\preccurlyeq\alpha_1\alpha_2\cdots\quad 对所有\ n\geqslant 0. \tag{2.1}$$

上述引理表明, 若 (非 0^∞) 无限序列 $(\alpha_i)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 满足条件 (2.1), 则存在唯一一个 $q\in(1,2]$ 使得 $\alpha(q)=(\alpha_i)$, 即 (α_i) 是 1 的拟贪婪 q- 展式. (2.1) 也告诉我们, 序列 $\alpha(q)$ 一定以 1 开头.

给定 $q\in(1,2]$. 对 $x\in I_q$, 分别记 x 的拟贪婪 q- 展式和贪婪 q- 展式分别为 $a(x)=(a_i(x))$ 和 $b(x)=(b_i(x))$. 下面的引理给出了如何使用 $\alpha(q)$ 来判断 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中一个序列是否能成为 I_q 中某个点的贪婪或拟贪婪 q- 展式.

引理 2.2　设 $q\in(1,2]$.

(i) 映射 $x\mapsto(a_i(x))$ 是一个将 $[0,\frac{1}{q-1}]$ 映到满足下列不等式的无限序列 $(a_i(x))$ 所成的集合上的严格递增双射:

$$a_{n+1}(x)a_{n+2}(x)\cdots\preccurlyeq\alpha_1(q)\alpha_2(q)\cdots\quad 只要\ a_n(x)<1,$$

这里 $(\alpha_i(q))=\alpha(q)$.

(ii) 映射 $x\mapsto (b_i(x))$ 是一个将 $[0,\frac{1}{q-1}]$ 映到满足下列不等式的序列 $(b_i(x))$ 所成的集合上的严格递增双射:

$$b_{n+1}(x)b_{n+2}(x)\cdots\prec\alpha_1(q)\alpha_2(q)\cdots\quad \text{只要 } b_n(x)<1,$$

这里 $(\alpha_i(q))=\alpha(q)$.

下面的引理给出了如何使用 $\alpha(q)$ 来判断 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中一个序列是否能成为 I_q 中某个点的唯一 q- 展式 (参见文献 [2,25]).

引理 2.3 设 $q\in(1,2]$, 则 $(c_i)\in\mathcal{U}_q'$ 当且仅当

$$\begin{aligned}&c_{n+1}c_{n+2}\cdots\prec\alpha_1(q)\alpha_2(q)\cdots\quad \text{只要 } c_n=0,\\ &\overline{c_{n+1}c_{n+2}\cdots}\prec\alpha_1(q)\alpha_2(q)\cdots\quad \text{只要 } c_n=1,\end{aligned}$$

这里 $(\alpha_i(q))=\alpha(q)$.

de Vries 等[8] 给出了集合 $\mathcal{U},\overline{\mathcal{U}}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的 q 所对应的 $\alpha(q)$ 的基本性质 (参见文献 [18, 引理 2.5]).

引理 2.4 (i) $q\in\mathcal{U}\setminus\{2\}$ 当且仅当 $\alpha(q)=(\alpha_i(q))$ 满足

$$\overline{\alpha(q)}\prec\alpha_{n+1}(q)\alpha_{n+2}(q)\cdots\prec\alpha(q)\quad \text{对所有的 } n\geqslant 1 \text{ 成立.}$$

(ii) $q\in\overline{\mathcal{U}}$ 当且仅当 $\alpha(q)=(\alpha_i(q))$ 满足

$$\overline{\alpha(q)}\prec\alpha_{n+1}(q)\alpha_{n+2}(q)\cdots\preccurlyeq\alpha(q)\quad \text{对所有的 } n\geqslant 1 \text{ 成立.}$$

(iii) $q\in\mathcal{V}$ 当且仅当 $\alpha(q)=(\alpha_i(q))$ 满足

$$\overline{\alpha(q)}\preccurlyeq\alpha_{n+1}(q)\alpha_{n+2}(q)\cdots\preccurlyeq\alpha(q)\quad \text{对所有的 } n\geqslant 1 \text{ 成立.}$$

下面的引理给出了集合 $\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}\setminus(\overline{\mathcal{U}}\cup\{G\})$ 中的 q 所对应的 $\alpha(q)$ 的基本特征 (参见文献 [18, 引理 2.7]).

引理 2.5 (i) 若 $q\in\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}$, 则存在一个序列 $(q_n)\in\mathcal{U}$ 满足: 当 $n\to\infty$ 时有 $q_n\uparrow q$.

(ii) 若 $q\in\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}$, 则存在一个词 $a_1\cdots a_n$ (其中 $n\geqslant 3$) 使得

$$\alpha(q)=(a_1\cdots a_n)^\infty.$$

(iii) 若 $q\in\mathcal{V}\setminus(\overline{\mathcal{U}}\cup\{G\})$, 则存在一个词 $a_1\cdots a_n$ (其中 $n\geqslant 2$) 使得

$$\alpha(q)=(a_1\cdots a_n^+\overline{a_1\cdots a_n^+})^\infty,$$

其中 G 是黄金分割数且 $(a_1\cdots a_n)^\infty$ 满足

$$\overline{(a_1\cdots a_n)^\infty}\preccurlyeq\sigma^i((a_1\cdots a_n)^\infty)\preccurlyeq(a_1\cdots a_n)^\infty,\quad \forall\, i\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

这里 σ 为 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中的左移位映射.

3　集合 $\mathcal{B}_3$ 的刻画

本节针对 $\mathcal{B}_3$ 给出一些刻画. 由第 1 节的讨论可知 $\emptyset \neq \mathcal{B}_3 \subseteq (G,2)$.

回顾, 当 $q \in (1,2)$ 时, 我们用 J_q 表示闭区间 $f_0(I_q)$ 与闭区间 $f_1(I_q)$ 的重叠部分, 即

$$J_q = f_0(I_q) \cap f_1(I_q) = \left[\frac{1}{q}, \frac{1}{q(q-1)}\right].$$

投影映射 $\Pi_q : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mapsto [0, \frac{1}{q-1}]$ 定义为

$$\Pi_q(s) = (s)_q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{q^i}, \quad s = (s_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

显然投影映射 Π_q 为满射. 对于 $x \in I_q$, $\Pi_q^{-1}(x)$ 为 x 的全体 q- 展式. 令

$$\phi_{q,k}(x) = qx - k, \quad k = 0, 1.$$

映射 $\phi_{q,k}$ 对于刻画数 $x \in I_q$ 的 q- 展式起到至关重要的作用: 数 $x \in I_q$ 具有以 0 开头的 q- 展式当且仅当 $\phi_{q,0}(x) = qx \in I_q$, 数 $x \in I_q$ 具有以 1 开头的 q- 展式当且仅当 $\phi_{q,1}(x) = qx - 1 \in I_q$. 于是, 数 $x \in I_q$ 既有以 0 开头的 q- 展式又有以 1 开头的 q- 展式当且仅当 $x \in J_q$. 由此可知, 如果 $x \in I_q$ 的贪婪 q- 展式以 0 开头, 则 $x \in [0, 1/q)$; 如果 x 的拟贪婪 q- 展式 $a(x) = (a_i(x))$ 以 0 开头并且 $\sigma(a_i(x)) \prec \alpha(q)$, 则 $x \in [0, 1/q)$. 事实上, 由引理 2.2 可知 $\sigma(a_i(x))$ 仍为拟贪婪 q- 展式. 于是, $a(x) = (a_i(x))$ 以 0 开头并且 $\sigma(a_i(x)) \prec \alpha(q)$ 说明 $qx < 1$, 故有 $x \in [0, 1/q)$.

此外, 对于 $(a_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 及正整数 ℓ, 有

$$\Pi_q(\sigma^{\ell}(a_i)) = \phi_{q,a_\ell} \circ \phi_{q,a_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \phi_{q,a_1}(\Pi_q((a_i))),$$

这里 σ 为 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中的左移位映射. 这意味着, 若 $(a_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 为数 $x \in I_q$ 的一个 q- 展式, 则对任意正整数 ℓ, 有

$$\phi_{q,a_\ell} \circ \phi_{q,a_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \phi_{q,a_1}(x) \in I_q.$$

接下来在 q 明确的前提下, 我们通常将映射 Π_q 简写为 Π, 将映射 $\phi_{q,k}(x)$ 简记为 $\phi_k(x)$.

下面的引理给出了集合 $\mathcal{B}_3$ 的一个刻画.

引理 3.1　设 $q \in (G,2)$, 则 $q \in \mathcal{B}_3$ 当且仅当 $1 \in \mathcal{U}_q - \mathcal{U}_q^2$ 或 $-1 \in \mathcal{U}_q - \mathcal{U}_q^2$.

证明　我们先证明充分性.

情形 1　$1 \in \mathcal{U}_q - \mathcal{U}_q^2$. 设 $1 = z - x$, 其中 $z \in \mathcal{U}_q$, $x \in \mathcal{U}_q^2$. 下面证明 $y := \frac{z}{q} \in \mathcal{U}_q^3$.

因为 $y = \frac{z}{q} = \frac{1}{q} + \frac{x}{q}$. 于是有

$$\phi_0(y) = qy = z \in \mathcal{U}_q \quad 且 \quad \phi_1(y) = qy - 1 = x \in \mathcal{U}_q^2.$$

这说明 y 恰好具有三个 q- 展式, 分别是一个以 0 开头和两个以 1 开头的 q- 展式. 因此 $y = \frac{z}{q} \in \mathcal{U}_q^3$.

情形 2　$-1 \in \mathcal{U}_q - \mathcal{U}_q^2$. 设 $-1 = z - x$, 其中 $z \in \mathcal{U}_q$, $x \in \mathcal{U}_q^2$. 下面证明 $y := \frac{x}{q} \in \mathcal{U}_q^3$.

因为 $y = \frac{x}{q} = \frac{1}{q} + \frac{z}{q}$, 于是有

$$\phi_0(y) = qy = x \in \mathcal{U}_q^2 \quad 且 \quad \phi_1(y) = qy - 1 = z \in \mathcal{U}_q.$$

这说明 y 恰好具有三个 q- 展式, 分别是两个以 0 开头和一个以 1 开头的 q- 展式. 因此 $y=\frac{x}{q}\in\mathcal{U}_q^3$.

下面证明必要性. 设 $q\in\mathcal{B}_3$. 任取一个 $x\in\mathcal{U}_q^3$, 它的三个 q- 展式分别是 (a_i), (b_i) 和 (c_i). 不失一般性, 假设

$$a_1=0,\quad b_1=c_1=1\quad\text{或}\quad a_1=1,\quad b_1=c_1=0.$$

情形 1 $a_1=0$, $b_1=c_1=1$. 于是, $\phi_0(x)=qx\in\mathcal{U}_q$ 且 $\phi_1(x)=qx-1\in\mathcal{U}_q^2$, 即 $1=qx-(qx-1)\in\mathcal{U}_q-\mathcal{U}_q^2$.

情形 2 $a_1=1$, $b_1=c_1=0$. 于是, $\phi_0(x)=qx\in\mathcal{U}_q^2$ 且 $\phi_1(x)=qx-1\in\mathcal{U}_q$, 即 $-1=(qx-1)-qx\in\mathcal{U}_q-\mathcal{U}_q^2$. □

称 $x\in I_q$ 的一个 q- 展式 (c_i) 是懒惰 q- 展式, 如果它的反射 $(\overline{c_i})$ 是 $\frac{1}{q-1}-x$ 的贪婪 q- 展式. 于是, 若 $x\in I_q$ 的懒惰 q- 展式以 1 开头, 则 $x\in(1/(q(q-1)),1/(q-1)]$. 回顾我们使用 σ 表示 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中的左移位映射.

命题 3.1 设 $q\in(G,2)$, 则 $q\in\mathcal{B}_3$ 当且仅当存在一个长度为 $n\geqslant 1$ 的词 $d=d_1\cdots d_n$ 和三个序列 $(a_i),(b_i),(c_i)\in\mathcal{U}_q'$ 满足下列陈述之一:

(i) $\Pi(1d0(b_i))=\Pi(1d1(c_i))=\Pi(0(a_i))$ 且对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$\Pi(\sigma^k(1d0(b_i)))\notin J_q,\quad \Pi(\sigma^k(1d1(c_i)))\notin J_q;\tag{3.1}$$

(ii) $\Pi(0d0(b_i))=\Pi(0d1(c_i))=\Pi(1(a_i))$ 且对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$\Pi(\sigma^k(0d0(b_i)))\notin J_q,\quad \Pi(\sigma^k(0d1(c_i)))\notin J_q.\tag{3.2}$$

注 3.1 在命题 3.1 中, 验证条件 (3.1) (或 (3.2)) 是一件麻烦的事. 注意到 $\Pi(1d0(b_i))=\Pi(1d1(c_i))$ (或 $\Pi(0d0(b_i))=\Pi(0d1(c_i))$)表明序列 $d0(b_i)$ 与 $d1(c_i)$ 是同一个数 $\Pi(d0(b_i))=:x$ 的两个不同 q- 展式. 于是, 若序列 $d1(c_i)$ 与 $d0(b_i)$ 恰好分别为 x 的贪婪及懒惰 q- 展式, 则根据贪婪与懒惰展式的定义可知 (3.1) (或 (3.2)) 成立.

证明 命题 3.1 的充分性显然成立. 事实上, (i) 表明 $x=\Pi(1d0(b_i))$ 恰好具有三个 q- 展式, 它们分别为 $1d0(b_i)$, $1d1(c_i)$ 和 $0(a_i)$. 同样地, (ii) 表明 $y=\Pi(0d0(b_i))$ 恰好具有三个 q- 展式, 它们分别为 $0d0(b_i)$, $0d1(c_i)$ 和 (a_i). 于是, 得到 $q\in\mathcal{B}_3$.

下面证明命题 3.1 的必要性. 假设 $q\in\mathcal{B}_3$, 则存在 $u\in I_q$, 它恰好具有三个 q- 展式, 它们分别为 (x_i), (y_i) 和 (z_i). 不妨假设 $x_1=0$, $y_1=z_1=1$ 或 $x_1=1$, $y_1=z_1=0$.

情形 1 $x_1=0$, $y_1=z_1=1$. 记 $(a_i)=\sigma((x_i))$, 则 $(x_i)=0(a_i)$ 且 $(a_i)\in\mathcal{U}_q'$. 由于 $(y_i)\neq(z_i)$, 所以 (y_i) 和 (z_i) 可以写成 $(y_i)=1d0(b_i)$ 和 $(z_i)=1d1(c_i)$, 其中 d 是长度为 $n\geqslant 1$ 的词 (若为空词, 即 $n=0$, 此时可以验证等式 $\Pi(1d0(b_i))=\Pi(1d1(c_i))=\Pi(0(a_i))$ 不会成立).

故当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时, 均有 $\Pi(\sigma^k(y_i))=\Pi(\sigma^k(z_i))\notin J_q$. 然而 $\Pi(0(b_i))=\Pi(\sigma^{n+1}(y_i))=\Pi(\sigma^{n+1}(z_i))=\Pi(1(c_i))\in J_q$. 由于 u 只有三个 q- 展式, 故 $(b_i),(c_i)\in\mathcal{U}_q'$.

情形 2 $x_1=1$, $y_1=z_1=0$. 记 $(a_i)=\sigma((x_i))$, 则 $(x_i)=1(a_i)$ 且 $(a_i)\in\mathcal{U}_q'$. 由于 $(y_i)\neq(z_i)$, 所以 (y_i) 和 (z_i) 可以写成 $(y_i)=0d0(b_i)$ 和 $(z_i)=0d1(c_i)$, 其中 d 为长度为 $n\geqslant 1$ 的词. 故当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时, 均有 $\Pi(\sigma^k(y_i))=\Pi(\sigma^k(z_i))\notin J_q$. 然而 $\Pi(0(b_i))=\Pi(\sigma^{n+1}(y_i))=\Pi(\sigma^{n+1}(z_i))=\Pi(1(c_i))\in J_q$. 由于 u 只有三个 q- 展式, 故 $(b_i),(c_i)\in\mathcal{U}_q'$. □

引理 3.2 集合 $\mathcal{U}\setminus\{2\}\subset\mathcal{B}_3$.

证明 任取一个 $q \in \mathcal{U} \setminus \{2\}$. 记 $\alpha(q) = (\alpha_i(q))$, k 是满足 $\alpha_k(q) = 0$ 的最小正整数. 令

$$(a_i) = \alpha_1(q) \cdots \alpha_{k-1}(q)(\alpha_k(q)+1)\alpha_{k+1}(q)\cdots, \quad (b_i) = \alpha(q), \quad (c_i) = 0^\infty, \quad d = 0^{k-1}.$$

显然 $(b_i), (c_i) \in \mathcal{U}_q'$. 下面验证 $(a_i) \in \mathcal{U}_q'$. 由 (a_i) 的定义及引理 2.4(i) 可得

$$\overline{a_{i+1}a_{i+2}\cdots} \preccurlyeq \overline{\alpha_{i+1}(q)\alpha_{i+2}(q)\cdots} \prec \alpha(q).$$

由于 $\alpha(q)$ 是唯一 q- 展式, 故 $\alpha_{k+1}(q)\alpha_{k+2}(q)\cdots$ 也是唯一 q- 展式. 注意到 $(a_i) = 1^k\alpha_{k+1}(q)\alpha_{k+2}(q)\cdots$, 从而当 $a_i = 0$ 时,

$$a_{i+1}a_{i+2}\cdots \prec \alpha(q).$$

由引理 2.3, 得到 $(a_i) \in \mathcal{U}_q'$.

下面验证序列 $0(a_i)$, $1d0(b_i)$ 和 $1d1(c_i)$ 满足命题 3.1(i). 首先, 不难验证 $\Pi(0(a_i)) = \Pi(1d0(b_i)) = \Pi(1d1(c_i)) = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^{k+1}}$. 其次, 对任意 $1 \leqslant i \leqslant k-1$, 有

$$\Pi(\sigma^i(1d0(b_i))) \leqslant \frac{1}{q^2}, \quad \Pi(\sigma^i(1d1(c_i))) \leqslant \frac{1}{q^2},$$

即命题 3.1 中的 (3.1) 成立. □

注 3.2 上述引理 3.2 也可以直接使用引理 3.1 得到. 事实上, 我们有 $1 = \Pi((a_i)) - \frac{1}{q^k}$, 而 $\frac{1}{q^k} \in \mathcal{U}_q^2$, 因为它只有两个 q- 展式: $0^{k-1}10^\infty$ 和 $0^k\alpha(q)$.

引理 3.3 集合 $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U} \subset \mathcal{B}_3$.

证明 设 $q \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$. 由引理 2.5(ii) 知, 存在一个词 $a_1 \cdots a_m$ 满足 $\alpha(q) = (a_1 \cdots a_m)^\infty$, 并且 $m \geqslant 3$ 是 $\alpha(q)$ 的最小正周期. 于是, $\beta(q) = a_1 \cdots a_{m-1}a_m^+0^\infty$. 由引理 2.2(ii) 有 $\sigma^i(\beta(q)) \prec \beta(q)$, 从而有 $a_{i+1}\cdots a_m^+ \preccurlyeq a_1 \cdots a_{m-i}$. 因为 $q \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$, 所以由引理 2.5(i) 知存在一个 $q > p \in \mathcal{U}$ 满足

$$\alpha_1(p) \cdots \alpha_m(p) = \alpha_1(q) \cdots \alpha_m(q) = a_1 \cdots a_m.$$

取 $d = \overline{a_1 \cdots a_{m-1}}$, $(b_i) = a_1 \cdots a_m^+\overline{\alpha(p)}$, $(c_i) = 0^m\overline{\alpha(p)}$ 及 $(a_i) = 1^m a_1 \cdots a_m^+\overline{\alpha(p)}$. 我们将验证 $(a_i), (b_i), (c_i) \in \mathcal{U}_q'$, 并且 $1d0(b_i), 1d1(c_i)$ 和 $0(a_i)$ 满足命题 3.1(i). 因为 $\alpha(p)$ 是唯一 q- 展式, 从而 $\overline{\alpha(p)}$ 是也唯一 q- 展式, 因此根据引理 2.3 得 $(c_i) \in \mathcal{U}_q'$. 由引理 2.4(ii) 可知, 对每个 $0 < i < m$ 有

$$\overline{a_{i+1}\cdots a_m^+} \prec \overline{a_{i+1}\cdots a_m} \preccurlyeq a_1 \cdots a_{m-i}. \tag{3.3}$$

于是, 对每个 $0 < i < m$ 有 $\sigma^i(\overline{(b_i)}) \prec \alpha(q)$. 当 $0 < i < m$ 时,

$$\begin{aligned}\sigma^i((b_i)) &= a_{i+1}\cdots a_m^+\overline{a_1 \cdots a_i\alpha_{i+1}(p)\alpha_{i+2}(p)\cdots} \\ &\preccurlyeq a_1 \cdots a_m\alpha(p) \prec a_1 \cdots a_m\alpha(q) = \alpha(q).\end{aligned}$$

由引理 2.1 和 2.4(i) 知, 对所有的 $i \geqslant 0$ 有

$$\overline{\alpha(q)} \prec \overline{\alpha(p)} \preccurlyeq \sigma^i(\alpha(p)) \preccurlyeq \alpha(p) \prec \alpha(q), \tag{3.4}$$

因此 $(b_i) \in \mathcal{U}_q'$. 并且由引理 2.3 有 $(a_i) \in \mathcal{U}_q'$. 由于

$$\Pi(0(b_i)) = \Pi(1(c_i)) = (10^m\overline{\alpha(p)})_q,$$

从而得到

$$\Pi(1d0(b_i)) = \Pi(1d1(c_i)) = \Pi(0(a_i)) = (1\overline{a_1\cdots a_m}0^m\overline{\alpha(p)})_q.$$

下面证明 $d0(b_i) = \overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m^+\overline{\alpha(p)}$ 和 $d1(c_i) = \overline{a_1\cdots a_m}0^m\overline{\alpha(p)}$ 分别是 $\Pi(d0(b_i))$ 的懒惰和贪婪 q- 展式. 由 (3.3) 有 $\overline{a_{i+1}\cdots a_m}0^i \preccurlyeq \alpha_1(q)\cdots\alpha_m(q)$, 所以根据 (3.4) 和引理 2.2(ii) 可知 $d1(c_i)$ 是贪婪展式. 为了证明 $d0(b_i)$ 是懒惰展式, 只需要证明 $\overline{d0(b_i)} = a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m^+}\alpha(p)$ 是贪婪展式. 1 的贪婪展式是 $\beta(q) = a_1\cdots a_m^+0^\infty$. 由贪婪展式的性质知 $\sigma^i(\beta(q)) \prec \beta(q)$. 对每个 $0 < i < m$, 有

$$a_{i+1}\cdots a_m \prec a_{i+1}\cdots a_m^+ \preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i}.$$

所以 $a_{i+1}\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m^+}\alpha(p) \prec \alpha(q)$. 再次利用 (3.3), 对每个 $0 \leqslant i < m$, 有

$$\overline{a_{i+1}\cdots a_m^+}\alpha(p) \prec \alpha(q).$$

于是, 根据引理 2.2 可知 $\overline{d0(b_i)}$ 是贪婪展式. □

定理 3.1 集合 $\mathcal{V}\setminus\{G,2\}\subset\mathcal{B}_3$.

证明 由引理 3.3 和 3.2, 只需要证明 $\mathcal{V}\setminus(\overline{\mathcal{U}}\cup\{G\})\subset\mathcal{B}_3$. 任取 $q\in\mathcal{V}\setminus(\overline{\mathcal{U}}\cup\{G\})$, 由引理 2.4(iii) 和 2.5(iii) 有

$$\alpha(q) = (a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m^+})^\infty, \quad \beta(q) = a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m}0^\infty,$$

且

$$\overline{\alpha(q)} \preccurlyeq \sigma^i(\alpha(q)) \preccurlyeq \alpha(q), \quad \overline{(a_1\cdots a_m)^\infty} \preccurlyeq \sigma^i((a_1\cdots a_m)^\infty) \preccurlyeq (a_1\cdots a_m)^\infty. \tag{3.5}$$

令

$$d = \overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_{m-1}, \quad (a_i) = 1^{2m}a_1\cdots a_m^+(\overline{a_1\cdots a_m})^\infty$$

和

$$(b_i) = a_1\cdots a_m^+(\overline{a_1\cdots a_m})^\infty, \quad (c_i) = 0^{2m}(\overline{a_1\cdots a_m})^\infty.$$

我们将验证 $(a_i),(b_i),(c_i)\in\mathcal{U}_q'$, 并且 $1d0(b_i), 1d1(c_i)$ 和 $0(a_i)$ 满足命题 3.1(i).

首先, 注意到由 (3.5) 可得

$$a_{i+1}\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_i} \preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i}a_{m-i+1}\cdots a_m \prec a_1\cdots a_{m-i}a_{m-i+1}\cdots a_m^+$$

且

$$\overline{a_{i+1}\cdots a_m^+} \prec \overline{a_{i+1}\cdots a_m} \preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i}. \tag{3.6}$$

于是, 当 $0 < i < m$ 时, 有 $\overline{\alpha(q)} \prec \sigma^i((b_i)) \prec \alpha(q)$. 其次,

$$\begin{aligned} &\overline{a_{i+1}\cdots a_m a_1\cdots a_i} \preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i}a_{m-i+1}\cdots a_m \prec a_1\cdots a_{m-i}a_{m-i+1}\cdots a_m^+, \\ &a_{i+1}\cdots a_m \prec a_{i+1}\cdots a_m^+ \preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

于是, 当 $m \leqslant i$ 时, 有 $\overline{\alpha(q)} \prec \sigma^i((b_i)) \prec \alpha(q)$. 因此, 由引理 2.3 知 $(a_i),(b_i),(c_i)\in\mathcal{U}_q'$. 易验证

$$\Pi(1d0(b_i)) = \Pi(1d1(c_i)) = \Pi(0(a_i)) = (1\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m^+0^{2m}(\overline{a_1\cdots a_m})^\infty)_q.$$

最后, 由 (3.6) 和 (3.7) 可得 $d1(c_i)$ 和 $\overline{d0(b_i)}$ 是贪婪展式. □

4　$\mathcal{B}_j$ 的刻画

本节给出 $\mathcal{B}_j$ 的刻画, $j \geqslant 4$. 回顾 $\mathcal{U}_q^j$ 表示有且仅有 j 个 q- 展式的数构成的集合, 用 $\mathcal{U}'_{q,j}$ 表示 $\mathcal{U}_q^j$ 中的数所对应的 q- 展式集合.

引理 4.1　给定 $j \geqslant 4$ 及 $q \in (G, 2)$, 则 $q \in \mathcal{B}_j$ 当且仅当存在正整数 m 和 n 满足 $m + n = j$ 使得 $1 \in \mathcal{U}_q^m - \mathcal{U}_q^n$ 或 $-1 \in \mathcal{U}_q^m - \mathcal{U}_q^n$.

证明　先证充分性. 假设 $1 \in \mathcal{U}_q^m - \mathcal{U}_q^n$, 从而可以选择某个 $x \in \mathcal{U}_q^n$ 使得 $1 + x \in \mathcal{U}_q^m$.

取 $y = \frac{1+x}{q}$, 下面验证 $y \in \mathcal{U}_q^j$. 首先易验证 $y \in J_q$, 于是 y 的 q 展式的第一个数字可以选择 0, 也可以选择 1. 若选择数字 0, 则由 $\phi_0(y) = qy = x + 1 \in \mathcal{U}_q^m$ 可知 y 以 0 开头的 q 展式只有 m 个. 若选择数字 1, 则由 $\phi_1(y) = qy - 1 = x \in \mathcal{U}_q^n$ 可知 y 以 1 开头的 q 展式只有 n 个. 这样得到 $y \in \mathcal{U}_q^j$.

假设 $-1 \in \mathcal{U}_q^m - \mathcal{U}_q^n$, 可用类似方法找到数 y, 它落在 $\mathcal{U}_q^j$ 中.

接下来证明必要性. 取定一个 $q \in \mathcal{B}_j$, 则存在 $x \in \mathcal{U}_q^j$, 它恰好有 j 个展式为 $(a_k^1), (a_k^2), \dots, (a_k^j)$ 并且这 j 个展式既有以 0 开头的, 也有以 1 开头的. 不妨假设 $a_1^1 = \cdots = a_1^m = 0$, $a_1^{m+1} = \cdots = a_1^j = 1$ (或 $a_1^1 = \cdots = a_1^m = 1, a_1^{m+1} = \cdots = a_1^j = 0$), 从而有 $\phi_0(x) = qx \in \mathcal{U}_q^m$ 且 $\phi_1(x) = qx - 1 \in \mathcal{U}_q^n$ (或 $\phi_1(x) = qx - 1 \in \mathcal{U}_q^m$ 且 $\phi_0(x) = qx \in \mathcal{U}_q^n$). 因此 $1 \in \mathcal{U}_q^m - \mathcal{U}_q^n$ 或 $-1 \in \mathcal{U}_q^m - \mathcal{U}_q^n$, 其中正整数 m 和 n 满足 $m + n = j$. □

上述引理 4.1 告诉我们, 对于给定的 $q \in (G, 2)$ 和 $j \geqslant 4$, $x \in \mathcal{U}_q^j$ 当且仅当存在正整数 m 和 n $(m + n = j)$, 一个长度为 $N \geqslant 0$ 的词 $d \in \{0,1\}^N$ ($N = 0$ 时为空词) 及 $(a_i) \in \mathcal{U}'_{q,m}$, $(b_i) \in \mathcal{U}'_{q,n}$ 满足

$$x = \Pi(d_1 \cdots d_N 0(a_i)) = \Pi(d_1 \cdots d_N 1(b_i))$$

以及

$$\Pi(\sigma^k(d_1 \cdots d_N 0(a_i))), \Pi(\sigma^k(d_1 \cdots d_N 1(b_i))) \notin J_q \quad \text{对每个 } 0 \leqslant k < N \text{ 成立}.$$

引理 4.1 也可以写成如下形式.

命题 4.1　设 $q \in (G, 2)$ 和 $j \geqslant 4$, 则 $q \in \mathcal{B}_j$ 当且仅当存在两个正长度的词 $u \in \{0,1\}^{n_1}$, $v \in \{0,1\}^{n_2}$ 和序列 $(a_i^k) \in \mathcal{U}'_{q,m_k}$ ($m_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 且 $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = j$) 满足

$$\Pi(1u0(a_i^1)) = \Pi(1u1(a_i^2)) = \Pi(0v0(a_i^3)) = \Pi(0v1(a_i^4)) \tag{4.1}$$

以及

$$\begin{aligned} &\Pi(\sigma^k(1u0(a_i^1))), \Pi(\sigma^k(1u1(a_i^2))) \notin J_q, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_1, \\ &\Pi(\sigma^\ell(0v0(a_i^3))), \Pi(\sigma^\ell(0v1(a_i^4))) \notin J_q, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant n_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

这里若某个 $m_k = 0$, 应理解为对应的序列 (a_i^k) 不存在.

注 4.1　在 m_1 和 m_2 均为正整数情形, 若 $u0(a_i^1)$ 和 $u1(a_i^2)$ 分别是数 $\Pi(u0(a_i^1))$ $(= \Pi(u1(a_i^2)))$ 的懒惰 q- 展式和贪婪 q- 展式, 则 (4.2) 中的第一个条件成立. 同样, 在 m_3 和 m_4 均为正整数的情形, 若 $v0(a_i^3)$ 和 $v1(a_i^4)$ 分别是数 $\Pi(v0(a_i^3))$ $(= \Pi(v1(a_i^4)))$ 的懒惰 q- 展式和贪婪 q- 展式, 则 (4.2) 中的第二个条件成立.

证明　现在证明命题 4.1 的充分性. 不妨假设 m_k, $k = 1,2,3,4$ 均为正整数, 对于有取 0 的情形, 可以同法讨论. 记 $x = \Pi(1u0(a_i^1))$, 则等式 $\Pi(1u0(a_i^1)) = \Pi(1u1(a_i^2))$ 及 (4.2) 中的第一个条件说明 x

仅有 m_1+m_2 个以 1 开头的 q- 展式. 而等式 $\Pi(0v0(a_i^3))=\Pi(0v1(a_i^4))$ 及 (4.2) 中的第二个条件说明 x 仅有 m_3+m_4 个以 0 开头的 q- 展式. 于是 $q\in\mathcal{B}_j$.

下面证明命题 4.1 的必要性. 取 $q\in\mathcal{B}_j$, 则存在 $x\in\mathcal{U}_q^j$. 不妨假设 x 有 $1\leqslant\alpha<j$ 个以 1 开头的 q- 展式, 同时具有 $\beta=j-\alpha$ 个以 0 开头的 q- 展式.

(i) 假设 $\alpha>1,\beta>1$. 对于 x 的以 1 开头的 q- 展式, 设它们的开头公共部分为词 $1u=1u_1\cdots u_{n_1}$. 对于 x 的以 0 开头的 q- 展式, 设它们的开头公共部分为词 $0v=0v_1\cdots v_{n_2}$. 令

$$y=\phi_{u_{n_1}}\circ\phi_{u_{n_1-1}}\circ\cdots\circ\phi_{u_1}\circ\phi_1(x),\quad z=\phi_{v_{n_2}}\circ\phi_{v_{n_2-1}}\circ\cdots\circ\phi_{v_1}\circ\phi_0(x),$$

则 $y,z\in J_q$. 于是 y 恰有 α 个 q- 展式, 设其中 $m_1\geqslant 1$ 个以 0 开头, $m_2\geqslant 1$ 个以 1 开头. 这样就有 $\phi_0(y)\in\mathcal{U}_q^{m_1}$, $\phi_1(y)\in\mathcal{U}_q^{m_2}$. 从而存在 $(a_i^1)\in\mathcal{U}'_{q,m_1}$, $(a_i^2)\in\mathcal{U}'_{q,m_2}$ 满足 $\phi_0(y)=\Pi((a_i^1))$, $\phi_1(y)=\Pi((a_i^2))$. 综上得到

$$x=\Pi(1u0(a_i^1))=\Pi(1u1(a_i^2)).\tag{4.3}$$

对 z 重复上述推导可得 $(a_i^3)\in\mathcal{U}'_{q,m_3}$, $(a_i^4)\in\mathcal{U}'_{q,m_4}$, $m_3,m_4\geqslant 1$, 使得 $x=\Pi(1v0(a_i^3))=\Pi(0v1(a_i^4))$. 于是, (4.1) 成立. 此外, 上述推理表明 (4.2) 成立.

(ii) 假设 $\alpha>1$, $\beta=1$. 由上述论述可知, x 有 $\alpha\ (=j-1)$ 个以 1 开头的 q- 展式, 它们的开头公共部分为词 $1u=1u_1\cdots u_{n_1}$. 重复上面推理可以得到 (4.3). 此外, x 有 $\beta=1$ 个以 0 开头的 q- 展式, 即 $\phi_0(x)\in\mathcal{U}_q^1$. 于是, $\phi_0(x)=\Pi((b_i))$, $(b_i)\in\mathcal{U}'_{q,1}$. 记 $(b_i)=v0(a_i^3)$, $(a_i^3)\in\mathcal{U}'_{q,1}$ 或 $(b_i)=v1(a_i^4)$, $(a_i^4)\in\mathcal{U}'_{q,1}$. 这样有

$$\Pi(1u0(a_i^1))=\Pi(1u1(a_i^2))=\Pi(0v0(a_i^3))\quad\text{或}\quad\Pi(1u0(a_i^1))=\Pi(1u1(a_i^2))=\Pi(0v1(a_i^4)).$$

最后必须指出 u 和 v 必须具有正的长度, 否则等式 (4.1) 不能成立. 对于 $\alpha=1$ 和 $\beta>1$, 可以同法证明. □

回顾 $\mathcal{U}$ 的闭包 $\overline{\mathcal{U}}$ 的有关结果. 首先 $\overline{\mathcal{U}}$ 是 Cantor 集, 并且 $(1,2)\setminus\overline{\mathcal{U}}=\cup(q_0,q_0^*)$, 其中 (q_0,q_0^*) 是连通分支, q_0 取遍 $\{1\}\cup(\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U})$, q_0^* 取遍 $\mathcal{U}$ 的真子集 $\mathcal{U}^*$ (参见文献 [8]). 此外, $\mathcal{U}^*$ 中的数都是超越数 (参见文献 [23]). 对每个连通分支 (q_0,q_0^*), 1 的拟贪婪展式 $\alpha(q_0^*)$ 是一个 Thue-Morse 型序列

$$\alpha(q_0^*)=a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m}\,\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m^+\cdots,\tag{4.4}$$

其中, 当 $q_0\neq 1$ 时, $\alpha(q_0)=(a_1\cdots a_m)^\infty$, $m\geqslant 2$; 当 $q_0=1$ 时, $\alpha(q)=(a_1\cdots a_m)^\infty$, $q\in\mathcal{V}\cap(1,q_{\mathrm{KL}})$.

称一个序列 (τ_i) 是由 $a_1\cdots a_m$ 生成的 Thue-Morse 型序列, 如果 $\tau_1\cdots\tau_m=a_1\cdots a_m^+$ 且

$$\tau_{2^nm+1}\cdots\tau_{2^{n+1}m}=\overline{\tau_1\cdots\tau_{2^nm}}^+\quad\text{对每个 } n=0,1,\dots\text{ 成立.}$$

关于 Thue-Morse 型序列更多内容参见文献 [1, 6, 22].

通过观察定义 (4.4), 可以发现 $\alpha(q_0^*)$ 中从第 $km+1$ 项到第 $(k+2)m$ 项 (k 为非负整数) 所组成的词共有以下几种形式:

$$\begin{aligned}&a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m},\quad &&a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m^+},\quad &&a_1\cdots a_ma_1\cdots a_m^+,\\ &\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m,\quad &&\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m^+,\quad &&\overline{a_1\cdots a_m}a_1\cdots a_m^+.\end{aligned}$$

引理 4.2　设 $q_0^* \in \mathcal{U}^*$, 它的拟贪婪展式 $\alpha(q_0^*) = (\lambda_i)$ 是由 $a_1 \cdots a_m$ 生成的 Thue-Morse 型序列. 记 $u = a_1 \cdots a_m^+$, $v = a_1 \cdots a_m$. 则对每个 $0 \leqslant i \leqslant m-1$, 有

$$\sigma^i(u\overline{v}) \preccurlyeq \lambda_1 \cdots \lambda_{2m-i}, \quad \sigma^i(u\overline{u}) \prec \lambda_1 \cdots \lambda_{2m-i}, \quad \sigma^i(vu) \prec \lambda_1 \cdots \lambda_{2m-i},$$
$$\sigma^i(\overline{u}v) \prec \lambda_1 \cdots \lambda_{2m-i}, \quad \sigma^i(\overline{u}u) \prec \lambda_1 \cdots \lambda_{2m-i}, \quad \sigma^i(\overline{vu}) \prec \lambda_1 \cdots \lambda_{2m-i}.$$

证明　由已知可知, $q_0^* \in \mathcal{U}^*$ 是某个连通分支 (q_0, q_0^*) 的右端点, 它的拟贪婪展式 $\alpha(q_0^*) = (\lambda_i)$ 由 (4.4) 表出, 是由 $a_1 \cdots a_m$ 生成的 Thue-Morse 型序列. 注意到 $\alpha(q) = (a_1 \cdots a_m)^\infty$, $\beta(q) = a_1 \cdots a_m^+ 0^\infty$, $q \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. 由引理 2.4(ii)、2.4(iii) 和引理 2.2(ii) 知, 对每个 $i > 0$ 有

$$\overline{(a_1 \cdots a_m)^\infty} \preccurlyeq \sigma^i((a_1 \cdots a_m)^\infty) \preccurlyeq (a_1 \cdots a_m)^\infty$$

和 $\sigma^i(\beta(q_0)) \prec \beta(q_0)$. 所以

$$\overline{a_1 \cdots a_{m-i}} \preccurlyeq a_{i+1} \cdots a_m \prec a_{i+1} \cdots a_m^+ \preccurlyeq a_1 \cdots a_{m-i}, \tag{4.5}$$

即

$$a_{i+1} \cdots a_m^+ \overline{a_1 \cdots a_i} \prec a_1 \cdots a_m^+ \text{和} \overline{a_{i+1} \cdots a_m^+} \prec a_1 \cdots a_{m-i}.$$

设 $\eta_i := \lambda_1 \cdots \lambda_{2m-i}$, 因此可以得出 $\sigma^i(u\overline{v}) \preccurlyeq \eta_i$, $\sigma^i(u\overline{u}) \prec \eta_i$, $\sigma^i(\overline{u}v) \prec \eta_i$, $\sigma^i(\overline{u}u) \prec \eta_i$. 第一个不等式 $\sigma^i(u\overline{v}) \preccurlyeq \eta_i$ 等号成立当且仅当 $i = 0$. 最后两个不等式 $\sigma^i(\overline{vu}) \prec \eta_i$ 和 $\sigma^i(vu) \prec \eta_i$ 可以由 (4.5) 直接得到. □

引理 4.3　集合 $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{B}_j$, $j > 3$.

证明　任取 $q \in \mathcal{U}^*$, 则 $\alpha(q) = (\lambda_i)$ 具有表达式 (4.4). 设 k 是满足 $\lambda_k = 0$ 的最小正整数. 首先递归地定义一个非负整数序列 $(n_t)_{t \geqslant 1}$: 令 $n_1 = n_2 = n_3 = 0$; 对 $t \geqslant 4$, 令 $n_t = 3 \cdot 4^{t-4} m$. 记 $S_t = \sum_{i=1}^t n_i$. 于是, $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, $S_t = (4^{t-3} - 1)m$, $t > 3$. 对于正整数 $j \geqslant 4$, 令

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1^j &= 1\overline{\lambda_1 \cdots \lambda_{S_j}} 0^{k-1} 1 0^\infty, \\
\mathbf{A}_2^j &= 1\overline{\lambda_1 \cdots \lambda_{S_j}} 0^k (\lambda_i), \\
\mathbf{A}_t^j &= 1\overline{\lambda_1 \cdots \lambda_{S_j - S_t}^+} 1^{S_t} \lambda_{S_t+1} \cdots \lambda_{S_t+k-1} (\lambda_{S_t+k} + 1) \lambda_{S_t+k+1} \cdots, \quad 3 \leqslant t \leqslant j-1, \\
\mathbf{A}_j^j &= 0 1^{S_j} \lambda_{S_j+1} \cdots \lambda_{S_j+k-1} (\lambda_{S_j+k} + 1) \lambda_{S_j+k+1} \cdots.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

需要指出的是 $\lambda_{S_t+k} = \lambda_{S_j+k} = 0$, 故上面定义有意义. 接下来证明

$$\Pi(\mathbf{A}_1^j) = \Pi(\mathbf{A}_2^j) = \cdots = \Pi(\mathbf{A}_j^j) =: z_j, \tag{4.7}$$

并且 z_j 只有 (4.7) 中这 j 种 q- 展式, 从而 $q \in \mathcal{B}_j$.

我们使用归纳法加以证明. 当 $j = 4$ 时, 有 $S_4 = 3m$, 故

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1^4 &= 1\overline{\lambda_1 \cdots \lambda_{3m}} 0^{k-1} 1 0^\infty, \\
\mathbf{A}_2^4 &= 1\overline{\lambda_1 \cdots \lambda_{3m}} 0^k (\lambda_i), \\
\mathbf{A}_3^4 &= 1\overline{\lambda_1 \cdots \lambda_{3m}^+} \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1} (\lambda_k + 1) \lambda_{k+1} \cdots, \\
\mathbf{A}_4^4 &= 0 1^{3m} \lambda_{3m+1} \cdots \lambda_{3m+k-1} (\lambda_{3m+k} + 1) \lambda_{3m+k+1} \cdots.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

首先, 易于看出

$$\Pi(\mathbf{A}_1^4)=\Pi(\mathbf{A}_2^4)=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{3m}}0^{k-1}10^\infty)=:z_4.$$

其次, 有

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{A}_3^4)&=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{3m}^+}\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}(\lambda_k+1)\lambda_{k+1}\cdots)\\&=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{3m-1}}(\overline{\lambda_{3m}}-1)0^\infty)+\Pi(0^{3m}10^{k-1}10^\infty)\\&=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{3m}}0^{k-1}10^\infty)=z_4\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{A}_4^4)&=\Pi(01^{3m}\lambda_{3m+1}\cdots\lambda_{3m+k-1}(\lambda_{3m+k}+1)\lambda_{3m+k+1}\cdots)\\&=\Pi(0(\lambda_1+\overline{\lambda_1})\cdots(\lambda_{3m}+\overline{\lambda_{3m}})\lambda_{3m+1}\cdots\lambda_{3m+k-1}(\lambda_{3m+k}+1)\lambda_{3m+k+1}\cdots)\\&=\Pi(0(\lambda_i))+\Pi(0\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{3m}}0^{k-1}10^\infty)\\&=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{3m}}0^{k-1}10^\infty)=z_4.\end{aligned}$$

这验证了 (4.7) 当 $j=4$ 时成立.

下面说明 z_4 只有 (4.8) 中这 4 种 q- 展式. 注意到

$$\begin{aligned}&\sigma(\mathbf{A}_1^4)=\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{3m}}0^{k-1}10^\infty=\overline{u}vu0^{k-1}10^\infty,\\&\overline{\sigma(\mathbf{A}_3^4)}=\lambda_1\cdots\lambda_{3m}^+\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}(\lambda_k+1)\lambda_{k+1}\cdots}=u\overline{v}\overline{v}0^k\overline{\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots},\end{aligned}$$

这里 u 和 v 的定义见引理 4.2. 由引理 4.2 可知, 当 $0<i<2m$ 时有

$$\sigma^i(\overline{u}vu0^{k-1}10^\infty)\prec(\lambda_i),\quad \sigma^i(u\overline{v}\overline{v}0^k\overline{\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots})\prec(\lambda_i).$$

此外, 有 $0^{k-1}10^\infty\prec\overline{u}v0^\infty, 0^k\overline{\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots}\prec(\overline{\lambda_i})=\overline{u}v\cdots$. 因此, 当 $2m\leqslant i<3m$ 时, 由引理 4.2 得

$$\begin{aligned}&\sigma^i(\overline{u}vu0^{k-1}10^\infty)\prec\sigma^i(\overline{u}vu\overline{u}v0^\infty)\prec(\lambda_i),\\&\sigma^i(u\overline{v}\overline{v}0^k\overline{\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots})\prec\sigma^i(u\overline{v}\overline{v}(\overline{\lambda_i}))=\sigma^i(u\overline{v}\overline{v}\overline{u}v\cdots)\prec(\lambda_i).\end{aligned}$$

当 $i\geqslant 3m$ 时, 可直接验证 $\sigma^i(\overline{u}vu0^{k-1}10^\infty)\prec(\lambda_i)$, $\sigma^i(u\overline{v}\overline{v}0^k\overline{\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots})\prec(\lambda_i)$, 所以由引理 2.2 得 $\sigma(\mathbf{A}_1^4)$ 和 $\overline{\sigma(\mathbf{A}_3^4)}$ 是贪婪展式. 最后不难验证

$$0^\infty,(\lambda_i),\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}(\lambda_k+1)\lambda_{k+1}\cdots,1^{3m}\lambda_{3m+1}\cdots\lambda_{3m+k-1}(\lambda_{3m+k}+1)\lambda_{3m+k+1}\cdots\in\mathcal{U}_q'.$$

因此根据命题 4.1 和注 4.1 可知 z_4 只有上面 (4.8) 中 4 种 q- 展式, 故 $q\in\mathcal{B}_4$.

假设对某个 $j=r\geqslant 4$ 结论成立. 下面证明 $q\in\mathcal{B}_{r+1}$. 由 (4.6) 可得

$$\mathbf{A}_{r+1}^{r+1}=01^{S_{r+1}}\lambda_{S_{r+1}+1}\cdots\lambda_{S_{r+1}+k-1}(\lambda_{S_{r+1}+k}+1)\lambda_{S_{r+1}+k+1}\cdots.$$

因为 $n_i=3\cdot 4^{i-4}m$, 设 $\theta_i=\lambda_1\cdots\lambda_{4^{i-4}m}$, 根据 Thue-Morse 型序列 (λ_i) 定义, $\lambda_1\cdots\lambda_{3\cdot 4^{i-4}m}=\theta_i\overline{\theta_i}^+\overline{\theta_i}$, 所以 $\lambda_{3\cdot 4^{i-4}m}=\overline{\lambda_{4^{i-4}m}}$. 此外, 从 (λ_i) 的构造可以看出, 对每个 $j\geqslant 0$ 有 $\lambda_{4^jm}=1$, 因此 $\lambda_{n_i}=\overline{\lambda_{4^{i-4}m}}=0$ 对每个 $i\geqslant 4$ 成立.

另外, $\lambda_1\cdots\lambda_{S_r}=\lambda_1\cdots\lambda_{(4^{r-3}-1)m}$. 设 $\omega_r=\lambda_1\cdots\lambda_{4^{r-3}m}$, 再次根据 Thue-Morse 型序列 (λ_i) 的构造知 $\lambda_1\cdots\lambda_{4^{r-2}m}=\omega_r\overline{\omega_r}^+\overline{\omega_r}\omega_r$. 于是, $\lambda_1\cdots\lambda_{4^{r-3}m}=\lambda_{3\cdot4^{r-3}m+1}\cdots\lambda_{4^{r-2}m}$, 也就有 $\lambda_1\cdots\lambda_{(4^{r-3}-1)m}=\lambda_{3\cdot4^{r-3}m+1}\cdots\lambda_{(4^{r-2}-1)m}$, 即

$$\lambda_1\cdots\lambda_{S_r}=\lambda_1\cdots\lambda_{(4^{r-3}-1)m}=\lambda_{3\cdot4^{r-3}m+1}\cdots\lambda_{(4^{r-2}-1)m}=\lambda_{n_{r+1}+1}\cdots\lambda_{S_{r+1}}.$$

于是, 得到 $\lambda_{n_i}=0$, $i\geqslant4$, 以及 $\lambda_1\cdots\lambda_{S_r}=\lambda_{n_{r+1}+1}\cdots\lambda_{S_{r+1}}$. 从而根据 (4.6), 可得

$$\mathbf{A}_t^{r+1}=1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}-1}}\mathbf{A}_t^r,\quad 1\leqslant t\leqslant r. \tag{4.9}$$

由归纳假设有 $\Pi(\mathbf{A}_1^r)=\cdots=\Pi(\mathbf{A}_r^r)=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{S_r}}0^{k-1}10^\infty)$. 从而由 (4.9) 可以得到

$$\Pi(\mathbf{A}_1^{r+1})=\cdots=\Pi(\mathbf{A}_r^{r+1})=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}-1}}\mathbf{A}_1^r).$$

此外,

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{A}_{r+1}^{r+1})&=\Pi(01^{S_{r+1}}\lambda_{S_{r+1}+1}\cdots\lambda_{S_{r+1}+k-1}(\lambda_{S_{r+1}+k}+1)\lambda_{S_{r+1}+k+1}\cdots)\\&=\Pi(0(\lambda_1+\overline{\lambda_1})\cdots(\lambda_{S_{r+1}}+\overline{\lambda_{S_{r+1}}})\lambda_{S_{r+1}+1}\cdots\lambda_{S_{r+1}+k-1}(\lambda_{S_{r+1}+k}+1)\lambda_{S_{r+1}+k+1}\cdots)\\&=\Pi(1\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{S_{r+1}}}0^{k-1}10^\infty)=\Pi(\mathbf{A}_1^{r+1})=:z_{r+1}.\end{aligned}$$

下面说明 z_{r+1} 只有上面 $r+1$ 种 q- 展式. 注意到

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{A}_1^{r+1})&=\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}-1}}\mathbf{A}_1^r=\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{S_{r+1}}}0^{k-1}10^\infty\\&=\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{S_{r+1}}\lambda_1\cdots\lambda_k}0^\infty\\&=\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{S_{r+1}}\lambda_{S_{r+1}+1}\cdots\lambda_{S_{r+1}+k}}0^\infty\\&\prec\overline{\lambda_1\cdots\lambda_{S_{r+1}}\lambda_{S_{r+1}+1}\cdots\lambda_{S_{r+2}}}0^\infty.\end{aligned}$$

由 (λ_i) 唯一性和引理 2.2 可得 $\sigma(\mathbf{A}_1^{r+1})$ 是贪婪展式. 此外,

$$\begin{aligned}\sigma(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}})&=\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}-1}\overline{\mathbf{A}_r^r}\\&=\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}-1}10^{S_r}\overline{\lambda_{S_r+1}\cdots\lambda_{S_r+k-1}(\lambda_{S_r+k}+1)\lambda_{S_r+k+1}\cdots}\\&=\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}-1}\lambda_{n_{r+1}}^+0^{S_r}\overline{\lambda_{S_r+1}\cdots\lambda_{S_r+k-1}(\lambda_{S_r+k}+1)\lambda_{S_r+k+1}\cdots}.\end{aligned}$$

已经证明了当 $r=4$ 时有 $\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_4}^+0^k\overline{\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots})\prec(\lambda_i)$. 类似地, 当 $r=5$ 时同样可以用引理 4.2 得到 $\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_5}^+0^{S_4})\prec\lambda_1\cdots\lambda_{15m-i}$ 对每个 $0<i<15m$ 成立. 假设对某个 $r\geqslant5$ 及 $0<i<S_r$ 有

$$\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_r}^+0^{S_{r-1}})\prec\lambda_1\cdots\lambda_{S_r-i}.$$

我们说明 $\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+0^{S_r})\prec\lambda_1\cdots\lambda_{S_{r+1}-i}$ 对每个 $0<i<S_{r+1}$ 也成立. 回顾 $n_r=3\cdot4^{r-4}m$ 和 $\theta_r=\lambda_1\cdots\lambda_{4^{r-4}m}$, 则

$$\lambda_1\cdots\lambda_{n_r}^+=\theta_r\overline{\theta_r}^+\overline{\theta_r}^+\quad 及 \quad\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+=\theta_r\overline{\theta_r}^+\overline{\theta_r}\theta_r\overline{\theta_r}\theta_r^-\theta_r\overline{\theta_r}^+\overline{\theta_r}\theta_r^-\theta_r\overline{\theta_r}^+.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+)\prec\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_r}^+0^{S_{r-1}})\prec(\lambda_i),\quad \text{当 } 0<i<4^{r-4}m \text{ 时},\\
&\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+)\prec\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_r}^+0^{S_{r-1}})\prec(\lambda_i),\quad \text{当 } 4^{r-4}m\leqslant i<2\cdot4^{r-4}m \text{ 时},\\
&\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+)\prec\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_r}^+0^{S_{r-1}})\prec(\lambda_i),\quad \text{当 } 2\cdot4^{r-4}m\leqslant i<3\cdot4^{r-4}m \text{ 时},\\
&\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+)\prec(\lambda_i),\quad \text{当 } i=3\cdot4^{r-4}m \text{ 时},\\
&\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+)\prec\sigma^{i-3\cdot4^{r-4}m}(\lambda_1\cdots\lambda_{n_r}^+0^{S_{r-1}})\prec(\lambda_i),\quad \text{当 } 3\cdot4^{r-4}m<i<4^{r-3}m \text{ 时}.
\end{aligned}$$

对于 $4^{r-3}m\leqslant i<12\cdot4^{r-4}m$ 的其他情形, 同理可得 $\sigma^i(\lambda_1\cdots\lambda_{n_{r+1}}^+0^{S_r})\prec(\lambda_i)$. 最后可由 (λ_i) 的唯一性得到当 $i>S_{r+1}$ 时 $\sigma^i(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}})\prec(\lambda_i)$, 所以由引理 2.2 可知 $\sigma(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}})$ 是贪婪 q- 展式. 同时不难验证 $\sigma(\mathbf{A}_{r+1}^{r+1})$ 是唯一 q- 展式, 因此根据命题 4.1 和注 4.1 得到 z_{r+1} 只有上面 $r+1$ 种 q- 展式, 故 $q\in\mathcal{B}_{r+1}$. □

引理 4.4 集合 $\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}\subset\mathcal{B}_j$, $j>3$.

证明 设 $q\in\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}$. 由引理 2.5(ii) 知, 存在一个词 $a_1\cdots a_m$ 满足 $\alpha(q)=(a_1\cdots a_m)^\infty$, 其中 $m\geqslant2$ 是 $\alpha(q)$ 的最小正周期. 根据引理 2.5(i), 存在一个 $q>p\in\mathcal{U}$ 使得 $\alpha(p)=(\alpha_i(p))$ 满足

$$\alpha_1(p)\cdots\alpha_m(p)=\alpha_1(q)\cdots\alpha_m(q)=a_1\cdots a_m.$$

记 $A=\overline{a_1\cdots a_m}, B=a_1\cdots a_m^+$. 对于 $j\geqslant4$, 令

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1^j&=1A^{j-2}0^m\overline{\alpha(p)},\\
\mathbf{A}_2^j&=1A^{j-3}\overline{B}B\overline{\alpha(p)},\\
\mathbf{A}_t^j&=1A^{j-1-t}\overline{B}1^{(t-2)m}B\overline{\alpha(p)},\quad 3\leqslant t\leqslant j-1,\\
\mathbf{A}_j^j&=01^{(j-2)m}B\overline{\alpha(p)}.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

我们将证明

$$\Pi(\mathbf{A}_1^j)=\Pi(\mathbf{A}_2^j)=\cdots=\Pi(\mathbf{A}_j^j)=:z_j$$

并且 z_j 只有这 j 种 q- 展式, 从而得到 $q\in\mathcal{B}_j$. 我们使用数学归纳法证明这个事实.

首先, 验证 $j=4$ 的情形. 注意到

$$\mathbf{A}_1^4=1A^20^m\overline{\alpha(p)},\quad \mathbf{A}_2^4=1A\overline{B}B\overline{\alpha(p)},\quad \mathbf{A}_3^4=1\overline{B}1^mB\overline{\alpha(p)},\quad \mathbf{A}_4^4=01^{2m}B\overline{\alpha(p)}.$$

因为 $\beta(q)=a_1\cdots a_m^+0^\infty$, 故有 $\overline{B}B=A0^m$, 所以 $\Pi(\mathbf{A}_1^4)=\Pi(\mathbf{A}_2^4)=:z_4$. 其次,

$$\Pi(\mathbf{A}_3^4)=\Pi(1\overline{B}1^mB\overline{\alpha(p)})=\Pi(1\overline{B}(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})B\overline{\alpha(p)})=\Pi(1A\overline{B}B\overline{\alpha(p)})=\Pi(1A^20^m\overline{\alpha(p)})$$

和

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{A}_4^4)&=\Pi(01^{2m}B\overline{\alpha(p)})=\Pi(0[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})]^2B\overline{\alpha(p)})\\
&=\Pi(1\overline{a_1\cdots a_m^+}(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})B\overline{\alpha(p)})=\Pi(1A^20^m\overline{\alpha(p)}).
\end{aligned}$$

下面说明 z_4 只有上面 4 种 q- 展式. 注意到 $\sigma(\mathbf{A}_1^4)=A^20^m\overline{\alpha(p)}$, $\sigma(\overline{\mathbf{A}_3^4})=B0^m\overline{B}\alpha(p)$. 因为 $\alpha(q)=(a_1\cdots a_m)^\infty$, $\beta(q)=a_1\cdots a_m^+0^\infty$, 由引理 2.2(ii) 和 2.4(ii) 可知, 当 $0<i<m$ 时有

$$\overline{a_1\cdots a_{m-i}}\preccurlyeq a_{i+1}\cdots a_m\prec a_{i+1}\cdots a_m^+\preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i},\tag{4.11}$$

所以 $\overline{a_{i+1}\cdots a_m a_1\cdots a_i} \preccurlyeq a_1\cdots a_m$, 从而有 $\sigma^i(A^2 0^m\overline{\alpha(p)}) \prec \alpha(q)$. 同理, 当 $m \leqslant i < 2m$ 时有 $\sigma^i(A^2 0^m\overline{\alpha(p)}) \prec \alpha(q)$. 当 $2m \leqslant i$ 时, 由 $\alpha(p)$ 唯一性得到同样的结论, 因此根据引理 2.2 可知 $\sigma(\mathbf{A}_1^4)$ 是贪婪展式. 我们也可以用类似方法说明 $\sigma(\overline{\mathbf{A}_3^4})$ 是贪婪展式. 最后从 (4.11) 和 $\alpha(p)$ 唯一性可以得出 $\sigma(\mathbf{A}_4^4)$ 是唯一展式. 因此, 根据命题 4.1 和注 4.1 可得 z_4 只有上面 4 种 q- 展式, 故 $q \in \mathcal{B}_4$.

假设当 $j = r \geqslant 4$ 时, 结论成立. 当 $j = r+1$ 时, 由 (4.10) 可知

$$\mathbf{A}_{r+1}^{r+1} = 01^{(r-1)m}B\overline{\alpha(p)}.$$

注意到 $\overline{a_1\cdots a_{m-1}}1 = \overline{a_1\cdots a_m} = A$, $\overline{a_1\cdots a_{m-1}}0 = \overline{a_1\cdots a_m^+} = \overline{B}$, 观察 (4.10) 可以得到

$$\mathbf{A}_t^{r+1} = 1\overline{a_1\cdots a_{m-1}}\mathbf{A}_t^r, \quad 1 \leqslant t \leqslant r. \tag{4.12}$$

由归纳假设 $\Pi(\mathbf{A}_1) = \cdots = \Pi(\mathbf{A}_r) = \Pi(1A^{r-2}0^m\overline{\alpha(p)}) = z_r$ 及 (4.12) 可得

$$\Pi(\mathbf{A}_1^{r+1}) = \cdots = \Pi(\mathbf{A}_r^{r+1}) =: z_{r+1}.$$

另外, 因为 $\beta(q) = a_1\cdots a_m^+0^\infty$, 所以

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{A}_{r+1}^{r+1}) &= \Pi(01^{(r-1)m}B\overline{\alpha(p)}) = \Pi(0[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^+ + \overline{a_m^+})]^{r-1}B\overline{\alpha(p)}) \\ &= \Pi(1\overline{a_1\cdots a_m^+}[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^+ + \overline{a_m^+})]^{r-2}B\overline{\alpha(p)}) \\ &= \Pi(1\overline{a_1\cdots a_m}\overline{a_1\cdots a_m^+}[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^+ + \overline{a_m^+})]^{r-3}B\overline{\alpha(p)}) \\ &= \cdots \\ &= \Pi(1(\overline{a_1\cdots a_m})^{r-1}0^m\overline{\alpha(p)}) = \Pi(\mathbf{A}_1^{r+1}) = z_{r+1}.\end{aligned}$$

下面说明 z_{r+1} 只有 $\mathbf{A}_t^{r+1}$, $1 \leqslant t \leqslant r+1$ 这 $r+1$ 种 q- 展式. 注意到 $\alpha(q) = (a_1\cdots a_m)^\infty$, $\beta(q) = a_1\cdots a_m^+0^\infty$, 由引理 2.2(ii) 和 2.4(ii) 可知, 当 $0 < i < m$ 时有

$$\overline{a_1\cdots a_{m-i}} \preccurlyeq a_{i+1}\cdots a_m \prec a_{i+1}\cdots a_m^+ \preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i}, \tag{4.13}$$

所以

$$\overline{a_{i+1}\cdots a_m a_1\cdots a_i} \preccurlyeq a_1\cdots a_m.$$

于是, 当 $1 < i \leqslant (r-1)m$ 时, 有

$$\sigma^i(\mathbf{A}_1^{r+1}) = \sigma^i(1A^{r-1}0^m\overline{\alpha(p)}) \prec (a_1\cdots a_m)^\infty = \alpha(q);$$

当 $i > (r-1)m$ 时, 由 $\alpha(q)$ 唯一性同样有 $\sigma^i(\mathbf{A}_1^{r+1}) \prec \alpha(q)$. 因此 $\sigma(\mathbf{A}_1^{r+1})$ 是贪婪展式. 另外, $\sigma(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}}) = B0^{(r-2)m}\overline{B}\alpha(p) = a_1\cdots a_m^+0^{(r-2)m}\overline{a_1\cdots a_m^+}\alpha(p)$. 当 $0 < i < m$ 时有 $a_{i+1}\cdots a_m^+0^{(r-2)m} \prec \alpha_1(q)\cdots\alpha_{(r-2)m+m-i}(q)$, 即

$$\sigma^i(B0^{(r-2)m}\overline{B}\alpha(p)) = a_{i+1}\cdots a_m^+0^{(r-2)m}\overline{B}\alpha(p) \prec \alpha(q).$$

当 $m \leqslant i < (r-1)m$ 时, 显而易见有 $\sigma^i(B0^{(r-2)m}\overline{B}\alpha(p)) \prec \alpha(q)$; 当 $(r-1)m \leqslant i < rm$ 时, 由 (4.13) 得到相同的不等关系. 当 $rm \leqslant i$ 时, 同样有类似结论. 因为 $\alpha(p) \in \mathcal{U}_q'$, 所以 $\sigma(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}})$ 是贪婪展式. 最后不难验证 $\sigma(\mathbf{A}_{r+1}^{r+1})$ 是唯一展式. 因此, 由命题 4.1 和注 4.1 可知 z_{r+1} 只有上面 $r+1$ 种 q- 展式, 故 $q \in \mathcal{B}_{r+1}$. □

定理 4.1 集合 $\mathcal{V}\setminus(\{G,2\}\cup(\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}^*))\subseteq\mathcal{B}_j$, $j>3$.

证明 根据引理 4.3 和 4.4, 只需要证明 $\mathcal{V}\setminus(\overline{\mathcal{U}}\cup\{G\})\subset\mathcal{B}_j$. 设 $q\in\mathcal{V}\setminus(\overline{\mathcal{U}}\cup\{G\})$, 由引理 2.5(iii) 知存在一个词 $a_1\cdots a_m, m\geqslant 2$ 满足

$$\alpha(q)=(a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m^+})^\infty,\quad \beta(q)=a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m}0^\infty,$$

其中 $(a_1\cdots a_m)^\infty$ 满足 $\overline{(a_1\cdots a_m)^\infty}\preccurlyeq\sigma((a_1\cdots a_m)^\infty)\preccurlyeq(a_1\cdots a_m)^\infty$.

记 $A=\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m$, $B=(\overline{a_1\cdots a_m})^\infty$. 对于 $j\geqslant 4$, 令

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1^j=1(A^+)^{j-2}0^{2m}B,\\
&\mathbf{A}_2^j=1(A^+)^{j-3}A\overline{A}B,\\
&\mathbf{A}_t^j=1(A^+)^{j-1-t}A1^{2m(t-2)}\overline{A}B,\quad 3\leqslant t\leqslant j-1,\\
&\mathbf{A}_j^j=01^{2m(j-2)}\overline{A}B.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

我们将证明

$$\Pi(\mathbf{A}_1^j)=\Pi(\mathbf{A}_2^j)=\cdots=\Pi(\mathbf{A}_j^j)=:y_j$$

并且 y_j 只有这 j 种 q- 展式, 从而得到 $q\in\mathcal{B}_j$. 我们同样使用数学归纳法证明这个事实. 首先验证 $j=4$ 的情形. 注意到

$$\mathbf{A}_1^4=1(A^+)^20^{2m}B,\quad \mathbf{A}_2^4=1A^+A\overline{A}B,\quad \mathbf{A}_3^4=1A1^{2m}\overline{A}B,\quad \mathbf{A}_4^4=01^{4m}\overline{A}B.$$

因为 $\beta(q)=a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m}0^\infty=\overline{A}0^\infty$, 可以得出 $A\overline{A}=A^+0^{2m}$, 所以 $\Pi(\mathbf{A}_1^4)=\Pi(\mathbf{A}_2^4)=:y_4$. 其次,

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{A}_3^4)&=\Pi(1A1^{2m}\overline{A}B)=\Pi(1A(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m+\overline{a_m})\overline{A}B)\\
&=\Pi(1A^+A\overline{A}B)=\Pi(1(A^+)^20^{2m}B),\\
\Pi(\mathbf{A}_4^4)&=\Pi(01^{4m}\overline{A}B)=\Pi(0[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m+\overline{a_m})]^2\overline{A}B)\\
&=\Pi(1A^+A\overline{A}B)=\Pi(1(A^+)^20^{2m}B).
\end{aligned}$$

下面说明 y_4 只有上面 4 种 q- 展式. 注意到 $\sigma(\mathbf{A}_1^4)=(A^+)^20^{2m}B$, $\sigma(\overline{\mathbf{A}_3^4})=\overline{A}0^{2m}A\overline{B}$. 回顾 $\alpha(q)=(a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m^+})^\infty$, $\beta(q)=a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m}0^\infty$, 由引理 2.2(ii), 2.4(iii) 和 2.5(iii) 知, 对于每个 $0<i<m$, 有

$$\overline{a_1\cdots a_{m-i}}\preccurlyeq a_{i+1}\cdots a_m\prec a_{i+1}\cdots a_m^+\preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i}.\tag{4.15}$$

于是, 对于每个 $0<i<m$, 有

$$\begin{aligned}
&\overline{a_{i+1}\cdots a_m^+}\prec\overline{a_{i+1}\cdots a_m}\preccurlyeq a_1\cdots a_{m-i},\\
&a_{i+1}\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_i}\prec a_1\cdots a_{m-i}a_{m-i+1}\cdots a_m^+.
\end{aligned}\tag{4.16}$$

于是, 当 $0<i<4m$ 时, 有 $\sigma^i((A^+)^20^{2m}B)\prec\alpha(q)$. 当 $4m\leqslant i$ 时, 由 (4.15) 也会有 $\sigma^i((A^+)^20^{2m}B)\prec\alpha(q)$. 因此, 由引理 2.2 可知 $\sigma(\mathbf{A}_1^4)$ 是贪婪展式. 我们也可以用类似方法说明 $\sigma(\overline{\mathbf{A}_3^4})$ 是贪婪展式. 最后再次应用 (4.15) 可以得出 $\sigma(\mathbf{A}_4^4)$ 是唯一展式. 因此, 由命题 4.1 和注 4.1 可得 y_4 只有上面 4 种 q-展式, 故 $q\in\mathcal{B}_4$.

假设 $j=r\geqslant 4$ 时, 结论成立. 当 $j=r+1$ 时, 由 (4.14), 有

$$\mathbf{A}_{r+1}^{r+1}=01^{2m(r-1)}\overline{A}B.$$

注意到 $\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_{m-1}1=\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m^+=A^+$, $\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_{m-1}0=\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_m=A$, 观察 (4.14) 可以得到

$$\mathbf{A}_t^{r+1}=1\overline{a_1\cdots a_m^+}a_1\cdots a_{m-1}\mathbf{A}_t^r,\quad 1\leqslant t\leqslant r. \tag{4.17}$$

由归纳假设 $\Pi(\mathbf{A}_t^r)=y_r$ 和 (4.17) 可得

$$\Pi(\mathbf{A}_1^{r+1})=\cdots=\Pi(\mathbf{A}_r^{r+1})=:y_{r+1}.$$

此外应用 $\beta(q)=a_1\cdots a_m^+\overline{a_1\cdots a_m}0^\infty$, 可得

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{A}_{r+1}^{r+1})&=\Pi(01^{2m(r-1)}\overline{A}B)\\
&=\Pi(0[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m+\overline{a_m})]^{r-1}\overline{A}B)\\
&=\Pi(1A[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m+\overline{a_m})]^{r-2}\overline{A}B)\\
&=\Pi(1A^+A[(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m^++\overline{a_m^+})(a_1+\overline{a_1})\cdots(a_m+\overline{a_m})]^{r-3}\overline{A}B)\\
&=\cdots\\
&=\Pi(1(A^+)^{r-1}0^{2m}B)=y_{r+1}.
\end{aligned}$$

下面说明 y_{r+1} 只有上面 $r+1$ 种 q- 展式. 回顾 $\sigma(\mathbf{A}_1^{r+1})=(A^+)^{r-1}0^{2m}B$, $\sigma(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}})=\overline{A}0^{2m(r-2)}A\overline{B}$. 于是, 当 $1<i\leqslant 2m(r-1)$ 时, 由 (4.16) 有

$$\sigma^i(\mathbf{A}_1^{r+1})=\sigma^i(1(A^+)^{r-1}0^{2m}B)\prec\alpha(q);$$

当 $i>2m(r-1)$ 时, 同样可由 (4.16) 得出 $\sigma^i(\mathbf{A}_1^{r+1})\prec\alpha(q)$, 因此 $\sigma(\mathbf{A}_1^{r+1})$ 是贪婪展式. 另外, 当 $1<i\leqslant 2m$ 时, 再次应用 (4.16) 有 $\sigma^i(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}})<\alpha(q)$; 当 $2m<i$ 时, 同样有类似结论, 所以 $\sigma(\overline{\mathbf{A}_r^{r+1}})$ 是贪婪展式. 最后不难验证 $\sigma(\mathbf{A}_{r+1}^{r+1})=1^{2m(r-1)}\overline{A}B$ 是唯一展式. 因此由命题 4.1 和注 4.1 可得 y_{r+1} 只有上面 $r+1$ 种 q- 展式, 故 $q\in\mathcal{B}_{r+1}$. □

致谢　作者感谢 Vilmos Komornik 教授对文章提出的有价值的建议.

参考文献

1 Allouche J P. Théorie des nombres et automates. PhD Thesis. Bordeaux: L'Université de Bordeaux I, 1983
2 Baiocchi C, Komornik V. Greedy and quasi-greedy expansions in non-integer bases. arXiv:0710.3001, 2007
3 Baker S. On small bases which admit countably many expansions. J Number Theory, 2015, 147: 515–532
4 Baker S, Bender G. On finitely many base q expansions. arXiv:2501.09582, 2025
5 Baker S, Sidorov N. Expansions in non-integer bases: Lower order revisited. Integers, 2014, 14: 1–15
6 de Vries M, Komornik V. Unique expansions of real numbers. Adv Math, 2009, 221: 390–427
7 de Vries M, Komornik V. A two-dimensional univoque set. Fund Math, 2011, 212: 175–189
8 de Vries M, Komornik V, Loreti P. Topology of the set of univoque bases. Topology Appl, 2016, 205: 117–137
9 de Vries M, Komornik V, Loreti P. Topology of univoque sets in real base expansions. Topology Appl, 2022, 312: 108085
10 Erdős P, Horváth M, Joó I. On the uniqueness of the expansions $1=\sum_{i=1}^\infty q^{-n_i}$. Acta Math Hungar, 1991, 58: 333–342

11 Erdős P, Joó I. On the number of expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$. Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math, 1992, 35: 129–132
12 Erdős P, Joó I, Komornik V. Characterization of the unique expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ and related problems. Bull Soc Math France, 1990, 118: 377–390
13 Erdős P, Joó I, Komornik V. On the number of q-expansions. Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math, 1994, 37: 109–118
14 Glendinning P, Sidorov N. Unique representations of real numbers in non-integer bases. Math Res Lett, 2001, 8: 535–543
15 Kallós G. The structure of the univoque set in the small case. Publ Math Debrecen, 1999, 54: 153–164
16 Kallós G. The structure of the univoque set in the big case. Publ Math Debrecen, 2001, 59: 471–489
17 Kátai I, Kallós G. On the set for which 1 is univoque. Publ Math Debrecen, 2001, 58: 743–750
18 Komornik V, Kong D R. Bases in which some numbers have exactly two expansions. J Number Theory, 2019, 195: 226–268
19 Komornik V, Kong D R, Li W X. Hausdorff dimension of univoque sets and Devil's staircase. Adv Math, 2017, 305: 165–196
20 Komornik V, Loreti P. Unique developments in non-integer bases. Amer Math Monthly, 1998, 105: 636–639
21 Komornik V, Loreti P. Subexpansions, superexpansions and uniqueness properties in non-integer bases. Periodica Math Hungarica, 2002, 44: 197–218
22 Komornik V, Loreti P. On the topological structure of univoque sets. J Number Theory, 2007, 122: 157–183
23 Kong D R, Li W X. Hausdorff dimension of unique beta expansions. Nonlinearity, 2015, 28: 187–209
24 Kong D R, Li W X, Zou Y R. On small bases which admit points with two expansions. J Number Theory, 2017, 173: 100–128
25 Parry W. On the β-expansions of real numbers. Acta Math Acad Sci Hungar, 1960, 11: 401–416
26 Sidorov N. Universal β-expansions. Periodica Math Hungarica, 2003, 47: 221–231
27 Sidorov N. Expansions in non-integer bases: Lower, middle and top orders. J Number Theory, 2009, 129: 741–754
28 Sidorov N. Almost every number has a continuum of β-expansions. Amer Math Monthly, 2023, 110: 838–842
29 Sidorov N, Vershik A. Ergodic properties of the Erdős measure, the entropy of the goldenshift, and related problems. Monatsh Math, 1998, 126: 215–261
30 Zou Y R, Kong D R. On a problem of countable expansions. J Number Theory, 2016, 158: 134–150
31 Zou Y R, Wang L, Lu J, et al. On small bases for which 1 has countably many expansions. Mathematika, 2016, 62: 362–377

Bases which admit exactly n expansions

Yi Cai & Wenxia Li

Abstract Let $\mathcal{B}_n$ be the set of bases in which there exist numbers with exactly n different expansions. Sidorov (2009) first studied the set $\mathcal{B}_n$ and raised some questions for the set $\mathcal{B}_2$. Recently, Komornik and Kong (2019) further studied the set $\mathcal{B}_2$ and partially answered the questions raised by Sidorov. In the present paper, we conduct further research on the set $\mathcal{B}_n$, $n \geqslant 3$.

Keywords q**-expansion, unique** q**-expansion, greedy** q**-expansion, quasi-greedy** q**-expansion**

MSC(2020) 11A63, 37F20, 37B10

doi: 10.1360/SSM-2025-0029