数学分析（ I ）短课程 [Part 2]

自然数、整数和有理数

孙 伟

华东师范大学数学系算子代数中心

Week 2 to 18. Fall 2014

3. 自然数理论初步

我们给出了自然数的严格定义（Peano公理）并据此定义了自然数上的加法、乘法、带余除法等。我们也引入了自然数的序关系，从而可以比较两个自然数的大小（进而可以有“两个自然数之间距离”的概念）。作为自然数定义和基本性质的应用，我们1：证明了高中的数学归纳法的正确性；2：给出了基于自然数的“有限集”和“无限集”的定义（并证明在假定选择公理的前提下，该定义和前面完全基于集合论的定义相容）。

什么是自然数？

按照高中(或者更早至于初中乃至小学）数学的说法，自然数就是 $0, 1, 2, 3, \cdots$，其上有序关系（小于，大于，等于），有加法、减法、乘法和带余除法。直观的看来，分别对应着“没有、一个、比一个多一个、比（一个多一个）更多一个、$\cdots$”。抽象的说，自然数就是从起点开始，一个接着一个排下去得到的。

问题：如何用严格的数学语言给出自然数的定义？如何定义其上的序关系、加减法、乘法、带余除法等？

Peano公理

意大利数学家Peano用如下的五条公理（Peano公理）完全刻画了自然数集（记为 $\mathbb{N}$）。

1) $0 \in \mathbb{N}$

2) 存在一个后继映射（Next）$^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

3) 不存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n^+ = 0$

4) $^+$ 是单射。换言之，如果存在 $m, n \in \mathbb{N}$，满足 $m^+ = n^+$，则 $m = n$

5) 如果有 $\mathbb{N}$ 的子集 D，满足 $0 \in D$ 且对于任意的 $n \in D$ 都有 $n^+ \in D$，则 $D = \mathbb{N}$

注： 大略的说，上述的Peano公理将自然数定义为从 0 开始的单向有序链。

Peano公理

注：Peano公理中的5)也被称为归纳公理。

问题：为什么我们可以使用数学归纳法（基于自然数的）？换言之，为了证明对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有性质 $P(n)$ 成立，我们只需要证明 $P(0)$ 成立，且“如果 $P(n)$ 成立，则 $P(n+1)$ 也成立“。为什么可以这样使用归纳法？

问题：在 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 中，将 $^{+}$ 映射定义为 $+1$ 映射，逐条检验上面的Peano公理，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别不满足Peano公理的哪一条（或者哪几条）？

Peano公理

定理：对于任意自然数 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $n \neq n^+$。

证明：设 $M = \{n \in \mathbb{N} : n \neq n^+\}$。根据Peano公理（第几条?），$0 \in M$。如果 $n \in M$，我们来证明 $n^+ \in M$。

事实上，如果 $n \in M$，则 $n \neq n^+$。如果 $n^+ \notin M$，则 $n^+ = (n^+)^+$。根据Peano公理（第几条?），我们有 $n = n^+$，矛盾。故如果 $n \in M$，则 $n^+ \in M$。

根据Peano公理中的归纳公理，$M = \mathbb{N}$。证毕。□

Peano公理

定理：对于任意自然数 $n \in \mathbb{N}$，如果 $n \neq 0$，则存在唯一的 $m \in \mathbb{N}$，满足 $n = m^+$。

证明：根据Peano公理中的4)，我们可以得到 m 的唯一性。下面来证明 m 的存在性。

设 $M = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}$，满足$n = k^+\}$。则 $0 \in M$。如果 $n \in M$，则 $n^+ \in M$（为什么？）。根据Peano公理中的归纳公理，我们有 $M = \mathbb{N}$。证毕。$\square$

集合方式定义的自然数

正如本课程之前提到过的，我们可以用集合论的方法来给出如下的一列集合（von Neumann之方法）：

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \cdots$$

证明这样定义的集合满足Peano公理。

提示：需要先定义 0 和后继映射 $^+$。关键是第五条公理。

问题：通过上面的讨论，我们知道，满足Peano公理体系的集合未必是唯一的。但是为什么我们可以用一个符号 $\mathbb{N}$ 来代表自然数呢？换言之，如何理解自然数集的"唯一性"？

自然数集的“唯一性”

定理： 如果集合 A 和集合 B 都满足Peano公理，其中 A 上的“起始元”和“后继映射”记为 0_A 和 $^{+_A}$，B上的“起始元”和“后继映射”记为 0_B 和 $^{+_B}$。则存在映射 $f: A \to B$，满足

1) $f(0_A) = 0_B$.
2) f 是双射
3) $\forall a \in A,\ f(a^{+_A}) = (f(a))^{+_B}$。换言之，我们有如下关于映射的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "+_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "+_B"'] & B \end{tikzcd}$$

自然数集的“唯一性”

注：一般的，数学对象就是集合加上其上的结构（比如序关系，运算等等）。例如，从Peano公理的角度来看，自然数就是一个集合（不难证明该集合是无限的）加上其上的“后继”结构（其他结构，比如加法、乘法、带余除法、序结构等都可以由“后继”结构派生出来）。如果存在两个数学对象间的双射，并且该双射与两个数学对象上的结构是相容的（具体的，参看前面定理中关于映射的交换图），我们就可以把这两个数学对象认为是等价的，从而看作一个对象。

练习：证明满足Peano公理的集合一定是无限集。

自然数集上的加法

定义：定义自然数的加法为一个 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射 f，满足 $f(m,0)=m$ 且 $f(m,n^+)=f(m,n)^+$。对于 $f(m,n)$，一般记为 $m+n$。

我们需要说明上述定义是良性的 (well-defined)。换言之，需要说明 $f(m,0)=m$ 和 $f(m,n^+)=f(m,n)^+$ 这两条性质完全决定了映射 $f\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$。

给定 $m\in\mathbb{N}$，考虑集合

$$D=\{n\in\mathbb{N}\colon f(m,n)\text{按照上面定义可以给出}\}$$

由于 $f(m,0)$ 定义为 m，我们有 $0\in D$。假设 $n\in D$，也就是 $f(m,n)$ 是有定义的，则按照定义

自然数集上的加法

$f(m,n^+) = f(m,n)^+$ ，从而也是有定义的。根据归纳公理，我们有 $D = \mathbb{N}$ 。从而上面的定义 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是良性定义的（well-defined）。

下面我们来说明这样定义的自然数上加法，其行为和我们熟悉的加法是一致的。

我们先来证明自然数上加法的结合律。

定理 [加法结合律]: 对于任意自然数 m 、n 和 k ，我们有

$$(m+n)+k = m+(n+k)。$$

自然数集上的加法

证明：我们对 k 做归纳 (根据Peano公理中的归纳公理) 。令

$$D = \{k \in \mathbb{N}: (m+n)+k = m+(n+k)\ ,\ \forall m,n \in \mathbb{N}\}。$$

注意到

$$\begin{aligned} (m+n)+0 &= m+n & [x+0 = x\ ,\ \forall x \in \mathbb{N}] \\ &= m+(n+0) & [x+0 = x\ ,\ \forall x \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

我们有 $0 \in D$ 。
假定 $k \in D$。换言之,

$$(m+n)+k = m+(n+k)\ ,\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ 。$$

则

自然数集上的加法

$$
\begin{aligned}
(m+n)+k^+ &= ((m+n)+k)^+ && [\text{加法之定义}] \\
&= (m+(n+k))^+ && [\text{归纳假设 } k \in D] \\
&= m+(n+k)^+ && [\text{加法之定义}] \\
&= m+(n+k^+) && [\text{加法之定义}]
\end{aligned}
$$

从而 $k^+ \in D$ 。故 $D = \mathbb{N}$ ，加法结合律证毕。 $\square$

下面我们来证明自然数上加法的交换律。为此，我们先证明两个引理。

引理： 对于任意自然数 m 和 n ，我们有 $m^+ + n = m + n^+$ 。

自然数集上的加法

证明：我们对 n 做归纳。

$n=0$ 时，对于任意 $m\in\mathbb{N}$， 根据加法之定义，$m^{+}+0=m^{+}$，而 $m+0^{+}=(m+0)^{+}=m^{+}$，故 $n=0$ 时，引理中等式对任意 $m\in\mathbb{N}$ 都成立。

假定 $n=k$ 时，有 $m^{+}+k=m+k^{+}$ $\forall m\in\mathbb{N}$，则

$$\begin{aligned}
m^{+}+k^{+} &= (m^{+}+k)^{+} && \text{[加法之定义]}\\
&= (m+k^{+})^{+} && \text{[归纳假设]}\\
&= m+(k^{+})^{+} && \text{[加法之定义]}
\end{aligned}$$

因此对于任意 $m,n\in\mathbb{N}$，有 $m^{+}+n=m+n^{+}$，证毕。$\square$

自然数集上的加法

注：如果我们用 1 来表示 0^+ ，用 2 来表示$(0^+)^+$ ，则根据加法的定义和上面的引理，我们可以证明 $1+1=2$ 。具体证明细节如下：

$$
\begin{aligned}
1+1 &= 0^+ + 0^+ && [1\text{代表}\,0^+] \\
&= (0^+)^+ + 0 && [m^+ + n = m + n^+,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}] \\
&= 2 + 0 && [2\text{代表}\,(0^+)^+] \\
&= 2 && [\text{加法之定义}]
\end{aligned}
$$

注：为了证明 $1+1=2$ ，也可以不用上面的引理，直接使用加法的定义。试完成之。

自然数集上的加法

下面的引理，是证明加法交换律时归纳的起点。

引理：对于任意自然数 n，$0+n=n+0=n$。

证明：根据加法的定义，我们始终有 $n+0=n$，$\forall n\in\mathbb{N}$。因此只需要证明 $0+n=n+0$ 即可。我们对 n 做归纳。令

$$D=\{n\colon 0+n=n+0\}$$

由于 $0+0=0+0$，$0\in D$。
假定 $k\in D$，换言之，

$$0+k=k+0\ 。$$

则

自然数集上的加法

$$
\begin{aligned}
0 + k^+ &= (0 + k)^+ && [\text{加法之定义}] \\
&= (k + 0)^+ && [k \in D] \\
&= k^+ && [n + 0 = n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}] \\
&= k^+ + 0 && [n + 0 = n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}]
\end{aligned}
$$

从而若 $k \in D$，则 $k^+ \in D$。因此 $D = \mathbb{N}$，证毕。

□

下面我们来证明加法之交换律。

定理 [加法交换律]: 对于任意自然数 m 和 n，我们有 $m + n = n + m$。

自然数集上的加法

证明： 令 $D = \{m \in \mathbb{N} : m + n = n + m, \forall n \in \mathbb{N}\}$ 。根据上面的引理，$0 \in D$ 。

假定$k \in D$。也就是 $k + n = n + k$， $\forall n \in \mathbb{N}$。则 $\forall n \in \mathbb{N}$，我们有

$$
\begin{aligned}
k^+ + n &= k + n^+ && [m^+ + n = m + n^+, \forall m, n \in \mathbb{N}] \\
&= (k + n)^+ && [\text{加法之定义}] \\
&= (n + k)^+ && [\text{归纳假设}\ k \in D] \\
&= n + k^+ && [\text{加法之定义}]
\end{aligned}
$$

从而得到 $k^+ \in D$ 。故而 $D = \mathbb{N}$，从而加法交换律成立。证毕。 $\square$

自然数集上的加法

自然数上的加法是满足消去律 (the law of cancellation) 的。

定理 [加法消去率]: 对于自然数 m、n 和 k，如果 $m+k=n+k$，则 $m=n$。

注： 该定理证明也是通过归纳。比如我们对 k 进行归纳。当 $k=0$ 时先证明消去律成立。然后假定 $k=p$ 时消去律成立。注意到

$$m+p^{+}=(m+p)^{+} \quad \text{且} \quad n+p^{+}=(n+p)^{+}。$$

利用 $^{+}$ 是单射和归纳假设 ($k=p$ 时消去律成立)，我们不难完成本证明。具体细节留作练习。

自然数集上的乘法

定义： 定义自然数的乘法为一个 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射 g，满足 $\mathsf{g}(\mathsf{m},0)=0$ 且 $\mathsf{g}(\mathsf{m},\mathsf{n}^{+})=\mathsf{g}(\mathsf{m},\mathsf{n})+\mathsf{m}$，$\forall \mathsf{m},\mathsf{n}\in\mathbb{N}$。对于 $\mathsf{g}(\mathsf{m},\mathsf{n})$，一般记为 $\mathsf{m}\cdot\mathsf{n}$，或者 mn。

注： 类似于加法的情况，我们需要检查这个乘法的定义（一个从 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射）是良性定义的（well-defined）。这个过程和加法的比较类似，在此作为练习。

我们先来证明乘法和加法之间的分配律。

自然数集上的乘法

定理 [乘法分配律]: 对于任意自然数 m 、n 和 k ，我们有

$$\mathsf{m}\cdot(\mathsf{n}+\mathsf{k})=\mathsf{m}\cdot\mathsf{n}+\mathsf{m}\cdot\mathsf{k}。$$

证明：令

$$\mathsf{D}=\{\mathsf{k}\colon \mathsf{m}\cdot(\mathsf{n}+\mathsf{k})=\mathsf{m}\cdot\mathsf{n}+\mathsf{m}\cdot\mathsf{k}\quad \forall \mathsf{m},\mathsf{n}\in\mathbb{N}\}。$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathsf{m}\cdot(\mathsf{n}+0)&=\mathsf{m}\cdot\mathsf{n} &&[\text{加法之定义}]\\&=\mathsf{m}\cdot\mathsf{n}+0 &&[\text{加法之定义}]\\&=\mathsf{m}\cdot\mathsf{n}+\mathsf{m}\cdot 0 &&[\text{乘法之定义}]\end{aligned}$$

我们有 $0\in\mathsf{D}$ 。

自然数集上的乘法

假定 $p \in D$，注意到

$$
\begin{aligned}
m\cdot(n+p^+) &= m\cdot(n+p)^+ && [\text{加法之定义}]\\
&= m\cdot(n+p)+m && [\text{乘法之定义}]\\
&= (m\cdot n+m\cdot p)+m && [\text{归纳假设 } p\in D]\\
&= m\cdot n+(m\cdot p+m) && [\text{加法结合律}]\\
&= m\cdot n+m\cdot p^+ && [\text{乘法之定义}]
\end{aligned}
$$

我们有 $p^+ \in D$。根据归纳公理，$D = \mathbb{N}$，从而分配律证毕。 $\square$

自然数集上的乘法

下面我们来证明自然数乘法本身的交换律。为了使得证明连贯，我们没有专门把其中用到的中间结论作为引理给出，而是作为证明中的断言给出。

定理 [乘法交换律]: 对于任意自然数 m 和 n，我们有 $m \cdot n = n \cdot m$。

证明： 令

$$D = \{n \in \mathbb{N} : mn = nm \, \forall m \in \mathbb{N}\}\text{。}$$

断言1: $0 \in D$。

自然数集上的乘法

断言1之证明：令

$$E = \{m \in \mathbb{N}: m \cdot 0 = 0 \cdot m\}。$$

则 $0 \in E$ （因为 $0 \cdot 0 = \cdots 0 = 0$ ）。
假定 $m \in E$。换言之，$m \cdot 0 = 0 \cdot m$。我们需要证明 $m^+ \cdot 0 = 0 \cdot m^+$ 。
事实上，根据乘法之定义，有 $m^+ \cdot 0 = 0$ 。注意到

$$\begin{aligned}
0 \cdot m^+ &= 0 \cdot m + 0 && [\text{乘法之定义}] \\
&= m \cdot 0 + 0 && [\text{归纳假设} m \in E] \\
&= 0 + 0 && [\text{乘法之定义}] \\
&= 0 && [\text{加法之定义}]
\end{aligned}$$

自然数集上的乘法

我们得到“如果 $m \in E$，则 $m^+ \in E$”。根据归纳原理，$E = \mathbb{N}$。从而断言1得证。

基于断言1，我们知道 $0 \in D$。下面我们来证明“如果 $n \in D$，则 $n^+ \in D$。”

换言之，如果 $mn = nm \quad \forall m \in \mathbb{N}$，则

$$mn^+ = n^+m \ \forall \in \mathbb{N}。$$

断言2: $\forall m, n \in \mathbb{N}$，$n^+m = nm + m$。

断言2之证明: 我们对 m 使用归纳。

当 $m = 0$ 的时候，根据乘法的定义，有$n^+ \cdot 0 = 0$。同时注意到

自然数集上的乘法

$$\begin{aligned} n \cdot 0 + 0 &= 0 + 0 && \text{[乘法之定义]} \\ &= 0 && \text{[加法之定义]} \end{aligned}$$

故 $n^+ \cdot 0 = n \cdot 0 + 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 。

假定存在固定的 $m \in \mathbb{N}$ ，使得

$$n^+ m = nm + m \ \ \forall m \in \mathbb{N} \text{ 。}$$

我们来证明

$$n^+ m^+ = nm^+ + m^+ \ \ \forall m \in \mathbb{N} \text{ 。}$$

事实上，我们有

自然数集上的乘法

$$\begin{aligned} n^+m^+ &= n^+m + n^+ && [\text{乘法之定义}] \\ &= (nm + m) + n^+ && [\text{归纳假设}] \\ &= nm + (m + n^+) && [\text{加法结合律}] \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} nm^+ + m^+ &= (nm + n) + m^+ && [\text{乘法之定义}] \\ &= nm + (n + m^+) && [\text{加法结合律}] \\ &= nm + (m^+ + n) && [\text{加法交换律}] \\ &= nm + (m + n^+) && [m^+ + n = m + n^+] \end{aligned}$$

我们有

$$n^+m^+ = nm^+ + m^+ \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ 。}$$

自然数集上的乘法

从而断言2得证。

基于上述断言，我们来完成自然数乘法交换律的证明。

前面已经有$0 \in D$。只需要证明

“如果 $n \in D$，则 $n^+ \in D$。”

换言之，如果 $mn = nm \quad \forall m \in \mathbb{N}$，则需证明

$$mn^+ = n^+m \ \ \forall m \in \mathbb{N}。$$

事实上，

自然数集上的乘法

$$
\begin{aligned}
n^+m &= nm + m & [\text{断言}2] \\
&= mn + m & [\text{归纳假设}] \\
&= mn^+ & [\text{乘法之定义}]
\end{aligned}
$$

故自然数乘法之交换律得证。 $\square$

关于自然数的乘法，我们还有如下的结合律。

定理 [乘法结合律]: 对于任意自然数 m 、 n 和 k，我们有 $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$ 。

注： 自然数乘法结合律证明较简单，这里作为练习。

自然数集上的乘法

自然数的乘法也是满足消去律的（消去非零元）。

定理 [乘法消去律]: 对于任意自然数 m、n 和 k, 假定 $k \neq 0$。如果 $m \cdot k = n \cdot k$, 则 $m = n$。

练习: 证明上述关于自然数的乘法消去律。（提示: 事实上，只需要证明如下: “对于任意 $m, k \in \mathbb{N}$，如果 $k \neq 0$ 且 $m \cdot k = 0$，则 $m = 0$。”）

自然数上的序关系

基于自然数的Peano公理体系中的后继映射，我们可以自然的定义自然数上的序关系如下:

定义：对于 $m, n \in \mathbb{N}$，如果存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $n = m + k$，则称 $m \leq n$。或者等价的，记为 $n \geq m$。

定义：对于 $m, n \in \mathbb{N}$，$m \leq n$ 且 $m \neq n$，则称 $m < n$。或者等价的，$n > m$。

下面，我们给出一般集合上关系和序关系的定义（更详细的定义，参看“分析基础”）。

集合上的关系和序关系

定义：集合 X 上的关系 R 定义为 $X \times X$ 的一个子集。$\forall x, y \in X$，如果 $(x, y) \in R$，则称 xRy。

定义：对于集合 X 和其上的关系 R，我们说 R 是个序（偏序）关系，如果

i) xRx，$\forall x \in R$ [自反性]

ii) 若 xRy 且 yRz，则 xRz [传递性]

iii) 若 xRy 且 yRx，则 $x = y$ [反对称性]

若 R 是 X 上之序（偏序）关系，也可以记为 $x \leq_R y$。在不引起歧义的情况下，可以简记为 $x \leq y$。

集合上的关系和序关系

注：根据定义，并不是任何关系都是序关系的。

定义 [全序关系]：给定集合 X 和其上的序（偏序）关系 R，我们说 R 是个全序（关系），如果对于任意的 $x, y \in X$，有 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$。这里的“或者”为“非互斥或”（non-exclusive or）。若 R 为 X 上的全序（关系），则称 (X, R) 是个全序集。

例：考虑实数集 $\mathbb{R}$，其上的序关系如此定义：$x \leq y$ 当且仅当 $x - y \leq 0$。则 $(\mathbb{R}, \leq)$ 是个全序集。

例：给定非空集 X，在 $\mathcal{P}(X)$ 上定义 $\leq$ 如下：对于 $a, b \in \mathcal{P}(x)$，$a \leq b$ 当且仅当 $a \subset b$。则可以验证 $(\mathcal{P}(X), \leq)$ 是个序（偏序）关系，但不是全序关系。

集合上的关系和序关系

定义 [最小元素]: 给定集合 X 和其上的序（偏序）关系 R，对于任意的 $D \subset X$，如果存在 $x \in D$，满足 $x \leq y\ \forall y \in D$，则称 x 为 D 中的最小元（least element）。

注: 对于偏序集 X 和其子集 D，D 上的最小元未必存在（为什么？）。但是如果 D 上最小元存在，则该最小元一定是唯一的（为什么？）。

练习: 如果偏序集 $(X, \leq)$ 的子集 D 中存在最小元，证明该最小元必唯一。(证明需要用到偏序关系的反对称性)

集合上的关系和序关系

定义[良序关系]: 给定集合 X 和其上的序（偏序）关系 R，我们说 R 是个良序（关系），如果对于任意非空集 $D \subset X$，D 中一定存在最小元素（least element）。换言之，一定存在 $x \in D$，满足 $x \leq y$ $\forall y \in D$。若 R 为 X 上的良序（关系），则称 (X, R) 是个良序集。

练习: 如果偏序集 $(X, \leq)$ 是良序集，则 $(X, \leq)$ 一定是全序集。（**提示:** 对于任意 $a, b \in X$，考虑 X 的子集 $\{a, b\}$。根据良序集的定义，$\cdots$）

自然数上的序关系

根据上述集合上序（偏序）关系和全序关系的定义，可以直接验证我们定义的 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是个序（偏序）关系，也是个全序关系。

练习： 证明上述定义的 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是个全序关系。

练习： 证明上述定义的 $\mathbb{N}$ 上之序关系满足三歧律。换言之，对于任意两个自然数 m 和 n，下面三种情况有且仅有一种成立

i) $m < n$

ii) $m = n$

iii) $m > n$

自然数上的序关系

关于自然数上序关系，一个非常重要的性质就是良序性。

定理 [自然数的序关系是良序]: 上述定义的 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是个良序集。换言之，对于任意非空 $D \subset \mathbb{N}$，存在 D 中的最小元。

证明：
考虑集合

$$E = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\ ,\ \forall n \in D\}.$$

由于 $n = 0 + n \quad \forall n \in D$，故 $0 \leq n$。从而 $0 \in E$。

断言: $E \cap D \neq \varnothing$.

自然数上的序关系

断言之证明: 如若不然，则 $E \cap D = \varnothing$ 。换言之，对于 E 中任何元素 k，均有 $k < n, \forall n \in D$ 。基于此，我们来证明 $E = \mathbb{N}$，从而得到矛盾。
我们已经知道 $0 \in E$ 。假定 $k \in E$，我们来证明 $k^+ \in E$ 。事实上，对于任意的 $n \in D$，由于 k 在 E 中且 $E \cap D = \varnothing$，我们有 $k < n$ 。换言之，$k \leq n$ 且 $k \neq n$ 。等价的，我们有 $n = k + s$ 且 $s \neq 0$。由于 $s \neq 0$，存在 $j \in \mathbb{N}$，使得 $s = j^+$ 。故

$$n = k + s = k + j^+ = k^+ + j.$$

从而 $k^+ \leq n$ 。由于 n 的任意性，我们有 $k^+ \in E$ 。根据归纳公理，我们得到 $E = \mathbb{N}$ 。

自然数上的序关系

由于 $D \neq \varnothing$，我们可以取 D 中元素 n。注意到 $E = \mathbb{N}$，我们有 $k \leq n, \forall k \in \mathbb{N}$。故而 $n^+ \leq n$。换言之，

$$n = n^+ + k = n + k^+ 。$$

根据加法之消去律，我们得到 $0 = k^+$，这与Peano公理中的“0不是任何元素的后继”矛盾。从而断言得证。根据断言，我们知道存在 m，使得 $m \in D$ 并且 $m \leq n, \forall n \in D$。$\square$

自然数上的带余除法

基于上述的自然数 $\mathbb{N}$ 上的序结构和乘法结构，我们可以定义自然数上的带余除法。

定理 [自然数的阿基米德性]：对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，一定存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $m \le n \cdot k$ 。

证明：由于$n \in \mathbb{N} - \{0\}$，存在 $p \in \mathbb{N}$，使得 $n = p^+$。对于任意的 $m \in \mathbb{N}$ ，取 $k = m$，则

$$\begin{aligned} n \cdot k &= n \cdot m \\ &= m \cdot n \\ &= m \cdot p^+ \\ &= m \cdot p + m \end{aligned}$$

自然数上的带余除法

根据 $\leq$ 之定义，我们有 $m \leq n \cdot k$ 。 $\square$

基于上述的定理，我们有如下定理 (自然数的欧几里得性)

定理 [自然数的欧几里得性]： 对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，存在唯一的 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$n \cdot k \leq m < n \cdot (k+1)$$

，其中 1 定义为 0^+ 。

证明： 我们先证 k 的唯一性，然后证 k 的存在性。

自然数上的带余除法

“唯一性”

假定我们有

$$n \cdot k_i \leq m < n \cdot (k_i + 1) \ , \ i = 1, 2$$

并且 $k_1 \neq k_2$ 。我们来推出矛盾。

由于 $k_1 \neq k_2$ ，根据自然数上序关系的三歧律 (trichotomy) ，必有 $k_1 < k_2$ 或者 $k_1 > k_2$ 。我们不妨设 $k_1 < k_2$ (为什么可以不妨这样假设？) 。则 $k_1^+ \leq k_2$ (这是作业五中的某一小题) 。注意到 $k_1^+ = k_1 + 1$ (为什么？) ，我们有 $k_1 + 1 \leq k_2$ 。

自然数上的带余除法

断言1：如果自然数 m 和 n 满足 $m \leq n$，则对于任意自然数 p，有 $m \cdot p \leq n \cdot p$ 。

断言1之证明：根据定义，不难证明。这里留作练习。

根据上面的断言，注意到 $k_1 + 1 \leq k_2$ ，我们有 $n \cdot (k_1 + 1) \leq n \cdot k_2$ 。由于 $m < n \cdot (k_1 + 1)$ ，我们有

$$m < n \cdot (k_1 + 1) \leq n \cdot k_2。$$

断言2：对于自然数 m 、n 和 p ，如果 $m < n$ 且 $n \leq p$，则 $m < p$ 。

断言2之证明：练习。

自然数上的带余除法

根据断言2，注意到 $m < n \cdot (k_1 + 1) \leq n \cdot k_2$ ， 我们有

$$m < n \cdot k_2 \ 。$$

根据题设， 我们有

$$m \geq n \cdot k_2 \ 。$$

$m < n \cdot k_2$ 和 $m \geq n \cdot k_2$ 同时成立是违背了自然数序关系的三歧律的， 矛盾。
至此， 我们证明了定理中 k 的唯一性。

“存在性”

对于题设中 m ， 根据 定理 [自然数阿基米德性],

自然数上的带余除法

存在 $p \in \mathbb{N}$，使得

$$m + 1 \le n \cdot p \text{ 。}$$

令

$$D = \{p \in \mathbb{N} : m + 1 \le n \cdot p\} \text{ 。}$$

则 $D \ne \varnothing$ 。根据自然数的良序性，存在 D 中的最小元素。换言之，存在 $q \in D$，满足 $q \le p$，$\forall p \in D$ 。

我们可以断言上述的 q 不为零。否则有 $m + 1 \le 0$ 。注意到 $0 \le m + 1$，我们有 $m + 1 = 0$。换言之，$m^+ = 0$ 。这与Peano公理矛盾。

自然数上的带余除法

由于 $q \neq 0$，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $q = k^+ = k+1$。故而我们有

$$m+1 \leq n \cdot (k+1) \text{。}$$

注意到 $m < m+1 \leq n \cdot (k+1)$，根据断言2，我们有

$$m < n \cdot (k+1) \text{。}$$

下面我们来证明 $n \cdot k \leq m$。该证明需要用到 q 是 D 中最小元素这个事实。

我们先证明 $n \cdot k < m+1$。如这个不成立，根据自然数序关系的三歧律，必然有

$$m+1 \leq n \cdot k \text{。}$$

考虑 D 的定义，我们有 $k \in D$。由于 q 是 D 中最

自然数上的带余除法

小元素，故而 $q \leq k$。注意到 $q = k^+$，我们有 $k^+ \leq k$。根据定义，$k^+ = (k+0)^+ = k + 0^+$，故而 $k \leq k^+$。又由于 $0^+ \neq 0$，我们有 $k \neq k^+$。故而得到 $k < k^+$。

现在我们同时有 $k^+ \leq k$ 和 $k < k^+$，和自然数序关系之三歧律矛盾。故而 $n \cdot k < m + 1$。

现在我们有 $n \cdot k < m + 1$，我们来证明 $n \cdot k \leq m$。事实上，由于 $n \cdot k < m + 1$，有 $n \cdot k \leq m + 1$ 且 $n \cdot k \neq m + 1$。根据作业五题2之ix)，我们有 $n \cdot k + 1 \leq m + 1$。换言之，存在 $s \in \mathbb{N}$，使得

$$m + 1 = n \cdot k + 1 + s \text{。}$$

自然数上的带余除法

根据加法之交换律和消去律，可得 $m = n \cdot k + s$ ，故而

$$m \geq n \cdot k \text{ 。}$$

至此，我们证明了 $n \cdot k \leq m$ 且 $m < n \cdot (k+1)$，故

$$n \cdot k \leq m < n \cdot (k+1) \text{ 。}$$

证毕。□

基于上述自然数的欧几里得性，我们可以定义 $\mathbb{N}$ 上的带余除法如下:

自然数上的带余除法

定义： 对于任意自然数 $m \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，一定存在唯一的自然数对 (q, r)，使得 $m = n \cdot q + r$，其中 $0 \le r < n$。这里的 q 称为 m 除以（带余除法）n 的商（quotient），r 称为 m 除以（带余除法）n 的余数（remainder）。

注： 上面的定理“自然数的欧几里得性”确保了上述带余除法的定义是 well-defined。换言之，对于任意自然数 $m \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，上述 q 和 r 是存在并且唯一的。

带余除法之应用：自然数上的辗转相除法

定义 [辗转相除法]: 给定非零自然数 m 和 n，我们可以进行如下的操作。令 $r_0 = m$ 且 $r_1 = n$。由带余除法，有 $r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$。若 $r_2 = 0$，则停止。否则，由带余除法，$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$。若 $r_3 = 0$，则停止。否则，。。。

注: 注意到如下大小关系

$$r_1 > r_2 > r_3 > \cdots \geq 0 \text{。}$$

不难证明上述操作有限步后一定停止于某个 $r_s = 0$。

整除和素数

定义 [整除]: 给定自然数 m 和 n，其中 $n \neq 0$。如果带余除法 $m = n \cdot q + r$ 中 $r = 0$，则称 n 整除 m，记为 $n|m$。这时 这里 n 和 q 被称为是 m 的因子 (factor)。

为了简单起见，我们用 1 来作为 0^+ 的记号。

定义 [素数/质数]: 我们说自然数 n 是素数 (prime number)，如果 $n > 1$ 且 n 的所有因子只能是 n 和 1。否则，我们说 n 是合数 (composite number)。

最大公因子（greatest common divisor, or just gcd）

定义 [最大公因子]: 给定非零的自然数 m 和 n，我们说 k 是 m 和 n 的公因子，如果 k 即是 m 的因子，也是 n 的因子。我们说 k 是 m 和 n 的最大公因子，如果 k 是所有公因子中最大的。m 和 n 的最大公因子记为 gcd(m, n)，或者简记为 (m, n)。

问题：给定两个非零自然数，为什么它们的公因子存在？为什么它们的最大公因子存在？为什么最大公因子是唯一的？

最大公因子（greatest common divisor, or just gcd）

练习： 给定两个非零自然数 m 和 n，做带余除法 $m = nq + r$。证明：如果 $r \neq 0$，则正整数 k 是 m 和 n 的公因子，当且仅当 k 是 n 和 r 的公因子。（**提示：** 为了简化论述，可以使用后面关于 $\mathbb{Z}$ 的定义和性质）

定理： 对于非零自然数 m 和 n，若辗转相除在有限步后停止于 $r_s = 0$，则 $\gcd(m, n) = r_{s-1}$。

4. 整数和有理数

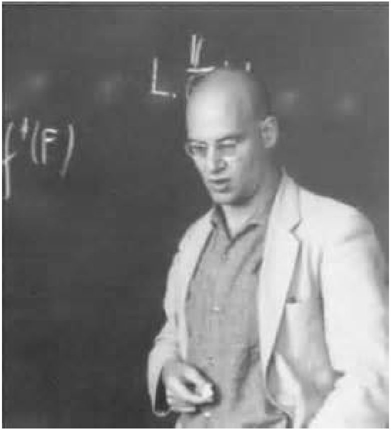
基于自然数 $\mathbb{N}$ 的定义和其上的结构，通过对 $\mathbb{N}$ 关于加法做Grothendieck化，我们得到整数 $\mathbb{Z}$ 。并且，我们可以将 $\mathbb{N}$ 上的结构（序关系，加法，乘法等）自然的扩展到 $\mathbb{Z}$ 上。通过对 $\mathbb{Z}$ 关于乘法做Grothendieck化，我们得到有理数 $\mathbb{Q}$ 。我们在 $\mathbb{Q}$ 上也可以自然的（换言之，符合高中学到过的有理数大小比较关系）引入序关系，并且基于此定义了有理数 $\mathbb{Q}$ 上的距离结构。

整数 $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{N}, +)$ 的Grothendieck化

我们已经了解了基于Peano公理的自然数定义及其上的一些性质。下面我们试图给出整数的定义。为了定义 -1 ，一个自然的想法就是考虑 $0-1$ 。但是这里有个问题，如果 $m \geq n$ ，我们可以定义 $m-n$ 为唯一满足 $m=n+k$ 的自然数。但是如果 $m<n$ ，这种定义方式就失效了。这里的关键问题在于若 $m<n$ ，则所谓的 $m-n$ 不在 $\mathbb{N}$ 当中。

解决这个问题的一种方法就是，在更广的，更抽象的框架下定义所谓的减法。并且最终所定义的减法和 $m \geq n$ 时可以基于 $\mathbb{N}$ 直接定义的 $m-n$ 是相容的。这就是上周四（2014年11月13日）去世的A. Grothendieck提出的“半群Grothendieck化”的思想。

整数 $\mathbb{Z}$：$(\mathbb{N}, +)$ 的Grothendieck化



Alexander Grothendieck
(1928.3.28 – 2014.11.13)

整数 $\mathbb{Z}$：$(\mathbb{N}, +)$ 的Grothendieck化

为了得到整数，我们考虑如下的自然数对 $[m, n]$。这里记为 $[m, n]$，而不是 (m, n)，因为 (m, n) 代表 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的元素，而我们这里的 $[m, n]$ 并不是在 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的。事实上，这里的 $[m, n]$ 代表一个等价类。具体的说，我们有

$$[m, n] = [m', n'] \text{ 当且仅当 } m + n' = m' + n \text{。}$$

为了定义等价，我们用到是自然数 $\mathbb{N}$ 上的加法。可以直接验证，上述的“等价”关系满足自反性和传递性。换言之，

$$[m, n] = [m, n]$$

整数 $\mathbb{Z}$：$(\mathbb{N},+)$ 的Grothendieck化

如果 $[\mathsf{m}_1,\mathsf{n}_1]=[\mathsf{m}_2,\mathsf{n}_2]$ 且 $[\mathsf{m}_2,\mathsf{n}_2]=[\mathsf{m}_3,\mathsf{n}_3]$ ，则

$$[\mathsf{m}_1,\mathsf{n}_1]=[\mathsf{m}_3,\mathsf{n}_3] \quad \text{(为什么？)}$$

注：根据上述的定义，$[0,2]=[1,3]=[101,103]$ 。

定义 [整数$\mathbb{Z}$]：上述定义的 $[\mathsf{m},\mathsf{n}]$ 全体，记为整数集合 $\mathbb{Z}$ 。换言之，

$$\mathbb{Z}=\{[\mathsf{m},\mathsf{n}]:\mathsf{m},\mathsf{n}\in\mathbb{N}\} \text{。}$$

整数 $\mathbb{Z}$：$(\mathbb{N},+)$ 的Grothendieck化

在上述定义的 $\mathbb{Z}$ 上，我们可以进一步定义其上得结构（比如加法，序关系）如下：

定义： 上述定义的 $\mathbb{Z}$ 中，定义其上加法为

$$[m,n]+[m',n']=[m+m',n+n'] 。$$

练习： 证明 $\mathbb{Z}$ 上加法满足交换律、结合律和消去律。

我们也可以定义 $\mathbb{Z}$ 上序关系。

整数 $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{N},+)$ 的Grothendieck化

定义： 上述定义的 $\mathbb{Z}$ 中，定义其上序关系 $\le$ 为

$$[m,n]\le[p,q] \text{ 当且仅当 } m+q\le n+p \text{ 。}$$

注： 由于$[m,n]$代表的是一个等价类，我们需要验证该定义是 well-defined 。换言之，我们需要验证“若 $[m,n]=[m',n']$ ，$[p,q]=[p',q']$ 且 $[m,n]\le[p,q]$ ， 则 $[m',n']\le[p',q']$ 。”
同时，为了验证该关系确实是序关系，我们需要验证该关系满足自反性和传递性。

整数 $\mathbb{Z}$：$(\mathbb{N},+)$ 的Grothendieck化

练习： 证明 $\mathbb{Z}$ 中上述定义的关系是个well-defined的序关系，并进一步证明该序关系是个全序关系。

注： 上述定义的 $\mathbb{Z}$，其中是“包含”了 $\mathbb{N}$ 的。我们考虑如下映射

$$\rho: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \mathsf{n} \mapsto [\mathsf{n}, 0]$$

则 ρ 是单射，但不是满射（证明之！）。ρ 不仅仅在集合意义下将 $\mathbb{N}$ “嵌入” 了 $\mathbb{Z}$，ρ 还保持了相关的结构（加法、序关系等）。

整数 $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{N},+)$ 的Grothendieck化

练习：基于上述定义的 $\rho:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ ，证明：如果 $\mathsf{m},\mathsf{n}\in\mathbb{N}$ ，则 $\rho(\mathsf{m}+\mathsf{n})=\rho(\mathsf{m})+\rho(\mathsf{n})$ 。如果 $\mathsf{m},\mathsf{n}\in\mathbb{N}$ 且 $\mathsf{m}\leq\mathsf{n}$ ，则 $\rho(\mathsf{m})\leq\rho(\mathsf{n})$ 。

注：至此，我们已经完整演示了Grothendieck化的核心思想：在更抽象框架里定义半群的Grothendieck化，使得Grothendieck化后得到的结构与之前的结构相容。更具体的说，对我们的情况，为了定义类似减法，先抽象出减法的“基本性质”，并用加法描述之，然后在抽象的对象 $\{[\mathsf{m},\mathsf{n}]:\mathsf{m},\mathsf{n}\in\mathbb{N}\}$ 中试图保持这种“基本性质”。

整数 $\mathbb{Z}$ 上的乘法

定义： 对于任意的 $\mathbb{Z}$ 中元素 $[m, n]$ 和 $[p, q]$，定义其乘法为

$$[m, n] \cdot [p, q] = [mp + nq, mq + np] 。$$

问题： 为什么这样定义乘法？为什么不简单的定义 $[m, n] \cdot [p, q]$ 为 $[mp, nq]$ ？

练习： 证明 $\mathbb{Z}$ 上的乘法满足交换律和结合律。

整数 $\mathbb{Z}$ 上的乘法

练习： 证明 $\mathbb{Z}$ 上的加法和乘法满足分配率。

练习： 证明 $\mathbb{Z}$ 上的乘法对于非零元素满足消去率。

练习： 对于前面定义的 $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$，证明其保持乘法结构。换言之，对于任意的 $\mathsf{m}, \mathsf{n} \in \mathbb{N}$，有

$$\rho(\mathsf{m} \cdot \mathsf{n}) = \rho(\mathsf{m}) \cdot \rho(\mathsf{n})\text{ 。}$$

整数和自然数的区别

注： 至此，我们给出了 $\mathbb{Z}$ 的定义和其上的序结构，以及加法和乘法结构。同时我们也说明了 $\mathbb{Z}$“包含”$\mathbb{N}$，并且 $\mathbb{Z}$ 上的上述结构与 $\mathbb{N}$ 上的上述结构上相容的。自然的问题就是：$\mathbb{Z}$ 如何真的扩充了 $\mathbb{N}$？$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 有什么区别?

命题： 对于任意 $m, n \in \mathbb{Z}$，方程 $x + m = n$ 在 $\mathbb{Z}$ 中存在唯一的解。

注： 为了证明上述命题，直观的想法是将 x 设为 $n - m$，或者换言之，$n + (-m)$。关键问题就是：给定整数 $m = [m_1, m_2]$，什么是 $-m$？

整数和自然数的区别

事实上，假定 $-\mathsf{m} = [\mathsf{p}, \mathsf{q}]$ ，则我们需要 $\mathsf{m} + (-\mathsf{m}) = 0$ 。换言之，

$$[\mathsf{m}_1, \mathsf{m}_2] + [\mathsf{p}, \mathsf{q}] = [0, 0] \text{ 。}$$

即

$$[\mathsf{m}_1 + \mathsf{p}, \mathsf{m}_2 + \mathsf{q}] = [0, 0] \text{ 。}$$

根据 $\mathbb{Z}$ 之定义，这等价于

$$\mathsf{m}_1 + \mathsf{p} = \mathsf{m}_2 + \mathsf{q} \text{ 。}$$

不妨令 $\mathsf{p} = \mathsf{m}_2$ 且 $\mathsf{q} = \mathsf{m}_1$ 。换言之，令 $-\mathsf{m} = [\mathsf{m}_2, \mathsf{m}_1]$ 。则上述命题中 x 的存在性得证。

整数和自然数的区别

关于上述命题中 x 的唯一性，留作练习。

注：根据上述命题，任意的 $m \in \mathbb{Z}$，一定存在 $n \in \mathbb{Z}$，使得 $m + n = 0$。换言之，在 $\mathbb{Z}$ 中，关于加法的逆元总是存在的。这个性质是 $\mathbb{N}$ 中没有的。这也是整数扩充了自然数的根本意义所在。

注：在 $\mathbb{Z}$ 中，我们也可以有类似于 $\mathbb{N}$ 上的带余除法和辗转相除法。

整数上带余除法、辗转相除法

注： 在整数 $\mathbb{Z}$ 上，带余除法（假定除数大于 0）也是存在的。基于自然数上的带余除法，这个事实并不难证明。

> **练习：** 试证明：对于任意整数 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，一定存在唯一的整数对 (q, r)，其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，满足 $m = n \cdot q + r$ 且 $0 \leq r < n$。其中 q 称为商 (quotient)，r 称为余数 (remainder)。

最大公因子的表示

因为 $\mathbb{Z}$ 中有减法，我们可以在其中得到关于最大公因子的如下重要定理。

定理： 对于非零正整数 m 和 n，存在 $p, q \in \mathbb{Z}$，使得 $pm + qn = \gcd(m, n)$。

注： 该定理证明并不困难，基本就是把辗转相除法倒着走一遍。

练习： 证明上述定理。

最大公因子的表示

定理 [自然数素分解定理/唯一分解定理]： 任意非零自然数 m 一定可以写成 $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ 的分解形式（分解存在性），其中 p_i 均为素数且 $r_i \in \mathbb{N}_{>0}$ 。如果不考虑顺序，这样的分解还是唯一的。

注： 该定理之证明不算平凡（trivial），但是每一步思路还是比较容易想到的。所需的准备前面也基本给出。该证明可以作为练习。

$\mathbb{Q}-\{0\}$：$(\mathbb{Z}-\{0\},\times)$ 的Grothendieck化

现在我们定义了整数。在整数上，我们可以做乘法，但是未必一直可以做“除法”。这里说的“除法”，是基于如下自然的想法（naive idea）：“我们说 x 除以 y 等于 z，如果 y 乘以 z 等于 x。”

前面的练习中，我们提到过整数上乘法的消去律。和加法消去律不一样，整数乘法的消去律是对非零元素成立的。

对于 $\mathbb{Z}-\{0\}$，我们使用Grothendieck化的思想来定义 $\mathbb{Q}-\{0\}$。这个过程和 $(\mathbb{N},+)$ 的Grothendieck化是非常类似的，我们这里不再详细的给出证明之细节，只是给出基本的定义和事实。

$\mathbb{Q}-\{0\}:(\mathbb{Z}-\{0\},\times)$的Grothendieck化

定义: 对于 $m,n\in\mathbb{Z}$ 且 $n\neq 0$, 定义等价类 $[m,n]$ 如下:

$$[m,n]=[m',n'] \text{ 当且仅当 } mn'=nm' \text{ 。}$$

定义 [$\mathbb{Q}$]: 上述等价类的全体定义为 $\mathbb{Q}$ 。对于全体 $m,n\in\mathbb{Z}-\{0\}$, 其对应的 $[m,n]$ 等价类全体定义为 $\mathbb{Q}^*$ 。

定义 [$\mathbb{Q}$ 上乘法]: 对于$[m,n],[m',n']\in\mathbb{Q}$, 定义其乘法为 $[m,n]\cdot[m',n']=[mm',nn']$ 。

$\mathbb{Q}-\{0\}$: $(\mathbb{Z}-\{0\},\times)$ 的Grothendieck化

定义 [$\mathbb{Q}$ 上加法]: 对于$[m,n],[p,q]\in\mathbb{Q}$，定义其加法为 $[m,n]+[p,q]=[mq+np,nq]$ 。

问题: 为什么 $\mathbb{Q}$ 上的加法如此定义？该定义是否为良性的？

定理: $\mathbb{Q}$ 上加法满足结合律和交换律 。

定理: $\mathbb{Q}$ 上乘法和加法满足分配率 。

$\mathbb{Q}-\{0\}$: $(\mathbb{Z}-\{0\},\times)$ 的Grothendieck化

定理： $\mathbb{Q}^*$ 上乘法满足消去率 。

注： $\mathbb{Q}$ 中零元指的是 $[0,\mathrm{n}]$，其中 $\mathrm{n}\in\mathbb{Z}-\{0\}$。

定理： 对于任意 $\mathrm{s},\mathrm{t}\in\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}$ 中的方程 $\mathrm{x}+\mathrm{s}=\mathrm{t}$ 存在唯一的解。如果更进一步有 $\mathrm{s}\neq 0$，则 $\mathbb{Q}$ 中的方程 $\mathrm{x}\cdot\mathrm{s}=\mathrm{t}$ 存在唯一的解。

类似于 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{N}$ 的扩展，我们也可以说明 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的扩展。事实上，我们可以定义

$$\rho:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q},\quad \mathrm{m}\mapsto[\mathrm{m},1]\ 。$$

$\mathbb{Q}-\{0\}$: $(\mathbb{Z}-\{0\},\times)$ 的Grothendieck化

定理: 上述定义的 ρ 是一一对应（双射），且 ρ 保持乘法和加法结构。换言之，$\forall\, \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$，我们有 $\rho(\mathrm{m}+\mathrm{n}) = \rho(\mathrm{m}) + \rho(\mathrm{n})$ 并且 $\rho(\mathrm{m}\cdot\mathrm{n}) = \rho(\mathrm{m})\cdot\rho(\mathrm{n})$

注: 该定理的证明并不难，只要根据 ρ 的定义，还有自然数以及有理数上加法和乘法的定义，就能够完成证明。这样的看似无聊无难度的验证，在数学中还是需要的。这样的验证（或者类似的推导），有时被非正式的称为 “abstract nonsense” 。比如，“We can prove the theorem above (that ρ is ...) due to some abstract nonsense.”

$\mathbb{Q}$ 上的序关系以及距离

问题： 在 $\mathbb{N}$ 上，我们定义了序关系 $\leq$ 。如何将这个序关系扩展定义到 $\mathbb{Z}$ 上 (参考本课件前面部分之内容) ？如果更进一步扩展定义到 $\mathbb{Q}$ 上 ？

练习： 给出 $\mathbb{Q}$ 上的序关系 $(\leq)$ ，使得这个序关系和高中所知道的有理数的大小比较关系相一致。换言之，根据 $\mathbb{Q}$ 的严格定义，给出高中所学的有理数上$\leq$关系之严格定义。

注： 为了定义 $r \leq s$ ，只需要定义 $r - s \leq 0$ 。当然，先要定义什么是 $r - s$ 。一种方法是将 $r - s$ 定义为 $r + (-s)$ ，而 $-s$ 为满足方程 $x + s = 0$ 的唯一 x 。

$\mathbb{Q}$ 上的序关系以及距离

注：根据自己的直观，给出上述概念的定义，是很好的数学训练的机会。

基于序关系，我们可以定义两个元素 a 和 b 之间的距离为 $|a-b|$，其中若 $a \leq b$，则定义 $|a-b|$ 为 $b-a$，否则定义 $|a-b| = a-b$。简单的说，**距离结构是由序结构和减法决定的**。

> 练习：在 $\mathbb{Q}$ 上，基于上面练习给出的序关系 $\leq$，我们可以定义两个有理数 r, s 的距离为 $|r-s|$。证明该距离满足三角不等式。换言之，对于任意 $r, s, t \in \mathbb{Q}$，我们有 $|r-t| \leq |r-s| + |s-t|$。