

大学数学测试一

2013.10.12

姓名_____学号_____专业_____

一、判断下列陈述是否正确：(每题4分，共16分)

(1) 函数 $y = \sin(x^2)$ 是奇函数;

(X)

(2) 函数 $y = x^2 + e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加;

(✓)

(3) 函数 $y = \frac{x}{2+x^2}$ 是有界函数;

(✓)

(4) 函数 $y = \cos(2x+1)$ 是周期函数;

(✓)

二、函数 $y = \arctan^3(\ln \sqrt{x})$ 是由哪些基本初等函数复合而成的? (8分)

$$y = w^3, \quad w = \arctan v, \quad v = \ln u, \quad u = x^{\frac{1}{2}}$$

三、设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f[1+f(x)]$. (8分)

$$\text{解: } f[1+f(x)] = f\left(\frac{2}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{2}{1+x}}{1 + \frac{2}{1+x}} = \frac{x-1}{x+3}.$$

三、计算下列极限：(每题6分，共48分)

1) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^2 + \sin x);$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 5x - 1};$

$$= \frac{2}{-1} = -2$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{2x};$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{2x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 3n^2 - n}{2n^2 + \arctan n};$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n^2} + 3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{\arctan n}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}} \right]^{-2}$$

$$= e^{-2}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 4^n + 1}{2^n - 9^{n-1} + 3};$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (\frac{4}{9})^n + \frac{1}{9^n}}{(\frac{2}{9})^n - \frac{1}{9} + \frac{3}{9^n}}$$

$$= -9$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n}).$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n^2 + \sqrt{n^2 - n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

四、证明方程 $e^x - \cos 3x - 1 = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 内至少有一个实根。(10分)

证明: 令 $f(x) = e^x - \cos 3x - 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上连续

$$\& f(0) = e^0 - \cos 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} - \cos \pi - 1 = e^{\frac{\pi}{3}} > 0$$

所以由零点定理知 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 内 $e^x - \cos 3x - 1 = 0$ 至少有一个实根.

五、某人存入银行 x 元, 年利率为 2%, 每年到期后(存期一年), 他将本息和取出再添 x 元存入.

求两年后他取出的本息和 y 与 x 的函数关系式。(10分)

$$y = [x + x(1+2\%)](1+2\%)$$

$$= 1.02 \times 2.02 x$$

$$= 2.0604 x \quad x > 0.$$