研究生基础课

交换代数与代数几何讲义

谈　胜　利　　　杜　荣

华东师范大学数学科学学院

(内部资料，不要外传，匆忙打印，还没完善！)

二零二三年六月

前　言

目 录

第一章　解方程组的基本理论

1.1　Hilbert基定理—约化为有限个方程

1.1.1　背景

- 本课程是 《高等代数与解析几何》 的延续.
- 本课程的起源是解方程的理论. 即解如下方程组:
$$(1)\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= 0\\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= 0\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= 0 \end{cases}$$
- 交换代数 (Commutative Algebra) 是从代数的角度解方程.
- 代数几何 (Algebraic Geometry) 是从几何的角度解方程.
- Hilbert 基定理 与零点定理 是基础.
- 线性方程组 (1) 的研究工具是线性空间:
$$L(f_1,f_2,\cdots,f_m)=\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i \mid \lambda_i\in K\}$$
通过之前课程的学习, 我们已经知道如上定义的线性空间满足以下性质:

(i) 方程组 (1) 无解 $\Longleftrightarrow 1\in L(f_1,f_2,\cdots,f_m)$. 即存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in K$ 使得:
$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots+\lambda_m f_m=1$$

(ii) 若有另一方程组: $(2)\begin{cases} g_1 &= &0\\ g_2 &= &0\\ &\cdots & \\ g_k &= &0 \end{cases}$
则方程组 (2) 与 (1) 同解 $\Longleftrightarrow L(f_1,f_2,\cdots,f_m)=L(g_1,g_2,\cdots,g_k)$.

(iii) 若 (1) 的解都能够使 $f=0$, 则 $f\in L(f_1,f_2,\cdots,f_m)$.

(iv) (1) 的解包含 (2) 的解 $\Longleftrightarrow L(f_1,f_2,\cdots,f_m)\subseteq L(g_1,g_2,\cdots,g_k)$

(v) 若方程组 (1) 有解, 则解集是 $\mathbb{K}^n$ 中的 $d-$维平面 (d-维仿射空间 , d-维线性流形 $\cdots$) 且满足
$$d=n-dimL(f_1,f_2,\cdots,f_m)$$
这说明, 解集是 K^n 中很好的几何体.

读者也许会问为什么用线性空间 $L(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 代替线性方程组呢? 因为我们在解线性方程组的时候用到高斯消元法. 高斯消元法的本质是: 在向量空间 $L(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 中找一组基 $g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, g_{n-d}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使得:

$$L(f_1, f_2, \cdots, f_m) = L(g_1, g_2, \cdots, g_{n-d}) \subseteq K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

而初等变换不会改变上述的向量空间.

- 多项式方程组理论归根究底是环的理想 理论. 如果用消元法化简方程, 有这样的初等变换: 将第 i 个方程乘以某个多项式加入到第 j 个方程中去 $(j \neq i)$. 从而等价方程组具有相同的理想.

$$I(f_1, f_2, \cdots, f_m) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i f_i \mid g_i \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]\}$$

.

通常我们用 $Z(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 表示方程组 (1) 在 K^n 中的解集.

$$Z(f_1, f_2, \cdots, f_m) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n \mid \begin{cases} f_1(a_1, a_2, \cdots, a_n) & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ f_m(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0. & \end{cases} \}$$

我们指出如下事实与待解决的问题.

(i) 当 K 为代数闭域, 如取 $K = \mathbb{C}$ 时, 则

$$Z(f_1, f_2, \cdots, f_m) = \emptyset \Longleftrightarrow 1 \in I(f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

注意到当 K 并不是代数闭域时, 上述结论并不成立, 例如我们取 $K = \mathbb{R}$, 则 $Z(x^2 + 1) = \emptyset$, 但是 $1 \notin I(x^2 + 1) = \mathbb{R}[x](x^2 + 1)$. 这里的 $\mathbb{R}[x]$ 是指一元多项式环.

(ii) 若 $I(f_1, f_2, \cdots, f_m) = I(g_1, g_2, \cdots, g_k)$. 则 $Z(f_1, f_2, \cdots, f_m) = Z(g_1, g_2, \cdots, g_k)$. 但这条性质反过来并不成立. 例如, 取 $K = \mathbb{C}, n = 1$. $Z(x) = Z(x^2)$, 但 $\langle x \rangle \neq \langle x^2 \rangle$.

问题: 应该如何判断两方程同解?

(iii) 若 $\langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle \subseteq \langle g_1, g_2, \cdots, g_k \rangle$, 则$Z(f_1, f_2, \cdots, f_m) \supseteq Z(g_1, g_2, \cdots, g_k)$.

问题: 如何从方程的角度出发判断一个方程组的解包含另一个?

(iv) 若方程组 (1) 有解, 还有以下问题需要解决:

(a) 方程组的解集 $Z(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 的几何结构是怎样的? 经验告诉我们, 它至少包含一些点, 一些曲线, 一些曲面.

(b) 如何化简方程? 是否能把方程分解为有限个方程, 使得每一个方程都不能再分解? 事实上, 此时的解就是一个好的几何对象.

(c) 如果方程不能再分解, 如何定义解集的几何维数?

(v) 如果方程组的解是一条曲线, 或一个曲面,$\cdots$, 如何研究此几何对象? 比如曲线是否光滑, 即是否有奇点, 如果有, 如何消去它?

(vi) 通过坐标变换化简方程. 大致说来, 坐标变换有以下四类. 在解析几何 中, 我们使用等距变换 来化简方程, 即利用正交变换 与平移 ; 在仿射几何 中, 我们用仿射变换 化简方程, 即利用可逆线性变换与平移; 在射影几何 中, 使用射影变换 ; 在代数几何中, 我们使用双有理变换 化简方程.

我们给出2维的射影和双有理变换公式:
(a).射影变换的坐标公式:

当 $n=1$ 时,

$$x=\frac{a\bar{x}+b}{c\bar{x}+d}\qquad\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$$

当 $n=2$ 时,

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a_{11}\overline{x_1}+a_{12}\overline{x_2}+a_{13}}{a_{31}\overline{x_1}+a_{32}\overline{x_2}+a_{33}}\\[2ex] x_2=\dfrac{a_{21}\overline{x_1}+a_{22}\overline{x_2}+a_{23}}{a_{31}\overline{x_1}+a_{32}\overline{x_2}+a_{33}}\end{cases}$$

其中: $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是可逆的.
(b).双有理变换公式:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\overline{h_1}(\overline{x_1},\overline{x_2})}{\overline{g_1}(\overline{x_1},\overline{x_2})}\\[2ex] x_2=\dfrac{\overline{h_2}(\overline{x_1},\overline{x_2})}{\overline{g_2}(\overline{x_1},\overline{x_2})}\end{cases}\qquad h_i,g_i\in K[\overline{x_1},\overline{x_2}]$$

它的逆变换也是由有理多项式给出,

$$\begin{cases}\overline{x_1}=\dfrac{h_1(x_1,x_2)}{g_1(x_1,x_2)},\\[2ex] \overline{x_2}=\dfrac{h_2(x_1,x_2)}{g_2(x_1,x_2)}\end{cases}\qquad h_i,g_i\in K[x_1,x_2]$$

例 1.1.1 通过适当的双有理变换, 可将 4 次曲线 $y^2=f_4(x)$ 化为 3 次曲线 $y^2=f_3(x)$. ■

1.1.2 Hilbert 基定理的证明

命题 1.1.1 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中的任何理想 I 都是有限生成的, 即存在

$$f_1,f_2,\cdots,f_m\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$$

使得 $I=\langle f_1,f_2,\cdots,f_m\rangle$.

定义 1.1.1 (Noether 环) 如果一个交换环 R 的任何理想是有限生成的, 我们就称交换环 R 是 Noether 环, 亦称 R 是 Noether 的.

例 1.1.2 我们在近世代数中学习过的域, 主理想整环, 整数集 $\mathbb{Z}$ 以及数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$ 都是 Noether 的. ■

命题 1.1.2 若交换环 R 是 Noether 的. $\varphi : R \longrightarrow R'$ 是满同态, 则 R' 也是 Noether 的.

定理 1.1.1 若交换环 R 是 Noether 的, 且 x 是 R 上的不定元, 则多项式环 $R[x]$ 也是 Noether 的.

证明 若 $R[x]$ 不是 Noether 的, 则存在 $I \lhd R[x]$ 不是有限生成的, 则 $I \neq 0$. 令 $f_1 \in I$ 是 I 中次数最小的元素, 因为 $\deg 0 = \infty$, 故 $f_1 \neq 0$; 令 f_2 是 $I - \langle f_1 \rangle$ 中次数最小者; 依次类推, 令 f_{k+1} 是 $I - \langle f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$ 中次数最小的元素, 则可无限选下去.

记 $\deg f_k = n_k$, 则 $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \leq \cdots$.记 a_k 为 f_k 的首项系数, 则 $a_k \neq 0$. 于是,

$$f_k = a_k x^{n_k} + \text{低次项}$$

我们有如下包含关系:

$$\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2 \rangle \subseteq \cdots \subseteq \langle a_1, a_2, \cdots, a_m \rangle \subseteq \cdots$$

若记 $\overline{I_k} = \langle a_1, a_2, \cdots, a_k \rangle$, 易证 $\overline{I} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \langle a_1, a_2, \cdots, a_k \rangle$ 是 R 的一个理想. 从而 I 有限生成, 即 $\overline{I} = \langle t_1, t_2, \cdots, t_s \rangle, t_i \in R$. 故存在 k 使得 $t_1, t_2, \cdots, t_s \in \overline{I_k}$. 所以 $\overline{I_k} \subseteq \overline{I} \subseteq \overline{I_k}$. 这表明

$$\overline{I} = \overline{I_k} = \overline{I_{k+1}} = \cdots = \overline{I_n} = \cdots$$

由 $\overline{I_k} = \overline{I_{k+1}}$ 可知 $a_{k+1} \in \langle a_1, a_2, \cdots, a_k \rangle$. 即存在 $b_1, b_2, \cdots, b_k \in R$, 使得

$$a_{k+1} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k, \quad b_i \in R$$

考虑 $f_{k+1} = a_{k+1} x^{n_{k+1}} + \text{低次项}$,

$$\begin{aligned} &f_{k+1} = a_{k+1} x^{n_{k+1}} + \text{低次项} \\ &f_1 b_1 x^{n_{k+1} - n_1} = a_1 b_1 x^{n_{k+1}} + \text{低次项} \\ &\quad\cdots \\ &f_k b_k x^{n_{k+1} - n_k} = a_k b_k x^{n_{k+1}} + \text{低次项} \end{aligned}$$

令

$$g_{k+1} = f_{k+1} - f_1 b_1 x^{n_{k+1} - n_1} - \cdots - f_k b_k x^{n_{k+1} - n_k}$$

因为 $f_{k+1} \in I, f_{k+1} \notin \langle f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$, 故 $g_{k+1} \in I, g_{k+1} \notin \langle f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$. 所以

$$0 \neq g_{k+1} \in I - \langle f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$$

但 $\deg g_{k+1} < \deg f_{k+1}$, 这与 f_{k+1} 的选取矛盾. 故 I 是有限生成的, 从而 $R[x]$ 是 Noether 的. ■

引理 1.1.1 R 是交换环, 则以下命题等价:

(1) R 是 Noether 的;

(2) R 的任何理想升链 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m \subseteq \cdots$ 是稳定的. 即存在 k 使得

$$I_k = I_{k+1} = \cdots = I_m = \cdots$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 令 $I = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_k$. 立知 $I \lhd R$. 所以 I 有限生成, $I = \langle b_1, b_2, \cdots, b_s \rangle$. 存在 k 使得 $b_1, b_2, \cdots, b_s \in I_k$. 从而 $I_k \subseteq I \subseteq I_k$, 所以 $I = I_k$. 故,

$$I_k = I_{k+1} = \cdots = I_m = \cdots$$

(2)$\Longrightarrow$(1) 反证, 若 $I \lhd R$ 不是有限生成的. 分别取

$$f_1 \in I, \quad f_2 \in I - \langle f_1 \rangle, \quad f_3 \in I - \langle f_1, f_2 \rangle, \cdots, f_{k+1} \in I - \langle f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle, \cdots$$

令 $I_k = \langle f_1, f_2, \cdots, f_{k+1} \rangle$ 则 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_k \subsetneq I_{k+1} \subsetneq \cdots$. 这是不稳定的. 矛盾! ■

1.2 Hilbert零点定理-方程组无解的判别法

1.2.1 判别方程组是否有解

设 $\mathbb{K}$ 是代数闭域: 即任何次数大于 0 的多项式 $f(x) \in K[x]$ 在 K 上有根. Hilbert 给出了 K 上的代数方程组在 K 上有没有零点的一个判别法.本节我们将给出如下重要定理的证明.

定理 1.2.1 (Hilbert 零点定理) 设 K 为代数闭域. K 上的多项式方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

在 K 上无解当且仅当存在 $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 使得下式成立.

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots f_m g_m = 1$$

这是解方程理论中的基本定理.

注 1.2.1 充分性是显然的，下面主要证明必要性. ■

1.2.2 Noether 规范化引理

Noether 通过变量变换, 可将一个多元多项式化为一个首一多项式, 以利于解方程.

引理 1.2.1 (Noether 技巧) 设 $\mathbb{K}$ 为无限域. f 是 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中的一个次数为 d 的多项式. 其中 $n \geq 2, d \geq 1$. 则存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{n-1} \in K$ 使得

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1 + \lambda_1 x_n, x_2 + \lambda_2 x_n, \cdots, x_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n)$$

中 x_n^d 的系数为非零常数.

证明 设 $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{d-1} + f_d, f_d \neq 0$. 其中 f_i 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 i 次齐次多项式. $g = g_0 + g_1 + \cdots + g_{d-1} + g_d$. 则

$$\begin{aligned} g_d &= f_d(x_1 + \lambda_1 x_n, x_2 + \lambda_2 x_n, \cdots, x_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n) \\ &= x_n^d f_d(\tfrac{x_1}{x_n} + \lambda_1, \tfrac{x_2}{x_n} + \lambda_2, \cdots, \tfrac{x_{n-1}}{x_n} + \lambda_{n-1}, 1) \\ &= f_d(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, 1) x_n^d + x_n \text{ 的低次项} \end{aligned}$$

由于 $f_d(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \neq 0, f_d = x_n^d f_d(\frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1) \neq 0$, 所以 $f_d(y_1, \cdots, y_{n-1}, 1)$ 是非零多项式. 又因为 K 是无限域, 故存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1} \in K$ 使得 $f_d(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$. ■

同理还可以得到下推论.

推论 1.2.1 对任何有限个非零多项式 $f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}\in K$ 使得

$$f_i(x_1+\lambda_1 x_n, x_2+\lambda_2 x_n,\cdots,x_{n-1}+\lambda_{n-1}x_n, x_n),\quad i=1,2,\cdots,m$$

中 $x_n^{d_i}$ 的系数都不为零. $d_i=\deg f_i\geq 1$.

1.2.3 结式的性质

定义 1.2.1 多项式环 $K[x]$ 上的两个非零多项式,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in K[x],$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m\in K[x].$$

其中, $\deg f(x)=n\geq 1,\deg g(x)=m\geq 1$. 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式 $R(f,g)$ 定义为

$$R(f,g)=\left|\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & & \\ & b_0 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}\text{m 行} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}\text{n 行}\end{array}$$

命题 1.2.1 $f(x),g(x)$ 在代数闭域 K 上有公共根当且仅当 $R(f,g)=0$.

命题 1.2.2 存在 $u(x),v(x)\in K[x]$ 使得,

$$R(f,g)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

1.2.4 Hilbert 零点定理的证明

证明　主要证明必要性。对 n 施数学归纳法. $n=1$ 时结论成立, 因为 K 是代数闭域，所以 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 互素. 下设 $n>1$ 且 $n-1$ 时定理成立. 设 I 是多项式环 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中的任一理想, 记为

$$I=\langle f_1,f_2,\cdots,f_m\rangle \lhd K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$$

令

$$I'=I\cap K[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$$

显见, I' 是 $K[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$ 的理想. 反证, 若 $1\notin I$, 则 $1\notin I'$.

由 Noether 规范化引理, 可设 I 中包含一个多项式 g 它是首一非零的. 记为

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_n^d+b_1x_n^{d-1}+\cdots+b_{d-1}x_n+b_d$$

由于 $1\notin I'$. 因为定理在 $n-1$ 时成立, 故 I' 中所有多项式有公共零点:

$$x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots,x_{n-1}=a_{n-1},a_i\in K$$

令

$$I''=\{f(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},x_n)\mid f\in I\}\lhd K[x_n]$$

分两种情况:

(a) 如果 $1 \notin I''$. 则存在 $x_n = a_n \in K$, 使得 I'' 中所有多项式以 $x_n = a_n$ 为根. 从而 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为原方程组的根.

(b) 如果 $1 \in I''$. 则存在 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I$ 使得 $f(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, x_n) = 1$. 令

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_0 x_n^k + f_1 x_n^{k-1} + \cdots + f_k$$

则

$$\begin{cases} f_0(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) & = 0, \\ \cdots \quad \cdots & \\ f_{k-1}(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) & = 0, \\ f_k(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) & = 1. \end{cases}$$

现在令 $R(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 是 f 和 g 关于 x_n 的结式. 则存在 $u, v \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 使得

$$R(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = uf + vg \in I$$

所以, $R(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in I' = I \cap K[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$. 从而 $R(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) = 0$.

另一方面,

$$R(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = R(g, f) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & \cdots\cdots\cdots & b_d & & & \\ & 1 & b_1 & \cdots\cdots\cdots & b_d & & \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ & & & 1 & b_1 & \cdots\cdots\cdots & b_d \\ f_0 & f_1 & \cdots\cdots & f_k & & & \\ & f_0 & f_1 & \cdots\cdots & f_k & & \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ & & & f_0 & f_1 & \cdots\cdots\cdots & f_k \end{vmatrix}$$

所以 $R(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

这是矛盾的. 所以方程无解, 自然有 $1 \in I$. ■

1.2.5 Hilbert 零点定理的等价形式

定义 1.2.2 (1) 设 I 是多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的理想, 若满足 $1 \notin I$, 则称 I 是多项式环的真理想 . 即 $I \neq K[x_1, \cdots, x_n]$;

(2) 若 $I = K[x_1, \cdots, x_n] = \langle 1 \rangle$, 则称 I 是为单位理想;

(3) 设 m 是多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的理想, 若满足下列条件:

(a) m 不是单位理想, 即 $1 \notin m$;

(b) m 与 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 之间没有其它理想.

则称m 是 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的极大理想.

引理 1.2.2 多项式环中任何真理想 I 必包含在某极大理想 m 中.

证明 反证. 若 I 不包含于任何极大理想之中, 则 I 本身不是极大的. 存在理想 I_1 使得

$$I \subsetneqq I_1 \subsetneqq \langle 1 \rangle$$

因 I_1 不包含于任何极大理想之中, 所以存在理想 I_2 使得

$$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \langle 1 \rangle$$

一直下去, 可得不稳定的理想升链:

$$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq I_k \subsetneqq \cdots$$

这与多项式环的 Noether 性矛盾. ∎

定理 1.2.2 设 K 是代数闭域, 则以下结论等价:

(1) Hilbert 零点定理;

(2) 对于 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中的任何极大理想 m, 存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$, 使得

$$m = \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n \rangle$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $m = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle \neq \langle 1 \rangle$. 因为 $1 \notin m$, 所以方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ \cdots \qquad \cdots & \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \end{cases}$$

有公共解 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 也就是说 $f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$. 现在把 $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ 按照 $x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n$ 展开, 那么

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) + \text{ 包含 } x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \text{ 之一的项}$$

而 $f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$. 因此 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n \rangle$. 所以

$$I \subseteq m = \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n \rangle$$

显然, m 是极大理想, 所以 $I = m$.

(2)$\Longrightarrow$(1) 考虑方程组 $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ \cdots \qquad \cdots & \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \end{cases}$

若 $1 \notin I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle$, 则知 I 包含在某极大理想 m 之中, 又由条件 (2) 可知,

$$m = \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle$$

所以对任意的 i, 都有

$$\langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle = I \subseteq m$$

我们可以记

$$f_i = g_{i_1}(x_1 - a_1) + g_{i_2}(x_2 - a_2) + \cdots + g_{i_n}(x_n - a_n)$$

于是 $f_i(a_1, a_2 \cdots, a_n) = 0$, 这里 $i = 1, 2, \cdots, m$. ■

1.3 根理想-约化为既约方程组

1.3.1 去掉方程中的指数幂

例 1.3.1 (1) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)^2 = 0$ 与 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 同解.

(2)

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{e_1} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{e_2} & = 0 \\ \cdots \quad \cdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{e_m} & = 0. \end{cases} \text{与} \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = 0 \\ \cdots \quad \cdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = 0. \end{cases} \text{同解.}$$

考虑由 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 生成的理想 $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle$,

$$\begin{aligned} Z(I) &= \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0, \forall\, f \in I\} \\ &= \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n \mid \begin{cases} f_1(a_1, a_2, \cdots, a_n) & = 0 \\ f_2(a_1, a_2, \cdots, a_n) & = 0 \\ \cdots \quad \cdots \\ f_m(a_1, a_2, \cdots, a_n) & = 0 \end{cases} \} \\ &= Z(f_1, f_2, \cdots, f_m) \end{aligned}$$

■

注 1.3.1 方程组的解由其生成理想唯一决定. 但不同的理想可能对应的解集一样. ■

例 1.3.2 若有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 和正整数 $k \geq 1$ 使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)^k \in I$$

则把 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 加入到原方程组得:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = 0 \\ \cdots \quad \cdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = 0 \\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = 0 \end{cases}$$

■

新方程与原方程同解, 即

$$Z(f_1, f_2, \cdots, f_m) = Z(f_1, f_2, \cdots, f_m, f)$$

1.3.2 根理想

我们回顾例 1.3.2 中 f 的选取, 若令

$$I_1 = I + \langle f \rangle = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m, f \rangle$$

显见, $I_1 \supseteq I$. 但根据例 1.3.2 的讨论, 我们知道 $Z(I_1) = Z(I)$. 本节我们所讨论的根理想与此现象类似.

定义 1.3.1 一般地, 定义 R 上理想 I 的根理想 (Root Ideal):

$$\sqrt{I} := \{g \in R \mid \exists\, k \geq 1, \text{使得 } g^k \in I\}$$

注 1.3.2 根据根理想的定义, 显见 $\sqrt{I} \supseteq I$. ■

定理 1.3.1 设 R 是有单位元 1 的交换环. $I \lhd R$, 则 $\sqrt{I}$ 也是 R 的理想.

证明 根据在近世代数中我们对理想的定义, 我们只需要证明如下结论:

(1) $\forall\, g_1, g_2 \in \sqrt{I} \Longrightarrow g_1 + g_2 \in \sqrt{I}, g_1 - g_2 \in \sqrt{I}$

(2) $\forall\, g_1 \in \sqrt{I}, \forall\, r \in R \Longrightarrow g_1 r \in \sqrt{I}$.

(1) 的证明: 因为 $g_1, g_2 \in \sqrt{I}$ 所以存在 $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ 使得

$$g_1^{k_1} = a_1 \in I, \qquad g_2^{k_2} = a_2 \in I$$

应用二项式定理, 我们得到下列等式:

$$(g_1 + g_2)^{k_1+k_2} = \sum_{i=0}^{k_1+k_2} C_{k_1+k_2}^i g_1^i g_2^{k_1+k_2-i}$$

下证上述等式中等号右边的每一项都在 I 中, 我们分两种情况讨论:

(1) 当 $i \geq k_1$ 时,

$$g_1^i g_2^{k_1+k_2-i} = a_1 \cdot g_1^{i-k_1} \cdot g_2^{k_1+k_2-i} \in I$$

(2) 当 $i < k_1$ 时, 则 $k_1 + k_2 - i > k_2$, 故

$$g_1^i g_2^{k_1+k_2-i} = a_2 \cdot g_1^i \cdot g_2^{k_1-i} = a_2 r_2 \in I$$

所以

$$(g_1 + g_2)^{k_1+k_2} \in I$$

即我们找到了这样的正整数 $k = k_1 + k_2$ 使得 $(g_1 + g_2)^k \in I$, 由根理想的定义, $g_1 + g_2 \in \sqrt{I}$. 同理, 我们有 $g_1 - g_2 \in \sqrt{I}$.

(2) 的证明: 设 $g_1 \in \sqrt{I}$, 于是存在 $k_1 \geq 1$ 使得

$$g_1^{k_1} = a_1 \in I$$

对于任意的 $r \in R$, 显然有

$$(g_1 r)^{k_1} = a_1 r^{k_1}$$

这里 $a_1 \in I, r^{k_1} \in R$. 根据理想的吸收性, 显然有 $g_1 r \in \sqrt{I}$.

至此我们证明了以上两条结论, 故 $\sqrt{I}$ 也是 R 的理想. ■

定理 1.3.2 设 R 是交换环, I 是 R 的理想. 则该理想与其根理想对应的方程组解集相等. 换言之, $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$.

证明 首先, 因为 $\sqrt{I} \supseteq I$, 故 $Z(\sqrt{I}) \subseteq Z(I)$. 反之, 对任意的 $p = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in Z(I)$ 以及任意的 $g \in \sqrt{I}$, 我们的目标是证明 $g(p) = 0$.

因为 $g \in \sqrt{I}$, 所以存在 $k \geq 1$ 使得 $g^k \in I$. 于是

$$g(a_1, a_2, \cdots, a_n)^k = 0$$

所以 $g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$. 即对于任意的 $p \in Z(I)$ 和任意的 $g \in \sqrt{I}$ 都有 $g(p) = 0$. 所以

$$p \in Z(\sqrt{I}) = \{p \in K^n \mid g(p) = 0, \forall\, g \in \sqrt{I}\}$$

这蕴含着 $Z(I) \subseteq Z(\sqrt{I})$. 故 $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$. ■

通过以上定理和定理的证明, 我们知道, 增加根式的过程不会改变方程组的解集.

1.3.3 方程组的同解判则

考虑方程组

$$\begin{cases} f_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ \cdots & \\ f_m &= 0 \end{cases} \quad (I_1) \qquad \begin{cases} g_1 &= 0 \\ g_2 &= 0 \\ \cdots & \\ g_k &= 0 \end{cases} \quad (I_2)$$

记 $I_1 = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle, I_2 = \langle g_1, g_2, \cdots, g_k \rangle$. 该如何判断两方程组 (I_1) 与 (I_2) 同解?

注 1.3.3 设 $Z \subseteq K^n$ 为某子集, 易验证

$$I(Z) = \{g \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid g(p) = 0, \forall\, p \in Z\}$$

为 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的理想. 但理想 $I(Z)$ 的零点集 $V(I(Z)) \supseteq Z$, 等号不一定成立. ■

例 1.3.3 设集合 $Z \subseteq \mathbb{C}^2$,

$$Z = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{C}, b \neq 0\}$$

于是集合 Z 的理想

$$I(Z) = \{f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \mid f(0, b) = 0, \forall\, b \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

任取 $f(x, y) \in Z$, 有

$$f(x, y) = f_0(y) + f_1(y)x + \cdots + f_d(y)x^d$$

代入可得, $f(0, b) = f_0(b) = 0, \forall\, b \in \mathbb{C} - \{0\}$. 从而 $f_0(y)$ 有无限多个根. 根据高斯代数学基本定理立知 $f_0(y) \equiv 0$. 故 $x \mid f(x, y)$. 易证 $I(Z) = \langle x \rangle$, 所以

$$V(I(Z)) = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{C}\} \supsetneq Z$$

定理 1.3.3　设 K 是代数闭域. $R = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. 若 $\mathfrak{a} \lhd R$ 则

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

证明　根据 I, Z 的定义, 显然可以得到

$$Z(\mathfrak{a}) = \{p \in K^n \mid f(p) = 0, \forall\, f \in \mathfrak{a}\} \quad I(Z(\mathfrak{a})) = \{g \in R \mid g(p) = 0, \forall\, p \in Z(\mathfrak{a})\}$$

我们通过证明 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 和 $I(Z(\mathfrak{a}))$ 互相包含验证集合相等.

(1) 若 $g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, 则存在 $k \geq 1$ 使得 $g^k \in \mathfrak{a}$. 对于任意的 $p \in Z(\mathfrak{a})$, 有 $g^k(p) = 0$. 所以 $g(p) = 0$. 故 $g \in I(Z(\mathfrak{a}))$. 从而有

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$$

(2) 反之, 设 $\mathfrak{a} = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle$, 对于任意的 $g \in I(Z(\mathfrak{a}))$,

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R$$

引入新的不定元 x_{n+1}. 考虑 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 的方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots \qquad \cdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ x_{n+1} \cdot g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - 1 = 0 \end{cases}$$

由于 $g \in I(Z(a))$, 因此前 m 个方程的零点 $p = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 一定使得 $g(p) = 0$. 从而上述方程组在 K^{n+1} 中无解. 根据希尔伯特零点定理, 存在

$$a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}]$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f_i + a_{m+1} \cdot (x_{n+1} \cdot g - 1) = 1$$

此为多项式恒等式. 令 $x_{n+1} = \dfrac{1}{g}$, 那么

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{1}{g}) f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1$$

消去上式左边的分母 $g^k (k \gg 1)$, 可得

$$\sum_{i=1}^{m} g^k a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{1}{g}) f_i = g^k$$

即

$$g^k = \sum_{i=1}^{m} b_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

这里, $b_i = g^k \cdot a_i \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. 故 $g^k \in \mathfrak{a}$, 也就是说 $g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, 从而

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq I(Z(\mathfrak{a}))$$

综合 (1)(2), 定理得证. ■

推论 1.3.1 (**方程组** $(I_1),(I_2)$ **同解判则**)

$$Z(I_1)=Z(I_2) \iff \sqrt{I_1}=\sqrt{I_2}$$

证明 ($\Longleftarrow$) 若 $\sqrt{I_1}=\sqrt{I_2}$, 则 $V(\sqrt{I_1})=V(\sqrt{I_2})$. 又由 $Z(\sqrt{I_i})=Z(I_i)$, 故 $Z(I_1)=Z(I_2)$.

($\Longrightarrow$) 若 $Z(I_1)=Z(I_2)$, 则 $I(Z(I_1))=I(Z(I_2))$, 这蕴含着 $\sqrt{I_1}=\sqrt{I_2}$. ■

推论 1.3.2 方程组 $\begin{cases} f_1=0 \\ f_2=0 \\ \cdots \\ f_m=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} g_1=0 \\ g_2=0 \\ \cdots \\ g_k=0 \end{cases}$ 同解当且仅当存在 $s_1,s_2,\cdots,s_m\geq 1$, $t_1,t_2,\cdots,t_k\geq 1$ 使得

$$\begin{pmatrix} f_1^{s_1} \\ f_2^{s_2} \\ \vdots \\ f_m^{s_m} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g_1^{t_1} \\ g_2^{t_2} \\ \vdots \\ g_k^{t_k} \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

其中, $A=A_{m\times k},B=B_{k\times m}$ 是元素在 $K=K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中的矩阵.

1.4 理想的准素分解-约化为不可约方程组

1.4.1 方程组的分解

例 1.4.1 我们在解方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 的时候等价于解两个方程: $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 和 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

记方程组 $I_1=\langle f_1,f_2,\cdots,f_m\rangle,I_2=\langle g_1,g_2,\cdots,g_k\rangle$. 定义

$$I_1\cdot I_2=\langle f_ig_j\mid i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,k\rangle$$

则解方程组 $\begin{cases} f_1g_1=0 \\ \cdots \\ f_mg_1=0 \\ f_1g_2=0 \\ \cdots \\ f_mg_k=0 \end{cases}$ 这等价于解两个方程组: $\begin{cases} f_1=0 \\ f_2=0 \\ \vdots \\ f_m=0 \end{cases}$ (I_1) 和 $\begin{cases} g_1=0 \\ g_2=0 \\ \vdots \\ g_k=0 \end{cases}$ (I_2).

换句话说, $Z(I_1\cdot I_2)=Z(I_1)\cup Z(I_2)$. ■

定义 1.4.1 一般地, 定义 $I_1\lhd R,I_2\lhd R$ 的乘法

$$I_1\cdot I_2=\{\sum a_ib_i\ (\text{有限和})\mid a_i\in I_1,b_i\in I_2\}$$

请读者自行验证上述定义的 $I_1\cdot I_2$ 仍是 R 的理想.

命题 1.4.1 若 I_1,I_2 是 R 的理想, 则成立以下公式 $Z(I_1\cap I_2)=Z(I_1)\cup Z(I_2)$.

证明　因为 $I_1 \cdot I_2 \subset I_1 \cap I_2 \subset I_1, I_2$. 所以有

$$Z(I_1 \cdot I_2) \supset Z(I_1 \cap I_2) \supset Z(I_1), Z(I_2)$$

故

$$Z(I_1 \cdot I_2) = Z(I_1 \cap I_2) = Z(I_1) \cup Z(I_2)$$

我们给出此命题的目的在于, 若 $I = I_1 \cap I_2$, 则解方程组 (I) 等价于解两个方程组 (I_1) 和 (I_2). 而实际我们在解方程组的过程中, 用 $\cap$ 比用 $\cdot$ 运算方便的多. ■

推论 1.4.1　方程组的分解等价于理想的分解.

$$I = I_1 \cap I_2$$

定义 1.4.2　如果对于方程组 (I) 或理想 (I) 的任何分解 $I = I_1 \cap I_2$, 都有 $I = I_1$ 或者 $I = I_2$ 则称 I 是不可约的 (Irreducible).

例 1.4.2　极大理想是不可约的. ■

1.4.2　方程组的不可约分解

定理 1.4.1　多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中 (一般地, 在 Noether 环中) 的任何理想都可分解成有限个不可约理想的交.

$$I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k$$

其中 $I_1, I_2, \cdots, I_k$ 都是不可约的.

证明　反证法. 设 I 不能分解成有限个不可约理想的交. 我们证明, 存在 R 的理想 I_1,

$$I_1 \lhd R, \quad I_1 \neq R, \quad I \subsetneq I_1$$

且 I_1 也不能分解称有限个不可约的理想的交.

由假设, I 可约, 从而存在 $I_1 \supsetneq I, I_2 \supsetneq I$ 使得 $I = I_1 \cap I_2$. 如果 I_1, I_2 都能分解成有限个不可约理想的交. 则显然 I 也可以分解, 这是矛盾的. 所以 I_1 与 I_2 中至少有一个不能分解成有限个不可约理想的交, 不妨设 I_1 不可以, 从而上述断言成立. 因此可以作无限多个理想

$$I \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_m \subsetneq \cdots$$

但这与 R 的 Noether 性矛盾. 假设错误, 定理得证. ■

推论 1.4.2　解任何方程组等价于解有限个不可约方程组.

1.4.3　不可约方程组解集的不可约性

定理 1.4.2　设 R 是 Noether 环. $I \lhd R$ 是不可约理想 , 对于任意的 $a, b \in R$, 如果满足 $a \cdot b \in I$, 则要么 $a \in I$, 要么 $b \in \sqrt{I}$.

证明　不妨设 $b \notin \sqrt{I}$, 即任意的 $k \geq 1$, 都有 $b^k \notin I$. 对某个固定的 k, 作理想

$$I_k = \{x \in R \mid xb^k \in I\} \lhd R$$

由于 $b^k \notin I$, 所以 $1 \notin I_k$. 又因为 $xb^k \in I$, 由理想的吸收性可知 $xb^{k+1} \in I$. 所以

$$I_k \subseteq I_{k+1}, k = 1, 2, \cdots$$

由 R 的 Noether 性, 存在 $N > 0$, 使得

$$I_N = I_{N+1} = \cdots = I_m = \cdots, \forall\, m \geq N$$

设 $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle$, 下证: $I_1 \cap I_2 = I\ (*)$. 这里 $I_1 = \langle f_1, \cdots, f_m, a \rangle, I_2 = \left\langle f_1, \cdots, f_m, b^N \right\rangle$. 不妨设 z 是左边交集中的元. 则

$$z \equiv ar' \equiv rb^N \mod I$$

$$rb^{N+1} rb^N \cdot b \equiv ar' \cdot b \equiv (ab)r' \equiv 0 \mod I$$

所以有

$$rb^{N+1} \in I, \quad r \in I_{N+1} = I_N$$

故 $z = rb^N \in I$, 这表明 $I_1 \cap I_2 \subseteq I$. 另一方面, 由 I_1, I_2 的构造, 显见 $I \subseteq I_1 \cap I_2$. 故 $I = I_1 \cap I_2$. 注意到 $b^N \notin I$, 所以 $I \subsetneq I_2$. 由 I 的不可约性即得 $I_1 = I$, 故 $a \in I$. ■

注 1.4.1 满足定理 1.4.2 的理想也称作准素理想 (Primary Ideal). ■

推论 1.4.3 不可约理想是准素理想.

推论 1.4.4 Noether 环中, 任何理想可以分解成有限个准素理想的交.

$$I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k$$

定义 1.4.3 上述分解中, 如果对于任意的 i, 都有 $I_i \not\supseteq \bigcap\limits_{j \neq i} I_j$. 则称该分解是极小分解 (Minimal Resolution). 任何分解都可化为极小分解.

定理 1.4.3 I 是准素理想, 则 $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ 是素理想, 即对于任意的 $a, b \in R$, 如果满足 $ab \in \mathfrak{p}$, 则要么 $a \in \mathfrak{p}$, 要么 $b \in \mathfrak{p}$.

证明 由于 I 准素, $ab \in \mathfrak{p}$, 则存在 k 使得 $(ab)^k = a^k b^k \in I$. 如果 $b \notin \mathfrak{p}$, 则 $b^k \notin \mathfrak{p} = \sqrt{I}$. 由定理 1.4.2 可知, $a^k \in I$. 所以 $a \in \sqrt{I}$. 即 $a \in \mathfrak{p}$. 故 $\mathfrak{p}$ 是素理想. ■

引理 1.4.1 设 I_1, I_2 是 R 的两个理想, 那么

$$\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$$

证明 一方面, 由于 $I_1 \cap I_2 \subseteq I_1$, 所以 $\sqrt{I_1 \cap I_2} \subseteq \sqrt{I_1}$. 同理,$\sqrt{I_1 \cap I_2} \subseteq \sqrt{I_2}$. 故

$$\sqrt{I_1 \cap I_2} \subseteq \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$$

另一方面, 任取 $a \in \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$, 则存在 $k_1, k_2 \geq 1$ 使得 $a^{k_1} \in I_1, a^{k_2} \in I_2$. 因为

$$a^{k_1 k_2} = (a^{k_1})^{k_2} \in I_1, \quad a^{k_1 k_2} = (a^{k_2})^{k_1} \in I_2,$$

所以 $a^{k_1 k_2} \in I_1 \cap I_2$. 于是 $a \in \sqrt{I_1 \cap I_2}$. 故 $\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$. ■

定理 1.4.4　设 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 则 $Z(\mathfrak{p})$ 是不可约的. 换言之, 若存在理想 I_1, I_2 满足:

$$Z(\mathfrak{p}) = Z(I_1) \cap Z(I_2)$$

则要么 $Z(\mathfrak{p}) = Z(I_1)$, 要么 $Z(\mathfrak{p}) = Z(I_2)$

证明　根据 $Z(\mathfrak{p}) = Z(I_1) \cap Z(I_2) = Z(I_1 \cap I_2)$, 我们有 $\sqrt{\mathfrak{p}} = \sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$. 我们分两步来证明这个定理.

(1) 先证明 $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. 若 $a \in \sqrt{\mathfrak{p}}$, 则存在 $k \geq 1$ 使得 $a^k \in \mathfrak{p}$. 根据素理想的定义以及分解 $a^k = a \cdot a^{k-1} \in \mathfrak{p}$ 可得, 要么 $a \in \mathfrak{p}$, 要么 $a^{k-1} \in \mathfrak{p}$. 若 $a \notin \mathfrak{p}$, 则 $a^{k-1} \in \mathfrak{p}$. 再将 a^{k-1} 分解成 $a^{k-1} = a \cdot a^{k-2}$. 依次类推, 总能得到 $a \in \mathfrak{p}$. 所以 $\sqrt{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}$. 另一方面, 显然有 $\mathfrak{p} \in \sqrt{\mathfrak{p}}$. 所以 $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

(2) 其次证明, 要么 $\mathfrak{p} = \sqrt{I_1}$, 要么 $\mathfrak{p} = \sqrt{I_2}$. 由 (1) 的结论易得 $\mathfrak{p} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$. 于是

$$p \subseteq \sqrt{I_1}, p \subseteq \sqrt{I_2}$$

若 $p \subsetneq \sqrt{I_1}$ 且 $p \subsetneq \sqrt{I_2}$ 则存在 $a \in \sqrt{I_1} - \mathfrak{p}, b \in \sqrt{I_2} - \mathfrak{p}$ 使得 $ab \in \sqrt{I_1}, ab \in \sqrt{I_2}$. 所以

$$ab \in \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} = \mathfrak{p}$$

这与 $\mathfrak{p}$ 是素理想矛盾. 因此要么 $\mathfrak{p} = \sqrt{I_1}$, 要么 $\mathfrak{p} = \sqrt{I_2}$.

(2) 的结论这蕴含着, 要么 $Z(\mathfrak{p}) = Z(\sqrt{I_1}) = Z(I_1)$, 要么 $Z(\mathfrak{p}) = Z(\sqrt{I_2}) = Z(I_2)$. ■

定理 1.4.5　$Z(I)$ 可以分解成不可约解集合的并.

$$Z(I) = Z(\mathfrak{p}_1) \cup Z(\mathfrak{p}_2) \cup \cdots \cup Z(\mathfrak{p}_r)$$

这里 $Z(\mathfrak{p}_i)$ 都是不可约的, 且满足

$$Z(\mathfrak{p}_i) \not\supseteq \bigcup_{j \neq i} Z(\mathfrak{p}_j)$$

证明　设 $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k$, 这里 I_i 是准素的. 于是

$$\sqrt{I} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \cdots \cap \sqrt{I_k} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k$$

所以

$$Z(I) = Z(\sqrt{I}) = \bigcup_{i=1}^{k} Z(\mathfrak{p}_i)$$

因为 $Z(\mathfrak{p}_i)$ 是不可约的. 所以去掉分解中的多余的项, 即得定理. ■

注 1.4.2　上述的 $Z(\mathfrak{p}_i)$ 称为是 $Z(I)$ 的几何分支. 它与分解无关, 由 $Z(I)$ 唯一决定. 如果 $Z(\mathfrak{p})$ 不可约, 从几何意义上解释也就是说方程的解 $Z(\mathfrak{p})$ 要么是一个点, 或一条不可约的曲线, 要么是一个不可约的曲面, $\cdots$ ■

1.4.4　准素分解的唯一性

定义 1.4.4　如果 $\mathfrak{q}$ 准素, 那么 $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ 是素理想. 此时, 就称 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{p}$-准素理想.

引理 1.4.2　设 $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ 为 $\mathfrak{p}$-准素理想, 则 $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ 也是 $\mathfrak{p}$-准素理想.

证明　令 $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2$, 则

$$\sqrt{\mathfrak{q}}=\sqrt{\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2}=\sqrt{\mathfrak{q}_1}\cap\sqrt{\mathfrak{q}_2}=\mathfrak{p}$$

若 $xy\in\mathfrak{q}$, $x\notin\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2$. 不妨设 $x\notin\mathfrak{q}_1$, $xy\in\mathfrak{q}_1$. 因为 $\mathfrak{q}_1$ 是准素的, 所以 $y\in\sqrt{\mathfrak{q}_1}=\mathfrak{p}$. 所以 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{p}$-准素的. ■

定义 1.4.5 (极小准素分解)　称如下分解是极小准素分解, 如果满足

$$I=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r,\quad \sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$$

这里的 $\mathfrak{p}_i,\mathfrak{q}_i$ 满足

(1) $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots,\mathfrak{p}_r$ 两两不同.

(2) 对于任意的 i, 都有 $\bigcap\limits_{j\neq i}\mathfrak{q}_j\not\subseteq\mathfrak{q}_i$.

注 1.4.3　为了方便起见, 我们定义如下记号:

- $SpecA=\{\mathfrak{p}\lhd A\mid\mathfrak{p}$ 是素理想$\}$;
- 设 $I\lhd A$, $x\in A$. 定义 $(I:x)=\{a\in A\mid ax\in I\}$, 它也是 A 的理想. 显然 $I\subseteq(I:x)$. ■

定理 1.4.6 (唯一性定理)　设 A 是 Noether 环. I 是 A 的理想, 且 $I=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r$ 是极小准素分解. $\mathfrak{p}_i=\sqrt{\mathfrak{q}_i}\in SpecA$. 则

$$\{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots,\mathfrak{p}_r\}=\{\sqrt{(I:x)}\mid x\in A\}\cap SpecA$$

定理 1.4.6 证明不作要求, 同学可以参见参考书.

1.4.5　不可约分支的性质

引理 1.4.3　设 $\mathfrak{p}\lhd A$ 是素理想, $I_i\lhd A$. 分两类情形

(1) 若 $Z(\mathfrak{p})=Z(I_1)\cup Z(I_2)\cup\cdots\cup Z(I_r)$, 则存在 i, 使得 $Z(\mathfrak{p})=Z(I_i)$.

(2) 若 $Z(\mathfrak{p})\subseteq Z(I_1)\cup Z(I_2)\cup\cdots\cup Z(I_r)$, 则存在 i, 使得 $Z(\mathfrak{p})\subseteq Z(I_i)$.

证明　(1) 对 r 施归纳法. 当 $r=2$ 时, 已证. 我们考虑 $r>2$ 时的情形, 下设对于 $r-1$ 时定理成立. 若 $Z(\mathfrak{p})\neq Z(I_1)$, 则由

$$Z(\mathfrak{p})=Z(I_1)\cup Z(\bigcap_{i=2}^{r}I_i)$$

知

$$Z(\mathfrak{p})=Z(\bigcap_{i=2}^{r}I_i)=Z(I_2)\cup Z(I_3)\cup\cdots\cup Z(I_r)$$

由归纳假设, $Z(\mathfrak{p})=Z(I_i)$, 对于某个 i 成立.

(2) 同上, 可归结为 $r=2$ 时的情形. 易证

$$Z(I_1+I_2)=Z(I_1)\cap Z(I_2)$$

不妨设 $I_1 = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle, I_2 = \langle g_1, g_2, \cdots, g_k\rangle$. 那么 $I_1 + I_2$ 可记为:

$$I_1 + I_2 = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_k\rangle$$

于是

$$Z(\mathfrak{p}) \subseteq Z(I_1) \cup Z(I_2)$$

所以

$$Z(\mathfrak{p}) = (Z(I_1) \cap Z(\mathfrak{p})) \cup (Z(I_2) \cap Z(\mathfrak{p})) = Z(I_1 + \mathfrak{p}) \cup Z(I_2 + \mathfrak{p})$$

由 (1) 知, $Z(\mathfrak{p}) = Z(I_i + \mathfrak{p}) = Z(I_i) \cap Z(\mathfrak{p})$. 所以 $Z(\mathfrak{p}) \subseteq Z(I_i)$. ■

注 1.4.4 (引理 1.4.3 的代数形式) 设 $\mathfrak{p}$ 是不可约的.

(1) 若 $\mathfrak{p} = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_r$, 那么存在 i 使得 $\mathfrak{p} = I_i$;

(2) 若 $\mathfrak{p} \supseteq I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_r$, 那么存在 i 使得 $\mathfrak{p} \supseteq I_i$. ■

1.4.6 Z(I) 的几何分支

已知 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, 且 $Z(I) = Z(\mathfrak{p}_1) \cup Z(\mathfrak{p}_2) \cup \cdots \cup Z(\mathfrak{p}_r)$.

引理 1.4.4 存在 $Z(\mathfrak{p}_{i_1}), Z(\mathfrak{p}_{i_2}), \cdots, Z(\mathfrak{p}_{i_l})$ 使得

(1) $Z(\mathfrak{p}_{i_1}), Z(\mathfrak{p}_{i_2}), \cdots, Z(\mathfrak{p}_{i_l})$ 两两无包含关系;

(2) $\forall\, j = 1, 2, \cdots, r$, 存在 k_j 使得 $Z(\mathfrak{p}_j) \subseteq Z(\mathfrak{p}_{i_k})$.

事实上, 对于任意的 $Z(\mathfrak{p}) \subseteq Z(I)$, 都存在 $Z(\mathfrak{p}_{i_k})$ 使得 $Z(\mathfrak{p}) \subseteq Z(\mathfrak{p}_{i_k})$.

定义 1.4.6 上述的 $Z(\mathfrak{p}_{i_1}), Z(\mathfrak{p}_{i_2}), \cdots, Z(\mathfrak{p}_{i_l})$ 称为 $Z(I)$ 的(几何)分支，其它的称为嵌入分支.

$$Z(I) = Z(\mathfrak{p}_{i_1}) \cup Z(\mathfrak{p}_{i_2}) \cup \cdots \cup Z(\mathfrak{p}_{i_l})$$

$Z(\mathfrak{p}_{i_k})$ 也称为 $Z(I)$ 的不可约分支.

定理 1.4.7 若 $Z(\mathfrak{p}_{i_1}), Z(\mathfrak{p}_{i_2}), \cdots, Z(\mathfrak{p}_{i_l})$ 为几何分支, 则 $\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}, \cdots, \mathfrak{q}_{i_l}$ 由 I 唯一决定.

推论 1.4.5 $X = Z(I)$ 不可约 $\Longleftrightarrow l = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{I}$ 是素理想 $\Longleftrightarrow I(x) = \sqrt{I}$ 是素理想.

1.4.7 一些例子

例 1.4.3 $\mathfrak{m} \lhd A$ 是极大理想, $\mathfrak{q} \lhd A, \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$, 则 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的. ■

证明 设 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ 为极小准素分解, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$. 又因为

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$$

所以 $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}_i$, $i = 1, 2, \cdots, r$. 由 $\mathfrak{m}$ 的极大性可知 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i$, $i = 1, 2, \cdots, r$. 所以 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的. ■

例 1.4.4 $\mathfrak{m}$ 是极大理想, 则 $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}^k$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的. ■

例 1.4.5 设 $\mathfrak{q}=\left\langle x^m,y^n,x^ky^\delta\right\rangle \lhd K[x,y]$, 则 $\sqrt{\mathfrak{q}}=\langle x,y\rangle$ 是极大理想, 所以 $\mathfrak{q}$ 是准素的. ■

例 1.4.6 设 $A=K[x,y]$, $I=\left\langle x^2,xy\right\rangle \lhd A$.

$$q_1=\langle x\rangle, \quad q_2=\langle x,y\rangle^2=\left\langle x^2,xy,y^2\right\rangle$$

则 $I=q_1\cap q_2$ 是极小分解.而

$$\sqrt{\mathfrak{q}_1}=\mathfrak{q}_1=\mathfrak{p}_1, \quad \sqrt{\mathfrak{q}_2}=\langle x,y\rangle=\mathfrak{p}_2$$

显然 $\mathfrak{p}_1\subseteq\mathfrak{p}_2$, 因此 $Z(\mathfrak{p}_1)$ 是几何分支. ■

1.5 代数簇的有理函数域-方程组解的维数

1.5.1 仿射代数簇

定义 1.5.1 设 $I\lhd K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. K 是代数闭域, 则称 $Z(I)$ 是 K^n 中的代数系 (Algebraic System).

定义 1.5.2 当 I 为素理想时, $Z(I)$ 是不可约的, 称 $Z(\mathfrak{p})$ “代数簇”(algebraic variety).

命题 1.5.1 任何代数集可分解成有限个代数簇的并.

命题 1.5.2 当 I 中的生成元都是一次多项式时, $Z(I)$ 是不可约的.

证明 通过高斯消元法, 不妨设 I 中生成元为

$$\begin{cases} f_1 &= x_{d+1}-\sum\limits_{i=1}^{d} a_{1i}x_i \\ f_2 &= x_{d+2}-\sum\limits_{i=1}^{d} a_{2i}x_i \\ & \vdots \\ f_{n-d} &= x_n-\sum\limits_{i=1}^{d} a_{n-d,i}x_i \end{cases} \qquad (1)$$

若 $f(x_1,x_2\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in I$, 可用 (1) 带入方程, 对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in K$, 都有

$$f(x_1,\cdots,x_d,\sum_{i=1}^{d}a_{1i}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{d}a_{n-d,i}x_i)\cdot g(x_1,\cdots,x_d,\sum_{i=1}^{d}a_{1i}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{d}a_{n-d,i}x_i)\equiv 0 \quad (2)$$

由于 (2) 左边是 $K[x_1,x_2,\cdots,x_d]$ 中的多项式, 则要么

$$f(x_1,\cdots,x_d,\sum_{i=1}^{d}a_{1i}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{d}a_{n-d,i}x_i)\equiv 0$$

要么

$$g(x_1,\cdots,x_d,\sum_{i=1}^{d}a_{1i}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{d}a_{n-d,i}x_i)\equiv 0.$$

现将 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n), g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点

$$\begin{cases} x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} a_{1i} x_i \\ x_{d+2} = \sum_{i=1}^{d} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ x_n \quad = \sum_{i=1}^{d} a_{n-d,i} x_i \end{cases}$$

处泰勒展开, 则知, 要么 $f \in I$, 要么 $g \in I$. 所以 I 是素理想, $V(I)$ 是不可约的. ■

1.5.2 代数簇上的有理函数域

引理 1.5.1 $Z(I)$ 不可约当且仅当 $\sqrt{I}$ 是素理想.

证明 ($\Longleftarrow$) 若 $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ 是素理想, 则 $Z(\mathfrak{p}) = Z(\sqrt{I}) = Z(\mathfrak{p})$ 不可约.

($\Longrightarrow$) 若 $Z(I)$ 不可约, 反设 $\sqrt{I}$ 不是素理想. 不妨设

$$\sqrt{I} = \sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$$

我们知道

$$\sqrt{I} = \sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \iff Z(I) = Z(I_1) \cup Z(I_2)$$

由假设可知, 存在 $a \in \sqrt{I_1} - \sqrt{I}, b \in \sqrt{I_2} - \sqrt{I}$, 使得 $ab \in \sqrt{I}$. 换言之,

$$\sqrt{I_i} \supsetneq \sqrt{I}, \quad i = 1, 2$$

而

$$Z(I_i) \subsetneq Z(I) \iff \sqrt{I_i} \supsetneq \sqrt{I}, i = 1, 2$$

这表明 $Z(I)$ 可约, 与题设矛盾! ■

推论 1.5.1 已知 X 为代数集, 则 X 为代数簇当且仅当 $I(X)$ 是素理想.

以下设 X 为代数簇.

定义 1.5.3 设 $I(X) \lhd K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为素理想. 定义 X 上的有理函数 φ 如下,

$$\varphi = \left.\frac{h}{g}\right|_X \qquad g, h \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

且 $g \notin I(X)$, 即 g 在 X 上不恒为零. 若 $p \in X$, 使得 $g(p) \neq 0$, 则可定义有理函数

$$\varphi(p) = \frac{h(p)}{g(p)}$$

.

注 1.5.1 我们对两个有理函数的相等作如下规定: 两个有理函数 $\varphi_1 = \left.\frac{h_1}{g_1}\right|_X$, $\varphi_2 = \left.\frac{h_2}{g_2}\right|_X$ 相等当且仅当对于任意的 $p \in X$, 使得 $g_1(p)g_2(p) \neq 0$, 都有 $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$. 即在 φ_1, φ_2 都有定义的点上相等. 记为 $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

引理 1.5.2 $\varphi_1 = \left.\frac{h_1}{g_1}\right|_X = \varphi_2 = \left.\frac{h_2}{g_2}\right|_X$ 当且仅当 $h_1g_2 - h_2g_1 \in I(X)$ 是 X 上的零函数.

证明 ($\Longleftarrow$) 已知 $g_1(p)g_2(p) \neq 0$. 根据 $h_1(p)g_2(p) = h_2(p)g_1(p)$ 可得

$$\frac{h_1(p)}{g_1(p)} = \frac{h_2(p)}{g_2(p)}$$

也即 $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$. 由 p 的任意性, $\varphi_1 = \varphi_2$.

($\Longrightarrow$) 已知 $\varphi_1 = \left.\frac{h_1}{g_1}\right|_X, \varphi_2 = \left.\frac{h_2}{g_2}\right|_X$. 若 $\varphi_1 = \varphi_2$ 则对于 X 中满足 $g_1(p)g_2(p) \neq 0$ 的任意点 p, 都有

$$\frac{h_1(p)}{g_1(p)} = \frac{h_2(p)}{g_2(p)}$$

即 $h_1(p)g_2(p) - h_2(p)g_1(p) = 0$. 所以对于任意的 $p \in X$ 都有

$$g_1(p)g_2(p) \cdot (h_1(p)g_2(p) - h_2(p)g_1(p)) \equiv 0$$

故 $g_1g_2(h_1g_2 - h_2g_1) \in I(X)$. 又因为 $g_1g_2 \notin I(X)$, 所以 $h_1g_2 - h_2g_1 \in I(X)$. 即对任意的 p,

$$(h_1g_2 - h_2g_1)(p) \equiv 0$$

■

由上述引理可知, 同一个有理函数可能有不同的表示. 即 $\varphi = \left.\frac{h_1}{g_1}\right|_X = \left.\frac{h_2}{g_2}\right|_X$.

定义 1.5.4 如果存在表示 $\varphi = \left.\frac{h}{g}\right|_X$ 使得 $g(p) \neq 0$, 则称 φ 在 $p \in X$ 点处有定义. 我们所说的有理函数“φ 的定义域”是 φ 的有定义点的集合.

引理 1.5.3 $\varphi = \left.\frac{h}{g}\right|_X \equiv 0 \iff h \in I(X) \iff h$ 是 X 上的零函数.

证明 根据 $\varphi = \left.\frac{h}{g}\right|_X = \left.\frac{0}{1}\right|_X$ 当且仅当 $h \cdot 1 - 0 \cdot g \in I(X)$ 当且仅当 $h \in I(X)$. ■

记 $Rat(X)$ 为 X 上所有有理函数的全体. 则

引理 1.5.4 $Rat(X)$ 是一个域. 称为 X 的有理函数域.

证明 我们逐一验证域的公理, 设 $\varphi_i = \left.\frac{h_i}{g_i}\right|_X, i = 1, 2$

(1) $\varphi_1 + \varphi_2 = \left.\frac{h_1g_2 + h_2g_1}{g_1g_2}\right|_X \in Rat(X)$;

(2) $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \left.\frac{h_1h_2}{g_1g_2}\right|_X \in Rat(X)$;

(3) $\varphi_1 \neq 0$ 当且仅当 $h_1 \notin I(X)$;

(4) $\left.\frac{g_1}{h_1}\right|_X \in Rat(X)$ 为 φ_1 的逆元素.

所以 $Rat(X)$ 为域. ■

命题 1.5.3 若令 $u_1 = x_1|_X, u_2 = x_2|_X, \cdots, u_n = x_n|_X$ 则

$$Rat(X) = K(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 不是代数独立的, 即不是不定元. 满足一些代数关系

$$\varphi = \left.\frac{h(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|_X = \frac{h(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{g(u_1, u_2, \cdots, u_n)}$$

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I(X)$ 则 $f(u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0$.

例 1.5.1 当 I 是由一次多项式生成时

$$f_j = x_{d+j} - \sum_{i=1}^{d} a_{j_i} x_i, j = 1, 2, \cdots, n-d.$$

则

$$\begin{cases} u_{d+1} = \sum\limits_{i=1}^{d} a_{1i} u_i \\ u_{d+2} = \sum\limits_{i=1}^{d} a_{2i} u_i \\ \vdots \\ u_n = \sum\limits_{i=1}^{d} a_{n-d,i} u_i \end{cases}$$

那么

$$Rat(X) = K(u1, u2, \cdots, u_n) = K(u_1, u_2, \cdots, u_d, u_{d+1}, \cdots, u_n) = K(u_1, u_2, \cdots, u_d)$$

这里 $u_1, u_2, \cdots, u_d$ 是相互代数独立的. ■

类似的, 我们有如下定义.

定义 1.5.5 如果 $Rat(X)$ 中可以最多找到 d 个元 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d \in Rat(X)$ 使得它们是代数独立的, 即对任何非零多项式

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_d) \in K[y_1, y_2, \cdots, y_d]$$

$f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d) \neq 0$, 即 f 不为零函数. 则称 d 为 X 的维数(Dimension). 记为 $d = \dim X$.

命题 1.5.4 (Noether 正规化定理) 在 d-维代数簇 X 的函数域中

$$Rat(X) \cong K(y_1, y_2, \cdots, y_d)[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s]$$

其中 η_i 是 $K(y_1, y_2, \cdots, y_d)$ 上的代数元. 即满足

$$\eta_i^n + a_1 \eta_i^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

这里, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K(y_1, y_2, \cdots, y_d)$.

命题 1.5.5 (单扩张定理) 如果 K 是特征为零的域, 例如取 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. 则可取 $s = 1$. 即

$$Rat(X) \cong K(y_1, y_2, \cdots, y_d)[\eta_1]$$

1.6 Noether规范化定理-约化为规范方程

1.6.1 有限代数

定义 1.6.1 设 A, B 是两个交换环, $A \subseteq B$, 则称 B 是 A-代数 .

例 1.6.1 定义在环 K 上的多项式环$K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 称为 K-代数. ■

定义 1.6.2 如果存在有限个元 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 使得

$$B = A[b_1, b_2, \cdots, b_m] = \{\sum a_{i_1 i_2 \cdots i_m} b_1^{i_1} b_2^{i_2} \cdots b_m^{i_m} \mid a_{i_1 i_2 \cdots i_m} \in A\}$$

则称 B 是有限型的 A-代数.

定义 1.6.3 如果 $B = Ab_1 + Ab_2 + \cdots + Ab_m = \{\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \mid a_1, a_2, \cdots, a_m \in A\}$. 则称 B 是有限 A-代数.

定义 1.6.4 若 $b \in B$ 满足系数在 A 中的首一多项式方程, 即

$$b^n + a_1 n^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b + a_n = 0$$

则称 b 在 A 上整.

注 1.6.1 若一整系数多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 恒为零, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$. A 是交换环, 则对任何 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ 都有 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$. ■

例 1.6.2 考虑 $n \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})_{n \times n}$. 将 b_{ij} 看成不定元, 知有恒等式

$$B^* B - |B| \cdot E_n \equiv 0$$

根据注记 1.6.1 可知, 当 b_{ij} 取自交换环 A 时, 上等式仍然成立. ■

1.6.2 整性与有限性

定理 1.6.1 设 A, B, C 都是交换环, $A \subseteq B \subseteq C$.

(1) 若 B 是有限 A 代数,C 是有限 B 代数, 则 C 也是有限 A 代数;

(2) 若 $A \subset B$, B 是有限 A 代数, $b \in B$, 则 b 在 A 上整;

(3) 反之, 若 $b \in B$, $B \supset A$ 且 b 在 A 上整, 则 $A[b]$ 是有限 A 代数.

证明 (1) 设 $B = \sum_{i=1}^{m} Ab_i, C = \sum_{j=1}^{k} Bc_j$. 则

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} Ab_i c_j$$

又 $b_i c_j \in C$. 所以 C 是有限 A 代数.

(2) 设 $B = Ab_1 + Ab_2 + \cdots + Ab_m, b \in B$. 则 bb_i 可以写成 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 的线性组合, 系数在 A 中. 从而

$$\begin{pmatrix} bb_1 \\ bb_2 \\ \vdots \\ bb_m \end{pmatrix} = \mathscr{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

这就推出

$$(bE_m - \mathscr{A}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = 0 \qquad (I)$$

在 (I) 式两边同时乘上 $bE_m - \mathscr{A}$ 的伴随矩阵 $(bE_m - \mathscr{A})^*$, 根据

$$(bE_m - \mathscr{A})^*(bE_m - \mathscr{A}) = |bE_m - \mathscr{A}| \cdot E_m$$

立得

$$|bE_m - \mathscr{A}| \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = 0$$

又因为 $1 = a_1' b_1 + a_2' b_2 + \cdots + a_m' b_m$, 知

$$|bE_m - \mathscr{A}| \cdot 1 = \sum_{i=1}^{m} a_i' \cdot |bE_m - \mathscr{A}| \cdot b_i = 0$$

所以 $|bE_m - \mathscr{A}| = 0$, 即存在 $a_i \in A$, 使得 $b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1} b + a_m = 0$.

(3) 若 b 满足, $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. 则 $A[b] = A \cdot 1 + A \cdot b + \cdots + A \cdot b^{n-1}$, 它显然是有限 A 代数. ■

推论 1.6.1　若 $B \supset A, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 都在 A 上整. 则 $A[b_1, b_2, \cdots, b_m]$ 是有限 A 代数. 因此 $A[b_1, b_2, \cdots, b_m]$ 中任何元都在 A 上整.

定义 1.6.5　设 $A \subseteq B$. 如果 B 中的所有元都在 A 上整, 则称 B 在 A 上整.

命题 1.6.1　设 B 是有限 A 代数, 则 B 在 A 上整.

推论 1.6.2　若 C 在 B 上整, B 在 A 上整, 则 C 在 A 上整.

1.6.3　Noether 正规化

定理 1.6.2　设 K 为无限域. $A = K[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ 是 K 上的有限生成代数. 则存在 A 中的元 $z_1, z_2, \cdots, z_d$ 满足

(1) $z_1, z_2, \cdots, z_d$ 在 K 上代数无关. 即对于 K 上任何非零多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_d) \in K[x_1, x_2, \cdots, x_d]$$

都有 $f(z_1, z_2, \cdots, z_d) \neq 0$;

(2) 若令 $B = K[z_1, z_2, \cdots, z_d]$, 则 $A = B[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-d}]$ 是 B 上的有限扩张. 换言之, 即 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-d}$ 在 B 上整.

证明　如果 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 在 K 上代数无关, 则定理成立.　下设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 代数相关. 即存在非零多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使得 $f(u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0$. 由 Noether 技巧, 存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1} \in K$ 使得

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1 + \lambda_1 x_n, x_2 + \lambda_2 x_n, \cdots, x_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n)$$

且上式关于 x_n 的首项系数是非零常数. 可将 g 改写成

$$g = a_0 x_n^d + a_1 x_n^{d-1} + \cdots + a_d$$

这里, $a_0 \in K, a_0 \neq 0$, 且当 $i \geq 1$ 时, a_i 是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的多项式, 即

$$a_i = a_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in K[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$$

令 $u_n^* = u_n$. 当 $i \neq n$ 时, 令 $u_i^* = u_i - \lambda_i u_n$. 显然 $A = K[u_1, u_2, \cdots, u_n] = K[u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*]$. 带入可得下式,

$$g(u_1^*, \cdots, u_{n-1}^*, u_n^*) = f(u_1^* + \lambda_1 u_n^*, \cdots, u_{n-1}^* + \lambda_{n-1} u_n^*, u_n^*) = f(u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n) = 0$$

所以 u_n^* 在 $K[u_1^*, u_2^*, \cdots, u_{n-1}^*]$ 上整. 现在令 $\xi_1 = u_n^*, A_1 = K[u_1^*, u_2^*, \cdots, u_{n-1}^*]$. 则 $A = A_1[\xi_1]$, ξ_1 在 A_1 上整. 如果 $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_{n-1}^*$ 在 K 上代数无关, 则定理成立. 否则重复上述过程得到, $A_1 = A_2[\xi_2]$, ξ_2 在 A_2 上整. $A_2 = K[v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}]$. 由传递性, ξ_1 也在 A_2 上整. 这表明 $A = A_2[\xi_1, \xi_2]$. 有限步过后此过程必定终止, 即定理成立. ■

1.6.4　代数簇的函数域结构

例 1.6.3　已知 $Rat(X) = K(u_1, u_2, \cdots, u_n), u_i = x_i|_X$. 由于

$$K[u_1, u_2, \cdots, u_n] = K[z_1, z_2, \cdots, z_d][\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-d}]$$

从而

$$\begin{aligned} Rat(X) &= K(z_1, z_2, \cdots, z_d, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-d}) \\ &= K(z_1, z_2, \cdots, z_d)(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-d}) \\ &= F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-d}) \end{aligned}$$

由定理 1.6.2 可知, ξ_i 在域 F 上整. ■

引理 1.6.1　设 ξ 在 F 上整, 则 $F[\xi]$ 是域.

证明　设 ξ 的极小多项式为 $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) = m$. 则

$$F[\xi] = F + F\xi + \cdots + F\xi^{m-1}$$

对于任意的 $\eta \in F[\xi]$, 存在次数小于 m 的多项式 $g(x) \in F[x]$, 使得 $\eta = g(\xi)$. 当 $\eta \neq 0$ 时, $g(x) \neq 0$. 由于 $f(x)$ 不可约, 所以 $(f(x), g(x)) = 1$. 故存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

令 $x = \xi$, 则 $f(\xi) = 0$. 于是 $v(\xi)g(\xi) = 1$, 即 $v(\xi)\eta = 1$. 故 η 可逆, 所以 $F[\xi]$ 为域. ■

回顾 $Rat(X) = K[z_1, z_2, \cdots, z_d][\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-d}]$. 由上述引理可知维数的定义是合理的.

1.7 域的单扩张-约化为一个方程

1.7.1 分裂域

定义 1.7.1 设 F 为给定的域. $f(x) \in F[x]$ 为 $d \geq 1$ 次多项式. 则存在域 $K \supset F$, 它使 $f(x)$ 在 $K[x]$ 上分解成一次因式相乘. 即 K 包含 $f(x)$ 的所有的根. 这样的最小域扩张 K 称为 $f(x)$ 的分裂域(Splitting Field).

证明 (分裂域的存在性证明) 如果 $f(x)$ 是一次多项式相乘, 则 $K = F$. 下设 $f(x)$ 有一个次数 $d_1 > 1$ 的不可约因式 $f_1(x)$. 则 $K_1 = F[x]/\langle f_1(x)\rangle$ 为域. 它包含 F 作为子域, 且 $\alpha_1 = \bar{x} \in K_1$ 满足 $f_1(\alpha_1) = 0$. 故 α_1 为 $f_1(x)$ 的一个根. 从而 $f(x)$ 在 $K_1[x]$ 的分解比在 $F[x]$ 的分解多一个一次因式.

若 $f(x)$ 在 $K_1[x]$ 上的分解仍有一个次数大于 1 的不可约因式 $f_2(x)$. 同理, 可构造域 K_2 使

$$F \subset K_1 \subset K_2$$

$f_2(x)$ 在 $K_2[x]$ 上的分解中有一个一次因式. 这样一直作下去, 有限步后就得到 $f(x)$ 的分裂域 K

$$K = F[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$$

1.7.2 域的可分扩张

首先我们介绍数域上的一个重要性质.

命题 1.7.1 当域 F 的特征 $char\ F = 0$ 时, $F[x]$ 中的任何不可约多项式在分裂域中无重根.

证明 设 $f(x) \in F[x]$ 为 $d > 1$ 次不可约多项式, $f'(x)$ 是 $d-1$ 次多项式. 从而 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 无公共因子. 否则由 $f(x)$ 不可约知, $f(x)$ 为公因子, 这是不可能的. 从而 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素. 因此存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ 使得

$$f(x)u(x) + f'(x)v(x) = 1 \tag{1-1}$$

若 α 为 $f(x)$ 的重根, 则 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$. 这与 1-1 式矛盾. ■

注 1.7.1 当域 F 的特征不为零时, 上述结论不对. 接下来我们给出一个反例. ■

例 1.7.1 不妨设 $char\ F = p > 0$, 令 $f(x) = x^p - u$, 于是 $f'(x) \equiv 0$. 若 $f(x)$ 在 F 上没有根, 则 $f(x)$ 不可约. 否则, 不妨设

$$f(x) = x^p - u = g(x)h(x), \quad g(x), h(x) \in F[x], \quad \deg g(x) = a \geq 1, \quad \deg h(x) = b \geq 1$$

设 α 为 $f(x)$ 在扩域中的一个根, 则 $\alpha^p = u$, 从而在 $K = F[\alpha]$ 上有

$$f(x) = g(x)h(x) = x^p - \alpha^p = (x-\alpha)^p$$

所以 $g(x) = (x-\alpha)^a, h(x) = (x-\alpha)^b$. 这是在 $K[x]$ 上的分解. 从而由

$$(x-\alpha)^a = x^a - a\alpha x^{a-1} + \cdots \in F[x]$$

得到 $a\alpha \in F$. 由于 $a+b=p$, 所以 $1 \le a < p$. 又因为 F 为域, 故 p 为素数. 从而 $(a,p)=1$. 所以 a 在 F 中可逆, 这与 $\alpha \in F$ 产生矛盾. 所以 $f(x)$ 不可约, 但有重根. ■

定义 1.7.2 设 K/F 为扩域, $\alpha \in K$. 若存在非零多项式 $f(x) \in F[x]$ 使得 $f(\alpha) = 0 \quad (*)$, 则称满足 $(*)$ 式的 α 是 $\mathbb{F}$ 上的代数元. 满足 $(*)$ 式且次数最小的首一多项式 $f(x) \in F[x]$ 称为 α 的极小多项式.

命题 1.7.2 α 的极小多项式唯一, 且不可约.

定义 1.7.3 若 K 中的任何元在 F 上都是代数的, 则称 K 是 F 上的代数扩张(Algebraic Extension).

注 1.7.2 添加有限个代数元的扩张一定是代数扩张 ■

定义 1.7.4 设 K/F 为代数扩张. 如果 K 中任何元在 F 上的极小多项式都无重根. 则称 K/F 为可分扩张(Separable Extension).

1.7.3 有限单扩张

定义 1.7.5 若在域扩张 K/F 中, K 是 F 上的有限维向量空间, 则称 K 是 F 上的有限扩张.

引理 1.7.1 K/F 是有限扩张当且仅当 K 是 F 通过添加有限个代数元所得,

$$K = F[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$$

证明 $(\Longleftarrow)$ 作为 F-向量空间, 设 α_i 的极小多项式为 d_i. 则

$$K = L(\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\cdots\alpha_r^{n_r} \mid n_i \le d_i - 1, \forall\, i)$$

所以 K 有有限生成元. 故 K 是有限维 F 向量空间.

$(\Longrightarrow)$ 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 F-向量空间 K 的基, 这里 $\alpha \in K$. 作 F-线性映射

$$\begin{aligned} \alpha : K &\longrightarrow K \\ \beta &\longmapsto \alpha\beta \end{aligned}$$

在该映射下, 有

$$\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad A \in M_n(F)$$

设 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式. 则易知 $f(\alpha)=0$. 所以 α 是代数的. 故 K/F 为代数扩张. 易知

$$K=F[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$$

故引理得证. ■

定理 1.7.1　设 K/F 是有限可分扩张, 则存在 $\nu\in K$, 使得 $K=F[\nu]$(单扩张).

证明　设 $K=F[\alpha_1,\cdots,\alpha_m]$. 由归纳法, 不妨设 $m=2$, $K=F[\alpha,\beta]$. 设 $f(x),g(x)\in F[x]$ 是 α,β 的极小多项式. 设 $\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 $f(x)$ 在分裂域中的所有根, $\beta_1=\beta,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $g(x)$ 在分裂域中的所有根. 因 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ 可分, 所以它们两两不同. 设

$$S=\{\frac{\alpha_i-\alpha}{\beta-\beta_j}\mid i\neq 1,j\neq 1\}$$

取 $c\in F$, 但 $c\notin S$. 令 $\nu=\alpha+c\beta$. 我们要证明 $K=F[\nu]$. 易知 $F[\nu]\subset F[\alpha,\beta]$, 下证 $\alpha,\beta\in F[\nu]$. 只需要证: $\beta\in F[\nu]$, 即只要 β 在 $F[\nu]$ 上的极小多项式 $p(x)$ 是一次的即可.

反证, 若 $\deg p(x)>1$. 令 $h(x)=f(\nu-cx)\in F[\nu][x]$. 这样就得到

$$h(\beta)=f(\nu-c\beta)=f(\alpha)=0$$

因此 β 是 $h(x)$ 的一个根. 故 $p(x)\mid h(x),p(x)\mid g(x)$. 另一方面, 由于 $\deg p(x)>1$, $g(x)$ 无重根, 所以 $p(x)$ 无重根. 若 $p(x)$ 有一根 $\beta_j\neq\beta$, 它也是 $h(x)$ 的根, 即 $f(\nu-c\beta_j)=0$. 所以

$$\alpha_i=\nu-c\beta_j=\alpha+c\beta-c\beta_j$$

这就推出

$$c=\frac{\alpha_i-\alpha}{\beta-\beta_j}\in S$$

但这与 c 的选取是矛盾的. 所以 $\beta\in F[\nu]$, 这蕴含着 $\alpha\in F[\nu]$, 所以 $K=F[\alpha,\beta]=F[\nu]$. ■

1.7.4　代数簇双有理等价于一个超曲面

命题 1.7.3　设 X 是代数簇. 若基域 K 是特征为零的, 那么 $Rat(X)$ 是有理多项式域 $K(z_1,z_2,\cdots,z_d)$ 的有限扩张. 从而是单扩张,

$$Rat(X)=K(z_1,z_2,\cdots,z_d)[\eta]$$

定义 1.7.6　设 X,Y 是两个代数簇, 若 $Rat(X)\cong Rat(Y)$, 则称 X 与 Y 双有理等价(Birational Equivalence). 记为 $X \dashrightarrow Y$.

命题 1.7.4　若 X 与 Y 双有理等价, 那么 $\dim X=\dim Y=d$.

例 1.7.2　若 $Rat(X)=K(z_1,z_2,\cdots,z_d)[\eta]$, 其中 η 满足

$$z_{d+1}^m+r_1(z_1,z_2,\cdots,z_d)z_{d+1}^{m-1}+\cdots+r_m(z_1,z_2,\cdots,z_m)=0$$

消去系数的分母, 可得不可约多项式 $F(z_1,z_2,\cdots,z_d,z_{d+1})$ 使得 $F(z_1,z_2,\cdots,z_d,\eta)=0$. 令 Y 是 $F=0$ 定义的超曲面, 则 $Rat(Y)=K(v_1,v_2,\cdots,v_{d+1})$. 这里, $v_i=\overline{z_i}$. 从而 $\eta=\overline{z}_{d+1}$ 满足

$$\eta^m+r_1(v_1,v_2,\cdots,v_d)\eta^{m-1}+\cdots+r_m(v_1,v_2,\cdots,v_m)=0$$

所以 $Rat(Y)\cong Rat(X)$. 即 $X \dashrightarrow Y$. ■

通过上例, 我们可以抽象出一个一般性的定理.

定理 1.7.2　任何在特征为零的域上的代数簇都双有理等价于一个超曲面. 任何方程组在适当的双有理变换下都可化为一个方程.

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 1.1

第二章　解方程的代数理论

2.1　坐标函数环

2.1.1　坐标函数环的定义

定义 2.1.1　设 X 是不可约代数簇, $X \subset \mathbb{A}_k^n$

$$X: \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

记

$$I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle \lhd K[x_1, x_2, \cdots, x_n] = R$$

$$I(X) = \sqrt{I} = \{f \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid f \text{ 在 } X \text{ 上为零}\}$$

由于 X 不可约, 可定义 X 的有理函数域

$$Rat(X) = \{ \left.\frac{h(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|_X \mid g \text{ 在 } X \text{ 不恒为零}\}$$

注 2.1.1　一般情况下, $\varphi \in Rat(X)$ 的有理函数表示不唯一. 例如

$$h \equiv h' \mod I, \quad g \equiv g' \mod I$$

则

$$\varphi = \left.\frac{h}{g}\right|_X = \left.\frac{h'}{g'}\right|_X$$

定义 2.1.2　如果 $p \in X$, 且存在 $g \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, 使得

(1) $g(p) \neq 0$;

(2) $\varphi = \left.\frac{h}{g}\right|_X$.

则称 φ 在 p 点有定义, 也称 φ 在 p 点正. 定义

$$\mathcal{O}(X) = \{\varphi \in Rat(X) \mid \varphi \text{ 在 } X \text{ 上处处有定义}\}$$

显然, $\mathcal{O}(X)$ 是域 $Rat(X)$ 中的一个交换子环, 也是整环. 称 $\mathcal{O}(X)$ 为 X 的坐标函数环.

命题 2.1.1　坐标函数环有自然的环同态

$$\begin{aligned} \pi: K[x_1, x_2, \cdots, x_n] &\longrightarrow \mathcal{O}(X) \\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &\longmapsto f|_X \end{aligned}$$

根据定义 $\ker \pi = I(X) = \sqrt{I}$.

引理 2.1.1 π 是满同态.

证明 不妨设 $\varphi \in \mathcal{O}(X)$, $\varphi = \left.\frac{h}{g}\right|_X$. 由于 φ 在 X 上处处有定义, 从而对于任意的 $p \in X$, 存在 $g_p, h_p \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 使得 $g_p(p) \neq 0, \varphi = \left.\frac{h_p}{g_p}\right|_X$. 令

$$J = \langle g_p \mid p \in X \rangle \lhd K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

则知 $Z(J) = \emptyset$. 设

$$J = \langle g_1, g_2, \cdots, g_s \rangle, \quad g_i = g_{p_i}$$

由 $Z(J) = \emptyset$ 知, 存在 $u_1, u_2, \cdots, u_s \in R$ 使得

$$u_1 g_1 + u_2 g_2 + \cdots + u_s g_s = 1$$

而

$$\varphi = \left.\frac{h_i}{g_i}\right|_X, \quad i = 1, 2, \cdots, s$$

所以

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi \cdot 1 \\
&= \varphi \cdot (u_1 g_1 + u_2 g_2 + \cdots + u_s g_s) \\
&= u_1 \cdot \left.\tfrac{h_1}{g_1}\right|_X \cdot g_1 + u_2 \cdot \left.\tfrac{h_2}{g_2}\right|_X \cdot g_2 + \cdots + u_s \cdot \left.\tfrac{h_s}{g_s}\right|_X \cdot g_s \\
&= u_1 h_1|_X + u_2 h_2|_X + \cdots + u_s h_s|_X \\
&= (u_1 h_1 + u_2 g_2 + \cdots + u_s h_s)|_X
\end{aligned}$$

令 $f = u_1 h_1 + u_2 h_2 + \cdots + u_s h_s \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, 则 $\varphi = f|X = \pi(f)$. 所以 π 是满同态. ■

由环同态基本定理, 我们有如下推论.

推论 2.1.1 设 X 为不可约代数簇, 则

$$\mathcal{O}(X) \cong K[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I(X)$$

定义 2.1.3 设 $X = Z(I)$ 为任意代数集. 定义 X 的函数环为 $\mathcal{O}(X) = \dfrac{K[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{I(X)}$.

注 2.1.2 (1) X 不可约 $\Longleftrightarrow I(X)$ 是素理想 $\Longleftrightarrow \mathcal{O}(X)$ 是整环.

(2) $\mathcal{O}(X)$ 中没有非零幂零元. 也就是说 $\overline{f}^m = 0 \Longleftrightarrow \overline{f} = 0$.

(3) 若 $X = Z(I)$, 有时, 人们直接定义 $\mathcal{O}(X) = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I$. 此时, $\mathcal{O}(X)$ 可能有非零幂零元. 此时, “函数” 的性质就弱化了,“$\overline{f} = 0$” 与 “$\overline{f}$ 作为 X 上的函数为零” 并不一致.

关于 (2) 的证明: 首先 $\overline{f}^m = 0$ 当且仅当 $f^m \in I(X)$. 又 $I(X) = \sqrt{I}$, 所以 $\sqrt{I(X)} = I(X)$. 故 $f^m \in I(X)$ 当且仅当 $f \in I(X)$, 也就是当且仅当 $\overline{f} = 0$. ■

2.1.2 极大理想与方程的解

定义 2.1.4 设 R 为有单位元的交换环. I 是 R 的一个理想, 定义商环

$$\overline{R} = R/I = \{\overline{r} \mid r \in R\}$$

定义

$$Ideal_I(R) = \{J \lhd R \mid J \supset I\}$$

$$Ideal(\overline{R}) = \Sigma_{\overline{R}} = \{\overline{R} \text{ 的理想的集合}\}$$

注 2.1.3 若 $J \lhd R, J \supset I$, 请读者自行验证 $\overline{J} = \{\overline{r} \mid r \in J\} \lhd \overline{R}$. ■

定理 2.1.1 (1) 定义如下映射

$$\begin{aligned} \sigma : Ideal_I(R) &\longrightarrow\ Ideal(\overline{R}) \\ J\quad &\longmapsto \overline{J} \end{aligned}$$

则上述定义的映射 σ 是单且满的映射.

(2) J 是 R 的素理想当且仅当 $\overline{J}$ 是 $\overline{R}$ 的素理想.

(3) J 是 R 的极大理想当且仅当 $\overline{J}$ 是 $\overline{R}$ 的极大理想.

证明 (1) 先证明 σ 是满射. 设 $J' \lhd \overline{R}$, 令 $J = \{r \in R \mid \overline{r} \in J'\}$ 为 J' 在 R 中的提升.

$$\begin{aligned} &R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0 \\ &J\ \longrightarrow J' \end{aligned}$$

则 $J \supset I$ 且 $J \lhd R$. 易知 $\overline{J} = J'$, 故 σ 是满射.

再证明 σ 是单的. 设 $J_1, J_2 \in \Sigma_R(I)$. 即

$$J_1 \lhd R, J_2 \lhd R, J_i \supset I, i = 1, 2$$

若 $\sigma(J_1) = \sigma(J_2)$, 即 $\overline{J_1} = \overline{J_2}$. 设 $a_1 \in J_1$, 则 $\overline{a_1} \in \overline{J_1} = \overline{J_2}$. 所以存在 $a_2 \in J_2$, 使得 $\overline{a_1} = \overline{a_2}$. 故 $a_1 - a_2 \in I$. 所以 $a_1 \in J_2 + I = J_2$. 从而 $J_1 = J_2$. 单性得到验证.

(2),(3) 由定义, $\overline{J} = J/I$, 根据

$$\overline{R}/\overline{J} = \frac{R/I}{J/I} \cong R/J$$

但 $\overline{R}/\overline{J}$ 为整环当且仅当 R/J 是整环, $\overline{R}/\overline{J}$ 为域当且仅当 R/J 为域. 从而 (2)(3) 得证. ■

定理 2.1.2 方程组 $\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdots \\ f_m = 0 \end{cases}$ (I) 的解集 $Z(I)$ 与 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I$ 中的极大理想一一对应.

证明 设 K 为代数闭域. $R = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle \lhd R, \overline{R} = R/I$. 则 $\overline{R}$ 的极大理想的集合

$$\begin{aligned} &\max(\overline{R}) = \{\overline{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \text{ 为 } R \text{ 的极大理想}, \mathfrak{m} \supset I\} \\ &= \{\overline{\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle} \mid a_1, \cdots, a_n \in K, \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle \supset I\} \\ &= \{\langle \overline{x_1} - \overline{a_1}, \cdots, \overline{x_n} - \overline{a_n}\rangle \mid a_i \in K, (a_1, \cdots, a_n) \in Z(I)\} \\ &= \{\langle \overline{x_1} - a_1, \cdots, \overline{x_n} - a_n\rangle \mid (a_1, \cdots, a_n) \in Z(I)\} \xleftrightarrow{1:1} Z(I) \end{aligned}$$

定理得证. ■

结论 2.1.1 研究方程组 (I) 的解等价于研究商环 R/I 中的极大理想, 这里 R 就是多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

$$Z(I) = \max(R/I) = \max(R/\sqrt{I})$$

第二个等号成立是因为 $I \subset \mathfrak{m}$ 是极大理想当且仅当 $\sqrt{I} \subset \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$.

定理 2.1.3 若 $X = Z(I)$, 则 $X = \max(\emptyset(X))$.

结论 2.1.2 解方程的问题等价于研究域上的有限生成代数 $K[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ 的极大理想的问题. 不可约方程对应于整环 $K[u_1, u_2, \cdots, u_n]$. 当 X 不可约时, $Rat(X)$ 是 $\emptyset(X)$ 的分式域.

$$\varphi = \left.\frac{h(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|_X \in Rat(X) = \frac{h|_X}{g|_X}$$

这里,$g|_X$, $h|_X \in \emptyset(X)$.

定义 2.1.5 如果代数簇 X 与 Y 的坐标函数环 $\emptyset(X) \cong \emptyset(Y)$, 则称 X 与 Y 是同构的. 记为 $X \cong Y$.

命题 2.1.2 如果代数簇 X 与 Y 同构, 则 X 与 Y 双有理等价, 这蕴含着 $\dim X = \dim Y$.

2.2 环的整扩张

2.2.1 例子

例 2.2.1 考虑平面曲线 $C : x^2 - y^3 = 0$, 由于多项式 $x^2 - y^3$ 不可约, 所以 C 是不可约曲线. $I(C) = \langle x^2 - y^3 \rangle$. 考虑 C 的坐标函数环

$$\emptyset(C) = \mathbb{C}[x, y]/\left\langle x^2 - y^3 \right\rangle = \mathbb{C}[u, v]$$

这里 $u = \overline{x}$, $v = \overline{y}$, 且 $u^2 - v^3 = 0$. 而 $Rat(C) = \mathbb{C}(u, v)$, 令 $t = \frac{v^2}{u} \in Rat(C)$, 则

$$\begin{aligned} t^2 &= \left(\frac{v^2}{u}\right)^2 = \frac{v^4}{u^2} = \frac{u^2 \cdot v}{u^2} = v \\ t^3 &= \left(\frac{v^2}{u}\right)^3 = \frac{(v^3)^2}{u^3} = \frac{(u^2)^2}{u^3} = u \end{aligned}$$

所以

$$Rat(C) = \mathbb{C}(u, v) = \mathbb{C}(t), \quad \mathbb{C}[u, v] \subset \mathbb{C}[t] \subset Rat(C)$$

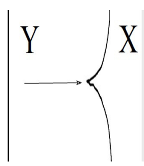
令 Y 是复直线, 如 $Y \subset \mathbb{C}^2 : x = 0$. 则

$$\emptyset(Y) = \mathbb{C}[x, y]/\langle x \rangle = \mathbb{C}[y] \cong \mathbb{C}[t]$$

不妨设 $\emptyset(Y) = \mathbb{C}[t]$, 从而

$$\emptyset(X) \subset \emptyset(Y) \subset Rat(X), \quad Rat(X) = Rat(Y).$$

所以 X 与 Y 双有理等价. 考虑如下 σ 映射:



$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (t^3, t^2) \end{aligned} \qquad 这里, \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

上述映射中, X 有奇点, Y 是光滑的.

$$\varnothing(X) = \mathbb{C}[u,v], \quad \varnothing(Y) = \varnothing(X)[t], \quad t^2 - v = 0, \quad t \in Rat(X)$$

满足方程

$$t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}(X)$$

上式中的 t 是 $\varnothing(X)$ 上的 “代数数”, $t = \sqrt{v}$. 例如, $\sqrt{2}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的代数数, 但它不是有理数. ■

2.2.2 环的整扩张

定义 2.2.1 设 A, B 是两个交换环, 满足 $A \subseteq B$.

(1) 如果存在 $a_i \in A$, 使得

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1} b + a_m = 0$$

则称 $b \in B$ 在 A 上整;

(2) 如果 B 中的元都在 A 上整, 则称 B 是 A 的整扩张(Integral Extension).

定理 2.2.1 设 $A \subset B$ 是两个交换环, $x \in B$, 则下列条件等价:

(1) x 在 A 上整;

(2) $A[x]$ 是有限生成 A-模;

(3) 存在 $A[x] \subset C$, C 为有限生成 A-模;

(4) 存在一个忠实的 $A[x]$ 模 M, 且 M 为有限生成 A-模.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 由于 x 在 A 上整, 知存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ 使得

$$x^n = -a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \cdots - a_n$$

从而知 $A[x] = A + Ax + \cdots + Ax^{n-1}$ 是有限生成 A-模.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 取 $C = A[x]$, 满足条件.

(3) $\Longrightarrow$ (4) 取 $M = C$, 因为 $A[x] \subset C$, 所以 C 为 $A[x]$ 模, 若有 $r \in A[x]$ 使得 $rC = 0$, 则由于 $1 \in A[x] \subset C$, 知 $r \cdot 1 = 0$. 所以 $r = 0$. 因此 M 是忠实的.

(4) $\Longrightarrow$ (1) 作线性映射

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto x \cdot m \end{aligned}$$

因为 M 是有限生成 A-模, 设 $M = Ae_1 + Ae_2 + \cdots + Ae_n$, 则有线性变换

$$\begin{pmatrix} xe_1 \\ xe_2 \\ \vdots \\ xe_n \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

设矩阵 F 的特征多项式为

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in A$$

因此

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

因此对于任意的 $m \in M$, 有

$$(\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + a_n)(m) = 0$$

这蕴含着

$$(x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)m = 0$$

由模 M 的忠实性, 显然有 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. ■

定理 2.2.2 设 A, B 是交换环, 满足 $A \subseteq B$. $x_1, x_2, \cdots, x_n \in B$ 且它们在 A 上整, 则 $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是有限生成 A-模.

定理 2.2.3 设 A, B 是两个交换环, 满足 $A \subset B$, C 是 A 在 B 中的整闭包, 即

$$C = \{x \in B \mid x \text{ 在 } A \text{ 上整}\}$$

则 C 为 B 的子环.

证明 若 $\alpha, \beta \in C$,则 $A[\alpha, \beta]$ 是有限生成 $A-$模. 令 $x = \alpha + \beta$, 则

$$A[x] \subseteq A[\alpha, \beta] \subseteq B$$

根据定理 2.2.1 可知, $\alpha + \beta$ 在 A 上整. 同理可知, $\alpha - \beta, \alpha \cdot \beta$ 在 A 上整. ■

我们叙述本节一个主要定理, 进而说明整性具有传递性.

定理 2.2.4 设 A, B, C 是环, 满足 $A \subseteq B \subseteq C$, 且 B 在 A 上整, C 在 B 上整, 则 C 在 A 上整.

证明 对于任意的 $x \in C$, 由 C 在 B 上整可知, 存在 $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$ 使得

$$x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

令 $B' = A[b_1, b_2, \cdots, b_n]$, 所以 B' 是有限生成 A-模. 又因 $B'[x]$ 是有限生成 $B'-$模, 所以 $B'[x]$ 为有限生成 A-模. 而 $A[x] \subseteq B'[x] \subset C$, 由定理 2.2.1, x 在 A 上整. ■

定理 2.2.5 设 $A \subseteq B$, C 是 A 在 B 中的整闭包, 则 C 在 B 中整闭, 即 C 在 B 中的整闭包为 C.

证明 设 $x \in B$, x 在 C 中整. 因 C 在 A 上整, 所以 x 在 A 上整. 又 C 是 A 在 B 中的整闭包, 故 $x \in C$. ■

2.2.3 整环的整闭包

定义 2.2.2 设 A 是整环, $Rat(A)$ 是 A 的分式域. $\widetilde{A}$ 是 A 在 $Rat(A)$ 中的整闭包, 则称 $\widetilde{A}$ 为 A 的整闭包(Integral Closure).

定理 2.2.6 唯一分解整环 A 是整闭的.

证明 设 $x=\frac{b}{a}\in Rat(A)$, $a,b\in A$, $\gcd(a,b)=1$. 若 $x\in\widetilde{A}$, 即 x 在 A 上整. 则存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$, 使得 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$. 将 $x=\frac{b}{a}$ 代入方程, 整理可得:

$$b^n+a_1b^{n-1}a+\cdots+a_na^n=0$$

移项,

$$-b^n=a(a_1b^{n-1}+\cdots+a_na^{n-1})$$

由上式可知 $a|\,b^n$. 又因为 $\gcd(a,b)=1$, 故 $a|1$, 即 a 可逆, 所以 $x\in A$. ■

2.2.4 环的整同态, 有限同态, 有限型同态

定义 2.2.3 设 $\varphi: A\longrightarrow B$ 是环同态,

(1) φ 是整同态当且仅当 B 在 $\varphi(A)$ 上整;

(2) φ 是有限同态当且仅当 B 是有限 $\varphi(A)(A)$-模;

(3) φ 是有限型同态当且仅当 B 是有限生成 A 代数或 $\varphi(A)$ 代数, 即

$$B=A[b_1,b_2,\cdots,b_m]=\varphi(A)[b_1,b_2,\cdots,b_m].$$

定理 2.2.7 φ 是有限同态当且仅当 φ 是整同态且是有限型同态.

证明 $(\Longrightarrow)$ 不妨设 $\varphi: A\hookrightarrow B$ 为嵌入映射. 在定理 2.2.1 的 (3) 中取 $C=B$, 则对任意的 $x\in B, A[x]\subset C=B$, 故 x 在 A 上整. 所以 B/A 是整扩张, φ 是整同态. φ 是有限型同态是显然的.

$(\Longleftarrow)$ 设 $B=A[b_1,b_2,\cdots,b_m]$, b_i 在 A 上整. 所以 B/A 为有限生成 A-模. ■

2.3 代数簇的正规化

2.3.1 正规化问题

设 X 是不可约代数簇. $A=\emptyset(X)$, $Rat(X)=Rat(A)$ 为 X 的函数域. 记 $\widetilde{A}$ 是 A 在 $B=Rat(X)$ 中的整闭包, 则知

$$\emptyset(X)=A\subseteq\widetilde{A}\subseteq Rat(X)$$

本节的目的: 证明存在代数簇 $\widetilde{X}$ 使得 $\emptyset(\widetilde{X})=\widetilde{A}$, 等价于证明 $\widetilde{A}$ 是有限生成的 K 代数. $\widetilde{A}=K[v_1,v_2,\cdots,v_N]$, 此时, $\widetilde{A}=K[x_1,x_2,\cdots,x_N]/I$. 所以 $\widetilde{X}=Z(I)$ 为代数簇.

我们最终要证明如下结论:

定理 2.3.1 (1) $\widetilde{A}$ 是有限 A-模;

(2) $\widetilde{A}=K[v_1,v_2,\cdots,v_N]$.

由 Noether 正规化定理, 不妨设

$$A = K[x_1, x_2, \cdots, x_d][\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m]$$

令 $R = K[x_1, x_2, \cdots, x_d]$, 则

$$Rat(A) = K(x_1, \cdots, x_d)[\eta_1, \cdots, \eta_m] = K(x_1, x_2, \cdots, x_d)$$

所以 $Rat(A)/Rat(R)$ 是有限扩张. 为了简单, 我们总假设: $char\ K = 0$.

注 2.3.1 上述 $char\ F = 0$ 的条件可换为, $Rat(A)/Rat(R)$ 为可分扩张. ■

为方便, 我们规定如下符号: $F = Rat(R), L = Rat(A)$.

2.3.2 迹 $tr(\cdot)$ 与域扩张

设 L/F 是域扩张, 有限扩张. $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m \in L$ 是 L 关于 F 的基. $x \in L$, 则可作线性映射 (F-线性),

$$\begin{aligned} T_x : L &\longrightarrow L \\ y &\longmapsto xy \end{aligned}$$

也用 T_x 表示它在基 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ 下的矩阵. 定义

$$tr(x) := tr(T_x) \in F$$
$$N(x) := det(T_x) \in F$$

命题 2.3.1 上述定义的 $tr(x), N(x)$ 与 L 的 F-基的选取无关. 且满足如下性质:

(1) $tr(x + y) = tr(x) + tr(y)$;

(2) $N(xy) = N(x)N(y)$;

(3) 若 $x \neq 0$,则 $N(x) \neq 0$.

我们记

$$f_x(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1\lambda^{m-1} + \sigma_2\lambda^{m-2} + \cdots + (-1)^m\sigma_m$$

为 T_x 的特征多项式, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m \in F$, 则知

$$x^m - \sigma_1 x^{m-1} + \sigma_2 x^{m-2} + \cdots + (-1)^m \sigma_m = 0$$

定理 2.3.2 设 $char\ F = 0$, $x \in L$. 如果对于任意的 $y \in L$, 都有 $tr(xy) = 0$, 则 $x = 0$.

证明 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为 T_x 的特征根. 则 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ 为特征根的对称多项式. 由条件知,

$$tr(x) = tr(x^2) = \cdots = tr(x^m) = 0, T_{xy} = T_x t_y$$

所以对于任意的 $k \geq 1, tr(T_x^k) = 0$. 故

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_m^k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

下证 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$. 否则, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为所有不同的非零特征根. 重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_s$. 则

$$m_1\lambda_1^k+m_2\lambda_2^k+\cdots+m_s\lambda_s^k=0,\quad \forall\, k\geq 1$$

把上式写成矩阵的形式即为

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_s^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_s\end{pmatrix}=0$$

系数矩阵的行列式等于

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

又因为 $char\ F=0$, 故 $m_1,m_2,\cdots,m_s=0$. 这与重数的概念矛盾. 所以 $\lambda_i=0,i=1,2,\cdots,m$. 故 $\sigma_i=0,i=1,2,\cdots,m$. 因此 $x^m-0\cdot x^{m-1}+\cdots+0\cdot(-1)^m=0$, 由 F 的特征为零得到 $x=0$. 证毕. ■

注 2.3.2 $tr(\cdot)$ 给出了 L 上的双线性型 $\langle,\rangle$:

$$\langle x,y\rangle=tr(xy)\in F$$

此双线性型为:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle: L\times L\longrightarrow F$$

由非退化的等价条件知, 矩阵 $(tr(\omega_i\omega_j))_{i,j\leq m}$ 的行列式不为零. ■

2.3.3 整元的特征多项式

设 R 是整闭整环, 例如取 $R=K[x_1,x_2,\cdots,x_d]$. A 是 R 的有限整扩张. 记 $F=Rat(R)$, 这里设 $char\ F=0$. 记 $L=Rat(A)=F[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m]$ 是有限扩张. $(A=\emptyset(X),L=Rat(X))$, $\widetilde{A}$ 是 A 的整闭包,

$$\widetilde{A}=\{u\in L\mid u\text{ 在 }A\text{ 上整 }\}=\{u\in L\mid u\text{ 在 }R\text{ 上整 }\}$$

定理 2.3.3 *设 $u\in L$. 若 $u\in A$, 则 u 在 F 上的特征多项式和极小多项式的系数全在 R 中.*

证明 设 $T_u: L\longrightarrow L$ 是 F-线性的. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 T_u 的特征根. 它们都在 F 的代数闭包之中.

$$f_u(\lambda)=\lambda^m-\sigma_1\lambda^{m-1}+\cdots+(-1)^m\sigma_m\in F[\lambda]$$

由于 $f_u(\lambda_i)=0,i=1,2,\cdots,m$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 在 F 上是代数元. 又因为 u 在 R 上整, 故知存在 R 上的首一多项式 $g(\lambda)\in R[\lambda]$, 使得 $g(u)=0$. 设 $p(\lambda)\in F[\lambda]$ 是 u 的极小多项式, 则 $p(\lambda)|g(\lambda)$, 从而 $g(\lambda_i)=0,i=1,2,\cdots,m$. 故 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 在 R 上整. 所以它的初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 也在 R 上整. 又因为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m\in F=Rat(R)$, 且 R 是整闭整环. 故知 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m\in R$. 同理, $p(\lambda)\in R[\lambda]$. ■

推论 2.3.1 $tr(u), N(u) \in R$.

2.3.4 $\widetilde{A}$ 的有限性证明

设 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m \in L$ 为 L 的 F-基. 由于 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ 在 F 上是代数的. $f_{\omega_i}(\lambda) \in F[\lambda]$. 去掉 $f_{\omega_i}(\lambda)$ 的系数的分母, 则知存在 $d_i \in R$, 使得 $d_i\omega_i$ 在 R 上整. 故不妨设 $\omega_1, \cdots, \omega_m \in \widetilde{A}$, 从而:

(1) $tr(\omega_i\omega_j) \in R$;

(2) $D := det(tr(\omega_i\omega_j)) \neq 0$.

定理 2.3.4 $\widetilde{A} \subset \dfrac{1}{D}(R\omega_1 + R\omega_2 + \cdots + R\omega_m)$.

证明 因 $\langle , \rangle$ 非退化, 选取 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 关于 $\langle , \rangle$ 的对偶基. $\omega_1^*, \cdots, \omega_m^* \in L$, 即 $tr(\omega_i\omega_j^*) = \delta_{ij}$. 对任何 $\omega \in \widetilde{A}$, 设

$$\omega = \xi_1\omega_1^* + \xi_2\omega_2^* + \cdots + \xi_m\omega_m^*, \quad \xi_i \in F$$

则知 $\xi_i = \langle \omega, \omega_i \rangle \in R$. 所以 $\widetilde{A} \subset R\omega_1^* + R\omega_2* + \cdots + R\omega_m^*$. 令

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \vdots \\ \omega_m^* \end{pmatrix} \qquad M = (a_{ij})$$

即 $\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}\omega_j^*$ 则知

$$tr(\omega_i\omega_k) = \sum_j a_{ij} tr(\omega_j^*\omega_k) = a_{ik} \in R$$

所以 $M = (tr(\omega_i\omega_j)), D = |M|$. 再根据

$$\begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \vdots \\ \omega_m^* \end{pmatrix} = \frac{1}{D} M^* \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} \subset \frac{1}{D}(R\omega_1 + R\omega_2 + \cdots + R\omega_m)$$

故 $\omega \in \dfrac{1}{D}(R\omega_1 + R\omega_2 + \cdots + R\omega_m)$, 也就是说 $\widetilde{A} \subset \dfrac{1}{D}(R\omega_1 + R\omega_2 + \cdots + R\omega_m)$. ■

推论 2.3.2 R 为 Noether 环时, 存在 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N \in \widetilde{A}$ 使得

$$\widetilde{A} = R\eta_1 + R\eta_2 + \cdots + R\eta_N$$

我们的情形, $R = K[x_1, x_2, \cdots, x_d]$ 是 Noether 的. 用到的结论是, Noether 环上的有限生成模的子模也是有限生成的.

2.3.5 Noether 环 R 上的有限生成模

定义 2.3.1 设 R 是 Noether 的, M 是有限生成 R-模, $N \subset M$, 则称 N 是 M 的 R-子模.

定理 2.3.5 N 是有限生成 R-模.

证明 存在 m 和模同态 $R^{\oplus m} \xrightarrow{\varphi} M \to 0$. 令 $N' = \varphi^{-1}(N)$, 则只需要证明 N' 有限生成即可. 所以可以设 $M = R^{\oplus m}$, 对 m 施归纳法. 当 $m = 1$ 时, N 为 R 的理想, 所以有限生成. 下设 $m > 1$, 且对秩小于 m 时, 结论都成立.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R^{m-1} & \xrightarrow{\psi} & R^m & \xrightarrow{\varphi} & R & \to & 0 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 0 & \to & N'' & \xrightarrow{\psi'} & N & \xrightarrow{\varphi'} & N' & \to & 0 \end{array}$$

由归纳假设, N' 和 N'' 都是有限生成 R-模. 不妨设 $e''_1, e''_2, \cdots, e''_s$ 为 N'' 的生成元, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 为 N' 的生成元. 设 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_t$ 为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 在 N 中的提升. 也就是说 $\varphi'(e'_i) = \eta_i$. 则易知 $e''_1, e''_2, \cdots, e''_s, e'_1, e'_2, \cdots, e'_t$ 为 N 的生成元. ■

2.4 局部化技巧

2.4.1 分式环

定义 2.4.1 (分式环的构造 I) 当 A 是整环, $\mathcal{S} \subset A$ 是乘法封闭子集, 即

(1) $0 \notin \mathcal{S}$, $1 \in \mathcal{S}$;

(2) 若 $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, 则 $s_1 s_2 \in \mathcal{S}$.

则可构造分式环(Ring of Fractions) $\mathcal{S}^{-1}A$, $A \subset \mathcal{S}^{-1}A \subset Rat(A)$.

$$\mathcal{S}^{-1}A = \{\frac{a}{s} \in Rat(A) \mid a \in A, s \in \mathcal{S}\}$$

定义 2.4.2 (分式环的构造 II) 当 A 是任意的环, $\mathcal{S} \subset A$ 是乘法封闭子集, 即

(1) $1 \in \mathcal{S}$;

(2) 若 $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, 则 $s_1 s_2 \in \mathcal{S}$.

我们也可构造一个环 $\mathcal{S}^{-1}A$. 方法如下:

在 $(A, \mathcal{S})$ 中定义等价关系:

$$(a, s) \sim (b, t)$$

当且仅当存在 $u \in \mathcal{S}$, 使得 $(at - bs)u = 0$. 我们用 $\dfrac{a}{s}$ 表示 (a, s) 的等价类,

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Longleftrightarrow \exists u \in \mathcal{S}, (at - bs)u = 0$$

定义 $\mathcal{S}^{-1}A = \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in \mathcal{S}\}$ 中的 "$+, -, \times$" 运算

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$$

可以验证, 上述定义与等价类 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}$ 中的代表元 a, s, b, t 的选取无关. $\mathcal{S}^{-1}A$ 成为环, 称为 "分式环".

命题 2.4.1 (分式环同态) 有环同态

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow \mathcal{S}^{-1}A \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

此同态有如下性质

(1) 它不一定是单同态;

(2) 对于任意的 $s \in \mathcal{S}, f(s) = \frac{s}{1}$ 可逆;

(3) $f(a) = 0$ 当且仅当存在 $u \in \mathcal{S}$, 使得 $ua = 0$. 特别地, $\mathcal{S}^{-1}A = 0 \Longleftrightarrow 0 \in \mathcal{S}$.

例 2.4.1 $\mathfrak{p} \lhd A$ 为素理想时, $\mathcal{S} = A - \mathfrak{p}$ 为乘法封闭子集. 记 $A_{\mathfrak{p}} = \mathcal{S}^{-1}A$.

(1) $f \in A, \mathcal{S} = \{1, f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}$, 记 $A_f = \mathcal{S}^{-1}A$;

(2) 若 $I \lhd A$, 则 $\mathcal{S} = 1 + I$ 是乘法封闭子集, $\mathcal{S}^{-1}A$. ■

2.4.2 分式模

设 M 是 A-模, $\mathcal{S}, A$ 定义同上, 则我们可按照如下方法构造分式模 $\mathcal{S}^{-1}M$:

定义 2.4.3 (分式模的构造) 首先我们在 $M \times \mathcal{S}$ 上定义等价关系 $\sim$:

$$(m, s) \sim (m', s') \Longleftrightarrow \exists\, t \in \mathcal{S}, \text{使得 } t(sm' - s'm) = 0$$

用 $\frac{m}{s}$ 表示 (m, s) 的等价类.

$$\mathcal{S}^{-1}M = \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in \mathcal{S}\}$$

满足

(1) $\dfrac{m}{s} + \dfrac{m'}{s'} := \dfrac{s'm + sm'}{ss'}$;

(2) $\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{m'}{s'} := \dfrac{am'}{ss'}$.

则 $\mathcal{S}^{-1}M$ 是 $\mathcal{S}^{-1}A$-模, 也是 A—模. 同样有记号 $M_{\mathfrak{p}}, M_f$ 等.

命题 2.4.2 (分式模同态) 设 $\alpha: M \longrightarrow N$ 是 A-模同态.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{-1}\alpha: \mathcal{S}^{-1}M &\longrightarrow \mathcal{S}^{-1}N \\ \frac{m}{s} &\longmapsto \frac{\alpha(m)}{s} \end{aligned}$$

若 $\beta: N \longrightarrow M'$ 为模同态. 则 $\mathcal{S}^{-1}\beta \circ \mathcal{S}^{-1}\alpha = \mathcal{S}^{-1}(\beta \circ \alpha)$.

定理 2.4.1 $\mathcal{S}^{-1}$ 是正合函子. 即如果 $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$ 在 M 处正合, 则 $\mathcal{S}^{-1}M' \xrightarrow{\mathcal{S}^{-1}\alpha} \mathcal{S}^{-1}M \xrightarrow{\mathcal{S}^{-1}\beta} \mathcal{S}^{-1}M''$ 在 $\mathcal{S}^{-1}M$ 处也正合.

证明 (1) $\mathcal{S}^{-1}\beta \circ \mathcal{S}^{-1}\alpha = \mathcal{S}^{-1}(\beta \cdot \alpha) = \mathcal{S}^{-1}(0) = 0$. 所以 $\mathrm{Im}\mathcal{S}^{-1}\alpha \subseteq \ker \mathcal{S}^{-1}\alpha$.

(2) 设 $\frac{m}{s} \in \ker \mathcal{S}^{-1}\beta, m \in M$, 这就推出 $\frac{\beta(m)}{s} = 0$, 所以存在 $t \in \mathcal{S}$, 使得

$$t\beta(m) = \beta(tm) = 0$$

因此,

$$tm \in \ker \beta = \mathrm{Im}\alpha$$

即存在 $m' \in M'$ 使得 $tm = \alpha(m')$. 于是

$$\frac{m}{1} = \frac{\alpha(m')}{t}, \quad \frac{m}{s} = \frac{\alpha(m')}{ts}$$

这表明

$$\frac{m}{s} = \mathcal{S}^{-1}\alpha(\frac{m'}{ts}) \in \mathrm{Im}\mathcal{S}^{-1}\alpha$$

所以 $\mathrm{Im}\mathcal{S}^{-1}\alpha = \ker \mathcal{S}^{-1}\beta$. 证毕. ■

易验证下列命题:

命题 2.4.3 对于任意的 A-模 M, N

- $\mathcal{S}^{-1}(M+N) = \mathcal{S}^{-1}M + \mathcal{S}^{-1}N$
- $\mathcal{S}^{-1}(M \cap N) = \mathcal{S}^{-1}M \cap \mathcal{S}^{-1}N$
- $\mathcal{S}^{-1}A$-模同构: $\mathcal{S}^{-1}(M/N) \cong \mathcal{S}^{-1}M/\mathcal{S}^{-1}N$.

2.4.3 局部性质

定义 2.4.4 环 A(或 A-模 M) 的性质 P 叫做局部性质, 如果下断言成立: A (或者 M) 具有性质 P 当且仅当对任何素理想 $\mathfrak{p} \lhd A$, $A_{\mathfrak{p}}$ (或者 $M_{\mathfrak{p}}$) 具有性质 P.

定理 2.4.2 设 M 为 A-模. 则以下条件等价:

(1) $M = 0$;

(2) 对所有素理想 $\mathfrak{p} \lhd A$, $M_{\mathfrak{p}} = 0$;

(3) 对所有极大理想 $\mathfrak{m} \lhd A, M_{\mathfrak{m}} = 0$.

在证明这个定理以前, 我们先介绍如下引理.

引理 2.4.1 设 $I \lhd A, I \neq A$. 则存在极大理想 $\mathfrak{m} \lhd A$, 使得 $I \subseteq \mathfrak{m}$.

证明 我们用两种方法证明.

(1) 设 A 为 Noether 环, 若 I 不包含在任何极大理想之中, 则 I 不极大. 所以存在

$$I_2 \lhd A, \quad I_2 \neq A$$

使得

$$I = I_1 \subsetneq I_2 \lhd A, \quad I_2 \neq A$$

同理, I_2 也不含在任何极大理想之中, 所以存在

$$I_3 \lhd A, I_3 \neq A$$

使得

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \lhd A$$

一直下去, 得到 A 的一个不稳定的理想升链, 与 Noether 性矛盾.

(2) 令 Σ 是 A 中包含 I 的所有真理想的集合. $I \in \Sigma$, 所以 $\Sigma \neq \emptyset$. Σ 中按照包含关系引入次序, 应用 Zom 引理, 需要验证 Σ 中的每个链在 Σ 中都有上界.

设 $\{I_\alpha \mid \alpha \in T\}$ 是 Σ 中的一个链. 即任意的 $\alpha, \beta \in T$, 要么 $I_\alpha \subseteq I_\beta$, 要么 $I_\beta \subseteq I_\alpha$. 令 $J = \bigcup\limits_{\alpha \in J} I_\alpha$. 则知

$$J \lhd A, \quad J \neq A, \quad J \supset I$$

所以 $J \in \Sigma$. 且对任意的 $I_\alpha \subseteq J, \alpha \in T$. 故 J 为 $\{I_\alpha\}$ 的上界. 从而 Σ 中有极大元 $\mathfrak{m}$. ■

现在我们来证明定理 2.4.2.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) 是显然. 我们来证明 (3) $\Longrightarrow$ (1). 若 $M \neq 0$, 取 $x \in M, x \neq 0$. 令 $I = \{r \in A \mid rx = 0\} = Ann(x)$. 则 $I \neq \langle 1 \rangle, I \lhd A$. 根据引理 2.4.1, 存在极大理想 $\mathfrak{m} \lhd A$ 使得 $I \subseteq \mathfrak{m}$. 而 $M_{\mathfrak{m}} = 0$, 所以根据 $\frac{x}{1} \in M_{\mathfrak{m}}$, 有 $\frac{x}{1} = 0$. 即存在 $s \in A - \mathfrak{m}$, 使得 $sx = 0, s \notin \mathfrak{m}$, 这就推出 $s \notin I$, 与 I 的定义矛盾. 所以 $M = 0$. ■

推论 2.4.1 设 $a \in A$, a 不可逆. 则存在极大理想 $\mathfrak{m} \lhd A$, 使得 $a \in \mathfrak{m}$.

定理 2.4.3 设 $\varphi: M \longrightarrow N$ 是 A-模同态, 则以下条件等价:

(1) φ 是单的;

(2) 对于任意的素理想 $\mathfrak{p} \lhd A$, $\varphi_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ 是单的;

(3) 对于任意的极大理想 $\mathfrak{m} \lhd A$, $\varphi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N_{\mathfrak{m}}$ 是单的.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 根据 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$ 正合, $0 \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$ 正合. 所以 $\varphi_{\mathfrak{p}}$ 是单的.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 证明是平凡的.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 由 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ 正合, $M' = \ker\varphi$, 则 $0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$ 正合. 所以 $(\ker\varphi)_{\mathfrak{p}} = \ker\varphi_{\mathfrak{p}}$. 因为对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$, $\varphi_{\mathfrak{m}}$ 是单的, 所以 $\ker\varphi_{\mathfrak{m}} = 0$. 故对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$, $M'_{\mathfrak{m}} = 0$. 所以 $M' = 0$, 故 φ 是单的. ■

注 2.4.1 将上述定理中的单性条件换成满性, 定理依然成立. ■

2.4.4 分式环的性质

定理 2.4.4 设 $J \lhd \mathcal{S}^{-1}A$, 则存在 $I \lhd A$, 使得

$$J = \mathcal{S}^{-1}I = \{\frac{a}{s} \mid a \in I, s \in \mathcal{S}\}$$

证明　构造下列映射,

$$\begin{aligned}\varphi: A &\longrightarrow \mathcal{S}^{-1}A\\ a &\longmapsto \frac{a}{1}\end{aligned}$$

令 $I=\varphi^{-1}(J)$, 则

$$\frac{a}{s}\in\mathcal{S}^{-1}I,\quad a\in I,\quad \frac{a}{s}=\frac{1}{s}\cdot\frac{a}{1}\in J$$

所以 $\mathcal{S}^{-1}I\subset J$.

反之, 根据 $\frac{b}{s}\in J$, 我们有 $\frac{s}{1}\cdot\frac{b}{s}\in J$. 故 $\frac{b}{1}\in J$. 所以 $b\in I$, 即 $J=\mathcal{S}^{-1}I$. ■

推论 2.4.2　若 A 为 Noether 环, 则 $\mathcal{S}^{-1}A$ 也是 Noether 的.

证明　设 $J=\mathcal{S}^{-1}I$, $I=\langle a_1,a_2,\cdots,a_s\rangle$. 因此 $J=\langle\frac{a_1}{1},\frac{a_2}{1},\cdots,\frac{a_s}{1}\rangle$, 所以 $\mathcal{S}^{-1}A$ 是 Noether 的. ■

定理 2.4.5　记 $\overline{A}=A/I$, $\overline{\mathcal{S}}$ 为 $\mathcal{S}$ 在 $\overline{A}$ 中的像. 则 $\overline{\mathcal{S}}$ 是乘法封闭子集, 且有

$$\mathcal{S}^{-1}A/\mathcal{S}^{-1}I\cong\overline{\mathcal{S}}^{-1}\overline{A}$$

证明　设 $\overline{A}$ 的元为 $\overline{a}$, $a\in A$, 则我们构造如下映射:

$$\begin{aligned}\psi:\mathcal{S}^{-1}A &\longrightarrow \overline{\mathcal{S}}^{-1}\overline{A}\\ \frac{a}{s} &\longmapsto \frac{\overline{a}}{\overline{s}}\end{aligned}$$

定义与 s,a 的选取无关. 故知

$$\begin{aligned}\ker\psi &=\{\tfrac{a}{s}\mid\tfrac{\overline{a}}{\overline{s}}=0\}\\ &=\{\tfrac{a}{s}\mid\exists\, t\in\mathcal{S},\ \bar{t}\cdot\overline{a}=0\}\\ &=\{\tfrac{a}{s}\mid\exists\, t\in\mathcal{S},\ ta\in I\}\\ &=\mathcal{S}^{-1}I\end{aligned}$$

根据同态基本定理, 命题显然得证. ■

2.5　代数簇的维数理论

2.5.1　不可约真子簇的维数

设 $X\subset\mathbb{A}_k^n$ 是 d 维不可约代数簇. $Y\subsetneq X$ 是不可约真子代数簇. 从而 $I(X),I(Y)$ 是素理想, 且 $Y\subsetneq X\Longleftrightarrow I(Y)\supsetneq I(X)$.

定理 2.5.1　设 X,Y 不可约. $Y\subsetneq X$, 则 $\dim X>\dim Y$.

在证明该定理以前, 我们先做一些准备工作.

注 2.5.1　我们用 $\overline{f}$ 表示 f 限制在子簇中的同态, 即

$$\begin{aligned}\emptyset(X) &\longrightarrow \emptyset(Y)\\ f &\longmapsto f|_Y=\overline{f}\end{aligned}$$

■

引理 2.5.1 限制同态 $\emptyset(X) \longrightarrow \emptyset(Y)$ 是满同态, 但不是单同态.

证明 根据 $\emptyset(X) = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I(X), \emptyset(Y) = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I(Y)$, 限制映射等价于自然同态,

$$\frac{K[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{I(X)} \longrightarrow \frac{K[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{I(Y)}$$

因为 $I(Y) \supsetneq I(X)$, 所以此同态是满的, 但不是单同态. ■

由 Noether 正规化定理,

$$\emptyset(X) = K[x_1, x_2, \cdots, x_d][\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m]$$

这里 $x_1, x_2, \cdots, x_d$ 在 K 上代数无关, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 在 $R = K[x_1, x_2, \cdots, x_d]$ 上整. 从而

$$\emptyset(Y) = K[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d][\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2, \cdots, \overline{\eta}_m]$$

.

引理 2.5.2 上述的 $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d$ 在 K 上代数相关.

证明 反证, 设 $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d$ 在 K 上代数无关. 取 $u \in \emptyset(X)$, 使得 $\overline{u} = \overline{0}$. 由于将 $\emptyset(X) = R[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m]$ 限制映射在 R 上是单的. 故 $u \notin R$. 又 $\emptyset(X)$ 在 R 上整, 从而存在 $m \geq 2$, $r_1, r_2, \cdots, r_m \in R$ 使得

$$u^m + r_1 u^{m-1} + \cdots + r_{m-1} u + r_m = 0$$

不妨设 m 是满足上条件的最小整数, $m \geq 2$. 我们现在从 $\emptyset(Y)$ 的角度考虑上等式,

$$\overline{u}^m + \overline{r}_1 \overline{u}^{m-1} + \cdots + \overline{r}_{m-1} \overline{u} + \overline{r}_m = 0$$

由于 $\overline{u} = 0$, 所以 $\overline{r}_m = 0$. 又因为该限制映射是单射, 所以 $r_m = 0$. 所以

$$u(u^{m-1} + r_1 u^{m-2} + \cdots + r_{m-1}) = 0$$

根据 $\emptyset(X)$ 无零因子且 $u \neq 0$, 我们有 $u^{m-1} + r_1 u^{m-2} + \cdots + r_{m-1} = 0$. 这与 m 的极小性矛盾. 所以 $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d$ 必定代数相关. 证毕. ■

现在我们来证明定理 2.5.1.

证明 由 Noether 正规化定理, 存在 $\overline{d} < d$, 使得

$$K[\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_d] = K[y_1, \cdots, y_{\overline{d}}][\xi_1, \cdots, \xi_{d-\overline{d}}]$$

其中, $y_1, \cdots, y_{\overline{d}}$ 在 K 上代数无关, ξ_i 在 $K[y_1, \cdots, y_{\overline{d}}]$ 上整. 由整性的传递性, $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2, \cdots, \overline{\eta}_m$ 在 $K[y_1, \cdots, y_{\overline{d}}]$ 上整. 所以

$$\emptyset(Y) = K[y_1, \cdots, y_{\overline{d}}][\xi, \cdots, \xi_{d-\overline{d}}, \eta_1, \cdots, \eta_m]$$

由维数的定义,显然有 $\dim Y = \overline{d} < d = \dim X$. ■

推论 2.5.1 对于 $A = K[x_1, x_2, \cdots, x_d]$ 中的任何两个素理想 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}'$, 有

$$\dim Z(\mathfrak{p}) > \dim Z(\mathfrak{p}')$$

证明 令 $X=Z(\mathfrak{p}),Y=Z(\mathfrak{p}')$, 由 $X>Y$ 知, $\dim X>\dim Y$. 此证明是平凡的. ■

命题 2.5.1 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中最长的素理想链的长度为 $n=\dim\mathbb{A}_k^n$.

证明 注意到 $Z(0)=\mathbb{A}_k^n$, 且 $\emptyset(\mathbb{A}_k^n)=K[x_1,x_2\cdots,x_n]$. 由定义, $\dim\mathbb{A}_k^n=n$,故 $\mathbb{A}_k^n$ 不可约真子簇真包含的链的长度小于或等于 n. 用素理想的语言, 即 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中素理想的链的长度 $m\le n$.

$$P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_m$$

另一方面,

$$\langle 0\rangle\subsetneq\langle x_1\rangle\subsetneq\langle x_1,x_2\rangle\subsetneq\cdots\subsetneq\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$$

是长度为 n 的素理想链. 因此 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中最长的素理想链的长度为 $n=\dim\mathbb{A}_k^n$. ■

问题 2.5.1 $\emptyset(X)$ 中是否存在长度为 $\dim X=d$ 的素理想链? 答案是肯定的.

定义 2.5.1 定义环 A 的 Krull 维数

$$\dim A:=\max\{n\mid A\text{ 中存在长度为 }n\text{ 的素理想链. }\}$$

根据定义, 易得 $\dim\emptyset(X)=\dim X$.

2.5.2 分式环中的素理想链

命题 2.5.2 商环 $\overline{A}=A/I$ 中的素理想链和 A 中包含 I 的素理想链一一对应.

证明 商环 $\overline{A}=A/I$ 中的理想都有形式

$$\overline{J},\quad J\lhd A,\quad I\subset J$$

且以下两个集合之间有一一对应的关系,

$$\{\overline{A}\text{ 中的理想}\}\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\{A\text{ 中包含 }I\text{ 的理想}\}$$

- 保持包含关系;
- 因为 $\overline{A}/\overline{J}\cong A/J$, 所以保持 “素” 性;
- 保持极大性.

所以, 商环 $\overline{A}$ 中的素理想链和 A 中包含 I 的素理想链一一对应.

$$I\subset\mathfrak{p}_0\subsetneq\mathfrak{p}_1\subsetneq\cdots\subsetneq\mathfrak{p}_m\lhd A$$

证毕. ■

命题 2.5.3

$$\mathcal{S}^{-1}I=\mathcal{S}^{-1}A\Longleftrightarrow I\cap\mathcal{S}\neq\emptyset$$

证明 在分式环 $\mathcal{S}^{-1}A$ 中, 对于理想 $\mathcal{S}^{-1}I,I\lhd A$ 及环同态基本定理

$$\mathcal{S}^{-1}A/\mathcal{S}^{-1}I\cong\overline{\mathcal{S}}^{-1}\overline{A}$$

故 I 是素理想可知, 由此 $\overline{A}$ 是整环, 所以 $\mathcal{S}^{-1}I$ 也是素的. 故 $\mathcal{S}^{-1}I=\mathcal{S}^{-1}A\Longleftrightarrow I\cap\mathcal{S}\neq\emptyset$. ■

引理 2.5.3 $\mathcal{S}^{-1}A$ 中的素理想与 A 中和 $\mathcal{S}$ 不相交的素理想一一对应, 且保持包含关系.

证明 若 $\mathfrak{p} \lhd A$, $\mathfrak{p} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, 则 $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p} \neq \langle 1 \rangle$. 由上知 $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}$ 也是素理想.

反之, 设 $\mathfrak{q} \lhd \mathcal{S}^{-1}A$ 是素理想, 建立映射 $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{S}^{-1}A$, 令 $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, 则知 $\mathfrak{p}$ 是素的, 且

$$\mathfrak{q} = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}$$

若 $\mathfrak{p}_i \lhd A$ 是素理想, 则 $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{S} = \emptyset$. 如果 $\mathcal{S}^{-1}(\mathfrak{p}_1) = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_2$, 设对于任意的 $a_1 \in \mathfrak{p}_1$,

$$\frac{a_1}{1} \in \mathcal{S}^{-1}P_1 = \mathcal{S}^{-1}P_2$$

所以存在 $s \in \mathcal{S}$, $a_2 \in \mathfrak{p}_2$, 使得 $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{s}$, 即对于某个 $u \in \mathcal{S}$,

$$u(a_2 - a_1 s) = 0$$

故

$$a_1(us) = ua_2 \in \mathfrak{p}_2$$

又因为 $us \in \mathcal{S}$, 故 $us \notin \mathfrak{p}_2$. 因此 $a_1 \in \mathfrak{p}_2$. 即 $P_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$. 同理可得 $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$. 故 $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. 因此此映射是一一对应的. ■

2.5.3 $\emptyset(X)$ 的素理想链

引理 2.5.4 设 $A \subseteq B$ 是整环, B 在 A 上整. 则 A 为域当且仅当 B 为域.

证明 若 A 为域. 对于 B 中任意的非零元 b, 存在 $m \geq 1$, $a_1, a_2, \cdots, a_m \in A$ 使得

$$b^m + a_1 b^{m-1+\cdots+a_{m-1}b+a_m=0}$$

不妨设 m 是满足上条件的最小数, 则由 B 是整环, 没有零因子可知 $a_m \neq 0$. 从而

$$b(b^{m-1} + a_1 b^{m-2} + \cdots + a_{m-1}) = -a_m$$

是可逆的. 因此 b 可逆, 所以 B 为域.

反过来, 已知 B 为域. 令 $a \in A, a \neq 0$. 则 $a^{-1} \in B, a^{-1}$ 在 A 上整. 所以有

$$(a^{-1})^n + a'_1(a^{-1})^{n-1} + \cdots + a'_{n-1}(a^{-1}) + a'_n = 0$$

上式两端同乘以 a^n 于是有

$$1 + a(a'_1 + a'_2 a + \cdots + a'_n a^{n-1}) = 0$$

所以

$$a^{-1} = -(a'_1 + a'_2 a + \cdots + a'_n a^{n-1}) \in A$$

故 A 为域. ■

引理 2.5.5 设 A, B 为环, 满足 $S \subseteq B$. 若 B 在 A 上整, $\mathfrak{q} \lhd B$ 是素理想, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$,则 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 且 $\mathfrak{p}$ 极大当且仅当 $\mathfrak{q}$ 极大.

证明 由单同态 $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$, 所以由 $B/\mathfrak{q}$ 为整环, 从而 $A/\mathfrak{p}$ 为整环. 因此 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 又因为 $\bar{b} \in B/\mathfrak{q}$ 且 b 在 A 上整. 所以

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \quad a_i \in A$$

把 $A/\mathfrak{p}$ 看成是 $B/\mathfrak{q}$ 的子环, 用 $\bar{\cdot}$ 表示剩余类, 则

$$\bar{b}^m + \bar{a}_1\bar{b}^{m-1} + \cdots + \bar{a}_m = 0$$

其中 $\bar{a}_i \in A/\mathfrak{p}$, 所以 $\bar{b}$ 在 $A/\mathfrak{p}$ 上整. 故 $B/\mathfrak{q}$ 在 $A/\mathfrak{p}$ 上整. 根据引理 2.5.4, $A/\mathfrak{p}$ 为域当且仅当 $B/\mathfrak{q}$ 为域. 即 $\mathfrak{p}$ 极大当且仅当 $\mathfrak{q}$ 极大. ■

引理 2.5.6 设 A, B 为环, $S \subseteq B$. 若 B 在 A 上整, $\mathfrak{q} \lhd B$ 是素理想, $\mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{q}$ 是素理想, 且 $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$.

证明 令 $\mathcal{S} = A - \mathfrak{p}$, 则 $\mathcal{S}^{-1}B$ 在 $\mathcal{S}^{-1}A$ 上整, 设 $\frac{b}{s} \in \mathcal{S}^{-1}B$, 则

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

所以

$$(\frac{b}{s})^n + \frac{a_1}{s}(\frac{b}{s})^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{s^n} = 0$$

$$\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p} = \mathcal{S}^{-1}(\mathfrak{q} \cap A) = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{q} \cap \mathcal{S}^{-1}A = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{q}' \cap \mathcal{S}^{-1}A$$

$\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}$ 在 $\mathcal{S}^{-1}A$ 中极大. 故 $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{q}'$ 在 $\mathcal{S}^{-1}B$ 中极大. 所以 $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{q}'$. 设 $y \in \mathfrak{q}'$, 则 $\frac{y}{1} \in \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{q}$, 故存在 $x \in \mathfrak{q}, s \in \mathcal{S}$ 使得 $\frac{y}{1} = \frac{x}{s}$, 存在 $u \in \mathcal{S}$, 使得

$$u(sy - x) = 0, \quad (su)y = us \in \mathfrak{q}$$

又因为 $su \notin \mathfrak{q}$, 故 $y \in \mathfrak{q}$. 所以 $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$. 即 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$. ■

引理 2.5.7 设 A, B 为环, 满足 $A \subseteq B$. 若 B 在 A 上整, $\mathfrak{p} \lhd A$ 是素理想, 则存在素理想 $\mathfrak{q} \lhd B$ 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

证明 令 $\mathcal{S} = A - P$, 则 $\mathcal{S}^{-1}B$ 在 $\mathcal{S}^{-1}A$ 上整. 根据下图关系可知

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{S}^{-1}A \arrow[r, "\mathcal{S}^{-1}\tau"] & \mathcal{S}^{-1}B
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}^{-1}A$ 有唯一的素理想 $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}$. $\mathcal{S}^{-1}B$ 中存在极大理想 $\mathfrak{m}$, $\beta^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{q}$ 素理想,

$$(\mathcal{S}^{-1}\tau)^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}$$

是极大理想. 而

$$\mathfrak{q} \cap A = \tau^{-1}(\mathfrak{q}) = \alpha^{-1}(\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$$

所以 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. ■

定理 2.5.2 (上升定理) 设 A, B 为环,满足 $A \subseteq B$. 且 B/A 是整环.

$$\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

是 A 的素理想升链,

$$\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m \ (m < n)$$

是 B 的素理想升链. 则可扩充 $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ 为素理想链, $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ 使得 $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A, i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 可设 $n=2, m=1$. $\overline{A}=A/\mathfrak{p}_1, \overline{B}=B/\mathfrak{q}_1$. 则 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$ 是整环,$\overline{B}/\overline{A}$ 整. $\overline{\mathfrak{p}}_2\neq\overline{0}$ 在 $\overline{B}$ 上的提升 $\overline{\mathfrak{q}}_2\neq 0$ 满足 $\overline{\mathfrak{q}}_2\cap\overline{A}=\overline{\mathfrak{p}}_2$, $\mathfrak{q}_2\supsetneq\mathfrak{q}_1$, 有 $\mathfrak{q}_2\cap A=\mathfrak{p}_2$. ■

推论 2.5.2 $\emptyset(X)$ 中有长度为 $d=\dim X$ 的素理想链.

证明 $B=\emptyset(X)=A[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m]$, 在 $A=K[x_1,x_2,\cdots,x_d]$ 上整, A 中有长度为 d 的素理想链. 故 $B=\emptyset(X)$ 中也有长度为 d 的素理想链. ■

例 2.5.1 $\dim\mathbb{Z}=1, \langle 0\rangle\subsetneq\langle\mathfrak{p}\rangle$. R 为主理想整环, 但不为域. 则 $\dim R=1$. ■

2.6 整闭整环上的整扩张

2.6.1 整闭性是局部性质

定理 2.6.1 设 A, B 是环, 满足 $A\subseteq B$. 设 C 是 A 在 B 中的整闭包. $\mathcal{S}\subset A$ 是一乘法封闭的子集. 则 $\mathcal{S}^{-1}C$ 是 $\mathcal{S}^{-1}A$ 在 $\mathcal{S}^{-1}B$ 中的整闭包.

证明 已知 $\mathcal{S}^{-1}C$ 在 $\mathcal{S}^{-1}A$ 上整. 反之, 如果 $\frac{b}{s}\in\mathcal{S}^{-1}B$ 在 $\mathcal{S}^{-1}A$ 上整, 那么我们有整方程

$$(\frac{b}{s})^n+(\frac{a_1}{s_1})(\frac{b}{s})^{n-1}+\cdots+\frac{a_n}{s_n}\quad (*)$$

其中, $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A, s_i\in\mathcal{S}$, $\forall\, i$.

令 $t=s_1s_2\cdots s_n$, 用 $(st)^n$ 乘以方程 (*) 可得:

$$(bt)^n+a_1'(bt)^{n-1}+\cdots+a_n'=0, a_i'\in A$$

所以 $bt\in C$, $\frac{b}{s}=\frac{bt}{st}\in\mathcal{S}^{-1}C$. ■

推论 2.6.1 设 A 是整环, A 整闭, 则 $A_{\mathfrak{p}}$ 整闭.

定理 2.6.2 A 整环, 则下列条件:

(1) A 是整闭的;

(2) 对每个素理想 $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ 是整闭的;

(3) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}}$ 是整闭的.

证明 设 $F=Rat(A)$. C 是 A 在 F 中的整闭包. $f: A\longrightarrow C$ 是包含映射. 则 A 整闭 $\Longleftrightarrow f$ 是满的 $\Longleftrightarrow$ 对于任何的 $\mathfrak{m}$, $f_{\mathfrak{m}}$ 满 $\Longleftrightarrow f_{\mathfrak{m}}$ 是满的. 再由定理 2.6.1 可知, (1)(2)(3) 等价. ■

2.6.2 理想上的整元

定义 2.6.1 设 A, B 是环, 满足 $A\subseteq B$. 且 B 在 A 上整. $I\lhd A$, $b\in B$. 如果 b 的整方程,

$$b^n+a_1b^{n-1}+\cdots+a_{n-1}b+a_n=0$$

中的系数 $a_i\in I$. 则称 b 在 I 整. 记

$$Int_I(B)=\widetilde{I}(B)=\{b\in B\mid b\text{ 在 }I\text{ 上整. }\}$$

定理 2.6.3 设 A, B 是环, 满足 $A \subseteq B$. 且 B 在 A 上整. $I \lhd A$, 则 $\widetilde{I}(B) = \sqrt{IB} = Int_I(B)$

证明 若 $b \in \widetilde{I}$, 则

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b + a_n = 0, a_i \in I$$

所以, $b^n \in IB$, $b \in \sqrt{IB}$.

反之, 如果 $b \in \sqrt{IB}$, 则存在 $n > 0$, 使得

$$b^n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_m b_m, a_i \in I, b_i \in B$$

由于 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 在 A 上整. 故 $M = A[b_1, b_2, \cdots, b_m]$ 是有限生成 A-模.

$$b^n M \subseteq IM$$

b^n 在生成元下的矩阵的系数属于 I. 从而矩阵的特征多项式

$$\lambda^k + a'_1 \lambda^{k-1} + \cdots + a'_k = 0, a'_i \in I$$

它是 b^n 的化零方程. 所以 $b \in \widetilde{I}(B)$. ■

定理 2.6.4 设 A, B 是整环, 满足 $A \subseteq B$. A 整闭, B 在 A 上整. $I \lhd A$, $F = Rat(A)$, $b \in \widetilde{I}(B)$. 设

$$f_b(\lambda) = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \cdots + k_n$$

是 b 在 F 上的极小多项式. 则 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \sqrt{I}$.

证明 由于 $b \in \widetilde{I} = \sqrt{IB}$, 存在整方程

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1} b + a_m = 0, a_1, a_2, \cdots, a_m \in I$$

记 $g(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_m$. 作为 $F[\lambda]$ 中的元, $f_b(\lambda) \mid g(\lambda)$. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $f_b(\lambda)$ 的根. 从而 $g(\lambda_i) = 0$. 所以 $\lambda_i \in \widetilde{I}$. 因为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的多项式, 且 $\widetilde{I}$ 是理想, 所以 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \widetilde{I}$. 故 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 在 A 上整, $k_i \in F = Rat(A)$, 又因为 A 整闭, 所以 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in A$. 又因为 $k_i \in \widetilde{I}$, 故存在 $n_i > 0$,使得

$$k_i^{n_i} + a'_1 k_i^{n_i - 1} + \cdots + a'_{n_i} = 0, a'_j \in I$$

所以 $k_i^{n_i} = -a'_1 k_i^{n_i - 1} - \cdots - a'_{n_i} \in I$, $k_i \in \sqrt{I}$. ■

推论 2.6.2 若在定理 2.6.4 中, 若取 $I = A$, 则知 B 的元在 F 上的极小多项式的系数都在 A 中.

注 2.6.1 B 的元作为 $Rat(B)/Rat(A)$ 上的特征多项式的系数也在 A 中. ■

2.6.3 构造素理想

定理 2.6.5 A 是环, $I \lhd A$, $\mathcal{S}$ 是 A 中的乘法封闭子集. 如果 $I \cap \mathcal{S} = \emptyset$. 则存在素理想 $\mathfrak{p} \lhd A$, 使得 $I \subseteq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

证明 令 $\Sigma = \{J \lhd A \mid J \supset I, J \cap S = \emptyset\}$, 则因 $I \in \Sigma$, $\Sigma \neq \emptyset$. 又 Σ 关于包含关系成偏序集, 且任何全序子集 $\{J_\alpha \mid \alpha \in T\}$ 有上界 $J = \bigcup_{\alpha \in I} J_\alpha \in \Sigma$. 故 Σ 有极大元 $\mathfrak{p}$. 下证 $\mathfrak{p}$ 为素理想.

设 $f, g \in A$. $f, g \notin \mathfrak{p}$. 则因

$$\mathfrak{p} + \langle f \rangle \supset I, \quad \mathfrak{p} + \langle g \rangle \supset I$$

且 $\mathfrak{p}$ 极大, 即 $\mathfrak{p} + \langle f \rangle, \mathfrak{p} + \langle g \rangle$ 又都不在 Σ 之中, 因此

$$(\mathfrak{p} + \langle f \rangle) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset, \quad (\mathfrak{p} + \langle g \rangle) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

现在设

$$s_1 = a_1 + fr_1, \quad s_2 = a_2 + gr_2, \quad a_1, a_2 \in P, \quad r_1, r_2 \in A, \quad s_1, s_2 \in S$$

那么

$$fgr_1r_2 = (s_1 - a_1)(s_2 - a_2) \equiv s_1 s_2 \mod \mathfrak{p}$$

这里 $s_1 s_2 \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, 所以 $s_1 s_2 \notin \mathfrak{p}$. 于是 $fg \notin \mathfrak{p}$, 故 $\mathfrak{p}$ 是素理想. ■

2.6.4 下降定理

设 A, B 是环, 满足 $A \subseteq B$, B 在 A 上整.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \subsetneq & \mathfrak{q}_{-1} & \subseteq & \mathfrak{q}_0 & \subsetneq & \mathfrak{q}_1 & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{q}_n & \subseteq & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
\cdots & \subsetneq & \mathfrak{p}_{-1} & \subsetneq & \mathfrak{p}_0 & \subsetneq & \mathfrak{p}_1 & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{p}_n & \subsetneq & \cdots
\end{array}$$

$\mathfrak{q}_0$ 是 $\mathfrak{p}_0$ 的提升. $\mathfrak{q}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$.

(1) 上升定理说, 上面右式可补成素理想的上升链.

(2) 下降定理说, 在 A 是整闭整环, B 也是整环的情况下, 左边也可补成下降的素理想链.

定理 2.6.6 (下降定理) 设 A, B 是整环, 满足 $A \subseteq B$, A 是整闭的. $\mathfrak{p}_i \lhd A$ 是素理想, $\mathfrak{q}_1 \lhd B$ 也是素理想. $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap A$. 那么存在素理想 $\mathfrak{q}_2 \lhd B$, 使得 $\mathfrak{q}_2 \subsetneq \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$.

在证明定理 2.6.6 之前, 我们要做一些准备工作. 首先作如下符号的规定:

令 $\mathcal{S}_1 = A - \mathfrak{p}_1$, $\mathcal{S}_2 = A - \mathfrak{p}_2$, $T_1 = B - \mathfrak{q}_1$. 令 $T_2 = \mathcal{S}_2 T_1 = \{s_2 t_1 \mid s_2 \in \mathcal{S}_2, t_1 \in T_1\}$. 则 T_2 是 B 中的乘法封闭子集.

引理 2.6.1 $\mathfrak{p}_2 B \cap T_2 = \emptyset$.

证明 反证, 不妨设 $b \in \mathfrak{p}_2 B \cap T_2$, 则 $b \in \widetilde{\mathfrak{p}}_2 = \sqrt{\mathfrak{p}_2 B}$, b 在 $\mathfrak{p}_2$ 上整. 若记 $F = Rat(A)$, $f_b(\lambda) = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_n$ 为 b 在 F 上的极小多项式. 则已证 $k_i \in \sqrt{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{p}_2$.

另一方面, $b = s_2 t_1$, $s_2 \in \mathcal{S}_2$, $t_1 \in T_1$,

$$(s_2 t_1)^n + k_1 (s_2 t_1)^{n-1} + \cdots + k_n = 0$$

即

$$t_1^n + \frac{k_1}{s_2} t_1^{n-1} + \cdots + \frac{k_n}{s_2^n} = 0$$

记

$$g(\lambda) = \lambda^n + \frac{k_1}{s_2} \lambda^{n-1} + \cdots + \frac{k_{n-1}}{s_2^{n-1}} \lambda + \frac{k_n}{s_2^n}$$

使得 $g(t_1)=0$, $t_1\in B$. 如果 $h(t_1)=0$, $h(\lambda)\in F[\lambda]$, 则

$$t_1^m+k_1't_1^{m-1}+\cdots+k_m'=0,\quad k_i'\in F$$

则

$$(s_2t_1)^m+s_2k_1'(s_2t_1)^{m-1}+\cdots+s_2^mk_m'=0$$

得到 b 的一个 m 次化零多项式. 所以 $m\geq n$, 故 $g(\lambda)$ 是 t_1 的极小多项式, 从而

$$\frac{k_i}{s_2^i}\in\sqrt{A}=A$$

即存在 $a_i\in A$, 使得 $k_i=a_is_2^i$. 已证 $k_i\in\mathfrak{p}_2$, $s_2\notin\mathfrak{p}_2$, 故 $\mathfrak{q}_i\in\mathfrak{p}_2$. 又因为

$$g(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_m,\quad g(t_1)=0$$

所以 t_1 在 $\mathfrak{p}_2$ 上整. 故

$$t_1\in\widetilde{\mathfrak{p}}_2=\sqrt{\mathfrak{p}_2B}\subset\sqrt{\mathfrak{p}_1B}=\sqrt{(\mathfrak{q}_1\cap A)B}\subset\sqrt{\mathfrak{q}_1B}=\sqrt{\mathfrak{q}_1}=\mathfrak{q}_1$$

与 $t_1\in B-\mathfrak{q}_1$, 矛盾. ■

我们来证明 定理 2.6.6.

证明　用素理想的存在定理, 存在 $\mathfrak{q}_2\lhd B$ 素理想, 使得 $\mathfrak{q}_2\supset\mathfrak{p}_2B$, $\mathfrak{q}_2\cap T_2=\emptyset$. 因为 $T_2\supset T_1$, 所以 $\mathfrak{q}_2\cap T_1=\emptyset$. 故 $\mathfrak{q}_2\subseteq\mathfrak{q}_1$. 又因为 $T_2\supset\mathcal{S}_2$, 所以 $\mathfrak{q}_2\cap\mathcal{S}_2=\emptyset$.

$$\mathfrak{q}_2\cap(A-\mathfrak{p}_2)=\emptyset,\quad(\mathfrak{q}_2\cap A)\cap(A-\mathfrak{p}_2)=\emptyset$$

所以 $\mathfrak{q}_2\cap A\subset\mathfrak{p}_2$.

另一方面,

$$\mathfrak{q}_2\cap A\supseteq\mathfrak{p}_2B\cap A\supseteq\mathfrak{p}_2\cap A=\mathfrak{p}_2$$

所以 $\mathfrak{q}_2\cap A=\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2\neq\mathfrak{p}_1$,这就推出 $\mathfrak{q}_2\subsetneq\mathfrak{q}_1$. ■

从 B 的素理想链作限制可得 A 的素理想链: $\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}_2$.

$$\begin{aligned}&\cdots\subsetneq\mathfrak{q}_{-2}\subsetneq\mathfrak{q}_{-1}\subsetneq\mathfrak{q}_0\subsetneq\mathfrak{q}_1\subsetneq\mathfrak{q}_2\subsetneq\cdots\\\Longrightarrow&\cdots\subsetneq\mathfrak{p}_{-2}\subsetneq\mathfrak{p}_{-1}\subsetneq\mathfrak{p}_0\subsetneq\mathfrak{p}_1\subsetneq\mathfrak{p}_2\subsetneq\cdots\end{aligned}$$

故当 A,B 都是整环, 满足 $A\subseteq B$ 且 A 整闭时, A 与 B 中的素理想链可相互交换, 因此 $\dim A=\dim B$.

2.7 补充内容

2.7.1 引进新记号

以下设 A 是 C 的子环, $\mathfrak{a}\lhd A$ 为理想.

定义 2.7.1　$Int_{\mathfrak{a}}(C)=\{b\in C\mid b\text{ 在 }\mathfrak{a}\text{ 上整. }\}$

定义 2.7.2　设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathfrak{a}$, 则称 $f(x)$ 为 $\mathfrak{a}$-多项式.

定义 2.7.3 A 在其分式域 $F = Rat(A)$ 中的整闭包记为:

$$\widetilde{A} = Int_A(F)$$

公式 2.7.1 设 $\mathcal{S} \subseteq A$ 为乘法封闭子集, 则

- $\mathcal{S}^{-1}Int_A(C) = Int_{\mathcal{S}^{-1}A}(\mathcal{S}^{-1}C)$;
- 当 $\mathcal{S} \cap \mathfrak{a} = \emptyset$ 时, $\mathcal{S}^{-1}Int_{\mathfrak{a}}(C) = Int_{\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{a}}(\mathcal{S}^{-1}C)$.

公式 2.7.2 设 $\mathfrak{p} \lhd A$ 为素理想, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, 则

- $(Int_A(C))_{\mathfrak{p}} = Int_{A_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}})$
- $(Int_{\mathfrak{p}}(C))_{\mathfrak{p}} = Int_{a_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}})$

公式 2.7.3 设 $A \subseteq B$ 为整扩张, $\mathfrak{p} \lhd A$,则 $Int_{\mathfrak{p}}(B) = \sqrt{\mathfrak{p}B}$.

证明 b 在 $\mathfrak{p}$ 上整时, 存在 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathfrak{a}$, 使得

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1}b + a_m = 0$$

由理想的吸收性, $a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1}b + a_m \in \mathfrak{a}B$, 所以 $b^m \in \mathfrak{a}B$. 这就得到 $b \in \sqrt{\mathfrak{a}B}$. 所以左式包含在右式中. 另一方面, 若 $b \in \sqrt{\mathfrak{a}B}$, 则存在 $m \geq 1$ 使得 $b^m \in \mathfrak{a}B$. 即存在 a_i 使得

$$b^m = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots + a_n b_n$$

令 $M = A[b_1, b_2, \cdots, b_m]$. 由于 b_i 都在 A 上整, M 是有限生成 A-模.

$$M = Ae_1 + Ae_2 + \cdots + Ae_k, \quad b^m M \subseteq \mathfrak{a}M$$

故存在 $k \times k$ 的矩阵 $\mathscr{A} = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathfrak{a}$, 使得

$$b^m \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix} = \mathscr{A} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_k \end{pmatrix}$$

令 $p(x) = det(xE_k - \mathscr{A}) = x^k + a_1' x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}' x + a_k'$, $a_i' \in \mathfrak{a}$. 则 $p(b^m) = 0$.

$$b^{mk} + a_1' b^{m(k-1)} + \cdots + a_{k-1}' b^m + a_k' = 0$$

所以 b 在 a 上整, 即右边包含在左边中. 从而等式成立. ■

公式 2.7.4 $Int_{\mathfrak{a}}(C) = Int_{\sqrt{\mathfrak{a}}}(C)$. 即 $\sqrt{\mathfrak{a}B} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}B}$. 这里 $\sqrt{\mathfrak{a}} \lhd A$.

证明 因为 $\mathfrak{a}B \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}B$, 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}B} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}B}$. 注意到 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}B \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}B}$. 若存在 $x \in A$, 使得 $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. 则存在 $m \geq 1$, 使得 $x^m \in \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}B}$. 故 $x \in \sqrt{\mathfrak{a}B}$, 即 $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}B}$. 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}}B \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}B}$. 即有 $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}B} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}B}$. 从而 $\sqrt{\mathfrak{a}B} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}B}$. 证毕. ■

2.7.2 整元的极小与特征多项式

设 A, C 为整环, $F = Rat(A)$. $L = Rat(C)$, $b \in C$.

$$\begin{array}{ccc} A & \subseteq & C \\ \cap & & \cap \\ F & \subseteq & L \end{array}$$

如果 b 在 A 上整, 即 $b \in Int_A(C)$, 则 b 在 F 上是代数的, 则 b 有极小多项式 $m_b(x) \in F[x]$. 下设 C 为 A 的有限扩张. 扩充次数为 $n = [L : K]$. 则 b 有一个特征多项式 $p_b(x) \in F[x]$.

$$p_b(x) = x^n - tr(b)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n N(b)$$

下面介绍特征多项式的求法:

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in L$ 为 L 在 F 上的基. 设 T_b 为 F-线性映射

$$\begin{aligned} T_b : L &\longrightarrow L \\ l &\longmapsto bl \end{aligned}$$

的矩阵的特征多项式. 当 $b \neq 0$ 时, T_b 可逆. 所以 $detT_b = N(b) \neq 0$. 即 $b \neq 0 \Longleftrightarrow N(b) \neq 0$. 由于 F 是代数闭包, 因此特征根: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in F$.

$$\begin{aligned} m_b(x) &= \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i), \quad k \leq n \\ &= x^k - u_1 x^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}u_{k-1}x + (-1)^k u_k \\ p_b(x) &= \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i) \\ &= x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}x + (-1)^n c_n. \end{aligned}$$

注意: $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

定理 2.7.1 设 A, C 为整环, A 整闭, $b \in C$.

(1) b 在 $\mathfrak{a}$ 上整 $\Longleftrightarrow b$ 在 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 上整 $\Longleftrightarrow p_b(x)$ 为 $\sqrt{\mathfrak{a}}-$多项式;

(2) b 在 A 上整 $\Longleftrightarrow p_b(x) \in A[x]$.

证明 (1) 由公式 2.7.4, 可设 $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. 设 b 在 $\mathfrak{a}$ 上整. 则存在 $\mathfrak{a}-$多项式 $f(x)$, 且是首一的使得 $f(b) = 0$. 在 $F[x]$ 中看, $m_b(x) \mid f(x)$. 所以 $f(\lambda_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

令 $B = A[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$, 则 B 为 A 的整扩张, $B \subseteq \overline{F}$. 从而

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in Int_{\mathfrak{a}}(B) = \sqrt{\mathfrak{a}B}$$

$\sqrt{\mathfrak{a}B}$ 为理想, 从而由根与系数的关系知

$$u_1, u_2, \cdots, u_k, c_1, c_2, \cdots, c_n \in Int_{\mathfrak{a}}(B)$$

又这些系数都在 F 中, 从而

$$u_1, u_2, \cdots, u_k, c_1, c_2, \cdots, c_n \in Int_{\mathfrak{a}}(F) \subseteq Int_A(F) = \widetilde{A} = A$$

所以, $u_i, c_j \in Int_{\mathfrak{a}}(A) = \sqrt{\mathfrak{a}A} = \mathfrak{a}$. 故 $m_b(x), p_b(x)$ 为 $\mathfrak{a}$-多项式. 反之是显然的.

(2) 这是 (1) 的特例, 证明在此就不展开了. ■

推论 2.7.1 (1) b 在 $\mathfrak{a}$ 上整 $\Longleftrightarrow m_b(x)$ 是 $\sqrt{\mathfrak{a}}$-多项式;

(2) b 在 A 上整 $\Longleftrightarrow m_b(x) \in A[x]$.

推论 2.7.2 设 b 在 $\mathfrak{a}$ 上整, 则 $tr(b), N(b) \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

推论 2.7.3 设 $\mathfrak{p}$ 为 A 的素理想. 则 b 在 $\mathfrak{p}$ 上整 $\Longleftrightarrow p_b(x)$ 为 $\mathfrak{p}$-多项式.

推论 2.7.4 设 b 在 A 上整. 则 $tr(b), N(b) \in A$.

2.7.3 整闭是局部性质

命题 2.7.1 局部化与求整闭包运算可交换.

证明 设 A 是整环, $\widetilde{A} = Int_A(F)$ 是整闭包. $F = Rat(A)$, $\mathfrak{p} \in SpecA$. 则

$$(\widetilde{A})_{\mathfrak{p}} = (Int_A(F))_{\mathfrak{p}} = Int_{A_{\mathfrak{p}}}(F_{\mathfrak{p}}) = Int_{A_{\mathfrak{p}}}(F) = \widetilde{A_{\mathfrak{p}}}$$

很显然, 我们得到 $(\widetilde{A})_{\mathfrak{p}} = \widetilde{A_{\mathfrak{p}}}$. ■

引理 2.7.1 设 A 整闭, 则 $A_{\mathfrak{p}}$ 整闭.

证明 A 整闭 $\Longleftrightarrow A = \widetilde{A} \Longrightarrow A_{\mathfrak{p}} = (\widetilde{A})_{\mathfrak{p}} = \widetilde{A_{\mathfrak{p}}} \Longleftrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ 是整闭的. ■

定理 2.7.2 设 A 为整环, 则以下条件等价:

(1) A 整闭;

(2) 对于任意的 $\mathfrak{p} \in SpecA$, $A_{\mathfrak{p}}$ 整闭;

(3) 对于任意的 $\mathfrak{m} \in \max A$, $A_{\mathfrak{m}}$ 整闭.

证明 令 $\sigma : A \hookrightarrow \widetilde{A}$, 则有

$$\sigma_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \widetilde{A_{\mathfrak{p}}}, \quad \sigma_{\mathfrak{m}} : A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \widetilde{A_{\mathfrak{m}}}.$$

条件 (1) $\Longleftrightarrow$ σ 是同构; 条件 (2) $\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $\mathfrak{p}, \sigma_{\mathfrak{p}}$ 是同构的. 条件 (3) $\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $\mathfrak{m}, \sigma_{\mathfrak{m}}$ 是同构的. 后者是局部性质. ■

2.7.4 关于仿射环

定义 2.7.4 选定基域 K : 代数闭域. 定义 K 上的仿射环,

$$\begin{aligned} K \text{ 上的仿射环} &= \text{多项式环的商环} \\ &= K \text{ 上的有限生成环} \\ &= K[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] \\ &= K[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I \\ &= \text{某代数簇的坐标函数环} \end{aligned}$$

引理 2.7.2 只有一个极大理想的整仿射环 A 同构于基域 K.

证明 因为 A 是整环, 所以 $A=K[x_1,x_2,\cdots,x_n]/\mathfrak{p}$. 又因为 A 的极大理想与 $Z(\mathfrak{p})$ 中的点一一对应, 从而 $Z(\mathfrak{p})$ 中只有一个点 $p_0=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $a_i\in K$. 根据

$$\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}_{p_0}=\langle x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n\rangle,\quad Z(\mathfrak{p})=Z(\mathfrak{m}_{p_0})$$

所以 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_{p_0}$ 是极大理想, 所以 $A=K[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{m}_{p_0}\cong K$. ■

推论 2.7.5 A 是仿射整环, 但不是域. $0\neq\mathfrak{p}\lhd A$ 是素理想. 则 $A_{\mathfrak{p}}$ 不是仿射环.

证明 因为 $A_{\mathfrak{p}}$ 是局部环,它只有一个极大理想 $A^{-1}\mathfrak{p}$, $\mathcal{S}=A-\mathfrak{p}$, 但因为 $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}\neq 0$, 显然 $A_{\mathfrak{p}}\ncong K$. 所以 $A_{\mathfrak{p}}$ 不是仿射环. ■

结论 2.7.1 分式环或局部化不一定将仿射环变为仿射环.

定理 2.7.3 设 A 为仿射整环, $f\in A$, $f\neq 0$. 令 $\mathcal{S}=\{1,f,f^2,\cdots,f^k,\cdots\}$. 则 $A_f:=\mathcal{S}^{-1}A$ 也是仿射环.

证明 记 A_f 中的元 $\frac{a}{s^k}$, $k\geq 0$. 显然

$$A_f=A[\frac{1}{f}]=A[y]/\langle f\cdot y-1\rangle$$

如果 $A=K[x_1,x_2,\cdots,x_n]/\langle f_1,f_2,\cdots,f_m\rangle$, 则

$$A_f=\frac{K[x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}]}{\langle f_1,f_2,\cdots,f_m,F\cdot x_{n+1}-1\rangle}$$

所以 A_f 是仿射的, $f=\overline{F}$. ■

注 2.7.1 如果 $A=\emptyset(X)$, X 不可约. 则 $A_f=\emptyset(D(f))$, 其中 $D(f)=X-Z(f)$. 根据 $X\subseteq K^n$ 有 $D(f)\subseteq K^{n+1}$. ■

例 2.7.1 设 $H\subseteq K^n: F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$. 则

$$K^n-H\subseteq K^{n+1}: x_{n+1}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)-1=0$$

根据注记 2.7.1, 结论是显然成立的. ■

2.8 方程的个数与解的维数

2.8.1 主要结果

设方程组

$$(I)\qquad\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ \cdots,x_n)=0\\ f_2(x_1,x_2,\ \cdots,x_n)=0\\ \qquad\vdots\\ f_m(x_1,x_2,\ \cdots,x_n)=0\end{cases}$$

其解集为:

$$Z(f_1,f_2,\cdots,f_m)=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup T_k$$

定理 2.8.1　对任何的 i, $\dim Y_i \geq n-m$.

定理 2.8.2　设 X 是 n 维不可约代数簇, $f_1, f_2, \cdots, f_m \in \mathcal{O}(X)$.

$$Y = Z_x(f_1, f_2, \cdots, f_m) = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$$

则 $\dim Y_i \geq \dim X - m$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

定理 2.8.3　设 A 是 K 上的仿射整环, 则 A 中任何素理想链都可加细为长度为 $d = \dim A$ 的素理想链.

注 2.8.1　由 Noether 规范化定理, $A = K[x_1, x_2, \cdots, x_d][\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r]$. 由上升与下降定理, 只要对多项式环 $R = K[x_1, X_2, \cdots, x_n]$ 证明定理 2.8.3 即可. ■

定义 2.8.1　素理想 $\mathfrak{p}$ 的高度 $ht(\mathfrak{p})$ 定义为, 包含于 $\mathfrak{p}$ 之中的素理想链的长度的最大值.

$$ht(\mathfrak{p}) = \max\{h \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneqq \mathfrak{p}_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i \text{ 素理想}\}$$

定义 2.8.2　素理想 $\mathfrak{p}$ 的深度 $dept(\mathfrak{p})$ 定义为, 所有包含 $\mathfrak{p}$ 的素理想链的长度的最大值

$$dept(\mathfrak{p}) = \max\{h \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n\}$$

故 $dept(\mathfrak{p}) = \dim A/\mathfrak{p}$.

定理 2.8.4　若 A 为仿射环, 则

$$ht(\mathfrak{p}) + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$$

定理 2.8.5　设 A 是 K 上的仿射整环. $f \in A$. 设 $f \neq 0$, 且 f 不是单位元. $\mathfrak{p}$ 是包含 f 的极小素理想, 即 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. 有极小分解

$$\sqrt{\langle f \rangle} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_K$$

则 $ht(\mathfrak{p}) = 1$, $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$.

注 2.8.2　此定理被称为 Krull 主理想定理, 原定理只要求 A 为 Noether 环. ■

推论 2.8.1　X 为不可数代数簇, $f \in \mathcal{O}(X)$, $f \neq 0$, f 也不是单位.

$$Z_X(f) = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$$

则 $\dim Y_i = \dim X - 1$.

注 2.8.3　当 $f \neq 0$ 时, f 非单位当且仅当 $Z_X(f) \neq \emptyset$. 若 $Z_X(f) = \emptyset$, 则 f 无零点, 所以 $\frac{1}{f}$ 正则, 故 $f^{-1} \in \mathcal{O}(X)$, f 为单位. ■

2.8.2　定理 2.8.5 的证明

此定理可分成三步进行.

结论 2.8.1　定理 2.8.5 可归结为 $k = 1$ 的情形

证明　若 $k \geq 2$,由分解的极小性, 存在 $s \in \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k$, 但 $s \notin \mathfrak{p}_1$. 令

$$\mathcal{S} = \{s^n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}, \quad A = \emptyset(X)$$

则 $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_i = \mathcal{S}^{-1}A$, $i \geq 2$.

$$\mathcal{S}^{-1}(\sqrt{\langle f \rangle}) = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_1 \cap \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_k = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_1$$

$$\mathcal{S}^{-1}(\sqrt{Af}) = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_1, \quad \mathcal{S}^{-1}A = A_s$$

这里, A_s 仍为仿射环, 又

$$\mathcal{S}^{-1}(\sqrt{Af}) = \sqrt{\mathcal{S}^{-1}(Af)} = \sqrt{A_s \cdot f} = \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_1$$

$\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_1$ 是素理想, 且极小. 故 $ht(\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_1) = ht(\mathfrak{p}_1)$,

$$\begin{aligned}\dim A_s/\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}_1 &= \dim \overline{\mathcal{S}}^{-1}(A/\mathfrak{p}_1) \\ &= \dim A/\mathfrak{p}_1[\tfrac{1}{\overline{s}}], \overline{s} \in A/\mathfrak{p}_1 \\ &= Rat((A/\mathfrak{p}_1)[\tfrac{1}{\overline{s}}]) \text{ 的超越次数} \\ &= Rat(A/\mathfrak{p}_1) \text{ 的超越次数} \\ &= \dim A/\mathfrak{p}_1\end{aligned}$$

故完全归结为 $k = 1$ 的情形. ■

结论 2.8.2　定理 2.8.5 可归结为 A 为多项式环的情形.

引理 2.8.1

$$\sqrt{Af \cap R} = \sqrt{\sqrt{Af} \cap R} = \sqrt{RN(f)}$$

证明　根据 $N(f) = fg \in Af$, $N(f) \in R$ 可得 $N(f) \in Af \cap R \subseteq \sqrt{Af} \cap R$. 故

$$\sqrt{RN(f)} \subseteq \sqrt{Af \cap R} \subseteq \sqrt{\sqrt{Af} \cap R}$$

反过来, 若 $u \in \sqrt{Af} \cap R$, 则 $u \in \sqrt{Af}, u \in R$. 故存在 m 使得 $u^m \in Af$, $u \in R$. 由 $u^m = fg$, 且 $g \in A, u^m \in R$, 所以 $N(u^m) = (u^m)^n = u^{mn}$. 故

$$N(f)N(g) = u^{mn} \in RN(f)$$

从而 $u \in \sqrt{RN(f)}$, 故 $\sqrt{Af} \cap R \subseteq \sqrt{RN(f)}$. 所以 $\sqrt{\sqrt{AF} \cap R} \subseteq \sqrt{RN(f)}$. 故两个等式成立. ■

证明　$\sqrt{Af} = q$ 是素理想, $f \in A$. 因为 $A = K[x_1, x_2, \cdots, x_d][\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r]$. 令 $R = k[x_1, x_2, \cdots, x_d]$, 则知 A 在 R 上整. 又因为 R 是整闭整环, 故知 f 的特征多项式

$$\mathfrak{p}_f(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n N(f) \in R[x]$$

又 $f \neq 0$,所以 $N(f) \in R$ 也非零. 由于

$$f^n - a_1 f^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} f + (-1)^r N(f) = 0, \quad N(f) = f \cdot g, g \in A$$

由于 f 在 A 中不可逆, 所以 $N(f)$ 在 R 中也不可逆. 故 $N(f)$ 是次数 ≥ 1 的多项式. 令 $\mathfrak{p} = q \cap R \lhd R, \mathfrak{p}$ 是素理想, 由引理 2.8.2知,

$$\sqrt{RN(f)} = \sqrt{\mathfrak{q} \cap R} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$$

根据上升, 下降定理

$$ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{q}), \dim R/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{q}$$

故定理 2.8.5 可归结多项式环 R 的情形. ■

现在我们来证明定理 2.8.5 中 A 为多项式环的情形.

证明　设 $A = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为多项式环, $f \in A$, f 非零非单位. 则知 $\deg f \geq 1$. 通过坐标的线性变换即 Noether 技巧, 可设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 x_n 的首一多项式. 设

$$f = f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_s^{n_s}$$

为不可约分解, 则知

$$\sqrt{Af} = \langle f_1 \rangle \cap \langle f_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle f_s \rangle$$

由于 $\sqrt{Af} = \mathfrak{p}$, 只有一个素理想, 所以 $s = 1$. 故 $\mathfrak{p} = \langle f_1 \rangle$, f_1 不可约.

下证 $ht(\mathfrak{p}) = 1$. 若有素理想 $\mathfrak{p}'$ 使得 $(0) \subseteq \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$. 若 $\mathfrak{p}' \neq 0$, 则有 $a \in P', a \neq 0$. 所以 $f_1 \mid a$, 故 $a = f_1^r b$, $\gcd(f_1, b) = 1$. $f_1^r b \in \mathfrak{p}', f_1 \notin \mathfrak{p}'$. 从而知 $b \in P'$, 从而 $f_1 \mid b$, 矛盾. 所以 $(0) \subsetneq P$ 中无其他素理想, 即 $ht(P) = 1$.

再证, $\dim A/P = n - 1 = \dim A - 1$. 根据

$$A/P = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]/\langle f_1 \rangle = K[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_{n-1}][\overline{x}_n]$$

且 f_1 为 x_n 的首一多项式, 易得 $\overline{x_n}$ 在 $K[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_{n-1}]$ 上整. 又显然 $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n$ 无其它代数关系, 他们在 K 上代数无关. 从而

$$\dim A/\mathfrak{p} = n - 1 = \dim A - 1$$

定理2.8.5 得证. ■

2.8.3　定理 2.8.4 的证明

我们通过对定理 2.8.4 的证明, 可以推出定理 2.8.3.

$$ht(\mathfrak{p}) = \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$$

主要想法:

- 可对 $n = \dim A$ 归纳证明.
- 可归结为 $A = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 来证.

证明　(1) 当 $n = 0$ 时, $A \cong K$, $P = \langle 0 \rangle$, 等式成立; $n = 1$ 时, 归结为 $A = K[x]$ 的情况. 易证等式成立.

(2) 下设 $n \geq 2$. 同样可设 $A = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. 若 $\mathfrak{p} = \langle 0 \rangle$, 证明是平凡的. 设

$$P \neq \langle 0 \rangle , ht(P) = l \geq 1$$

存在

$$\langle 0 \rangle \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots \subsetneq P_l = P$$

所以 $ht(\mathfrak{p}_1)=1$,易知 $\mathfrak{p}_1$ 中包含一个不可约的非零元 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathfrak{p}_1$. $\langle f\rangle$ 是素理想, $\langle 0\rangle\subsetneq\langle f\rangle\subseteq\mathfrak{p}_1$, 所以 $\mathfrak{p}_1=\langle f\rangle$. 通过 Noether 技巧, 不妨设 f 是 x_n 的首一多项式. 令 $\overline{A}=A/\mathfrak{p}_1$, 则 $\overline{A}=K[\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_{n-1}][\overline{x}_n]$. 其中 $\overline{x}_n$ 在多项式环 $\overline{R}=K[\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n]$ 上整. $\dim\overline{A}=n-1<n$. 令 $\overline{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1$,显然 $ht(\overline{\mathfrak{p}})=l-1$.

$$\overline{0}\subsetneq\overline{\mathfrak{p}}_2\subsetneq\cdots\subsetneq\overline{\mathfrak{p}}_l=\overline{\mathfrak{p}}\ (极大)$$

由 $\dim\overline{A}=n-1<n$. 从而等式对于 $\overline{A},\overline{\mathfrak{p}}$ 成立. 即

$$ht(\overline{\mathfrak{p}})+\dim\overline{A}/\overline{\mathfrak{p}}=\dim\overline{A}=n-1$$

又有同构 $\overline{A}/\overline{\mathfrak{p}}\cong A/\mathfrak{p}$. 而 $ht(\overline{\mathfrak{p}})=ht(\mathfrak{p})-1$, $\dim\overline{A}=\dim A-1$. 故上式为

$$ht(\mathfrak{p})+\dim A/\mathfrak{p}=\dim A$$

定理得证. ■

2.8.4　定理 2.8.2 的证明

我们通过对定理 2.8.2 的证明, 导出定理 2.8.2.

证明　对 $n=\dim X$ 归纳证明.

当 $n=1$ 时, 因为 $m\geq 1$, 所以证明是平凡的. 下设 $n\geq 2$. 不妨设 $f_1\neq 0$, 且 f_1 非单位. 所以

$$Z_X(f_1)=X_1\cup x_2\cup\cdots\cup X_s,\quad \dim X_i=n-1$$

$$Y=Z_X(f_1,f_2,\cdots,f_m)=\bigcup_{i=1}^{s}Z_{X_i}(f_2,\cdots,f_m)$$

又 $Y=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_k$, 故 Y_j 一定是某 $Z_{X_i}(f_2,\cdots,f_m)$ 的不可约分支, 这里

$$f_2=f_2|_{X_i},f_3=f_3|_{X_i},\cdots,f_m=f_m|_{X_i}$$

从而

$$\dim Y_j\geq\dim X_i-(m-1)=\dim X-1-(m-1)=\dim X-m$$

定理得证. ■

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 2.1

第三章　代数簇的几何

3.1　代数簇的切空间

3.1.1　解方程与隐函数定理

本章开始, 设 $K=\mathbb{C}$, $f_i\in\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$.

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)=0\\ f_2(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)=0\\ \qquad\vdots\\ f_m(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)=0\end{cases}\qquad (I)$$

定义 3.1.1　定义函数组 (I) 中, $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 Jacobi 矩阵.

$$J(f_1,f_2,\cdots,f_m)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

注 3.1.1　有时, 也把 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 看成是映射

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{C}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{C}^m\\ & (x_1,x_2,\cdots,x_n) & \longmapsto (y_1,\ y_2,\cdots,y_m)\end{array}$$

■

定理 3.1.1 (逆函数定理)　若 $m=n$ 且 $J(f)$ 在点 p 可逆, 则 f 在 p 的某个邻域 U 上是一一的, $f:U\xrightarrow{1:1}V$, 且逆映射

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ x_2 = \varphi_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ \qquad\vdots\\ x_n = \varphi_n(y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{cases}\qquad (y_1,y_2,\cdots,y_n)\in V$$

在 $f(p)$ 上是全纯的.

定理 3.1.2 (隐函数定理 (I))　如果 $m<n$, 且 $rank\ J(f)(p)=m$, p 为方程组 (I) 的解. 不妨设前 m 列组成的 m 阶子式在 p 点不为零, 则在 p 的一个小邻域里, 方程组 (I) 有唯一解.

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)\\ x_2 = \varphi_2(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)\\ \qquad\vdots\\ x_m = \varphi_m(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)\end{cases}$$

$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 是全纯函数 (收敛幂级数) .

定理 3.1.3 (隐函数定理 (II)) 如果 $m > n$, 存在开集 $U \subset \mathbb{C}^n$, 使得 $rk\, J(f)(p) = n, \forall\, p \in U$. 则 f 是到它的像的同构, 即存在 $V \subset \mathbb{C}^m, V$ 是光滑解析子簇, 使 $f : U \xrightarrow{\sim} V$.

例 3.1.1 若 $\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(p)$ 可逆, 则

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \qquad \vdots \\ x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases} \qquad P \text{ 点附近像 } f(p) \text{ 附近为 } V:$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n, f_{n+1}(\varphi_1(y_1, y_2, \cdots, y_n)), \cdots, f_m(\varphi_1(y_1, y_2, \cdots, y_n)))$$

这和 U 是一样的, V 有局部坐标 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. ■

注 3.1.2 Jacobi 矩阵是看解在一个点附近的性质的一个量. ■

3.1.2 方程组的线性化与切空间

设 $p \in Z(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 是方程组 (I) 的解. $p = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. 将方程在 p 点作 Taylor 展开,

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - a_j) + \text{高次项}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

则

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_p, \quad J(f_1, f_2, \cdots, f_m)|_p = (a_{ij})$$

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - a_1) + & a_{12}(x_2 - a_2) + \cdots + & a_{1n}(x_n - a_n) = 0 \\ a_{21}(x_1 - a_1) + & a_{22}(x_2 - a_2) + \cdots + & a_{2n}(x_n - a_n) = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(x_1 - a_1) + & a_{m2}(x_2 - a_2) + \cdots + & a_{mn}(x_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

$$(T_p) \qquad A \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0, \quad A = J(f_1, f_2, \cdots, f_m)|_p$$

定义 3.1.2 (切空间) 记 $X = Z(f_1, f_2, \cdots, f_m), p \in X$, 则称线性方程组 (T_p) 的解空间为 X 在 p 点处的切空间 (Zariski 切空间) 记为 $T_{X,p}$.

$\mathbb{C}^n$ 中以 p 为原点建立新的向量空间结构, 记为 $T_p = T_p\mathbb{C}^n$. 则 $T_{X,p} \subset T_p$ 是一个向量子空间. 则 $T_{X,p}$ 是方程组

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

的解空间. 这里, $y_j = x_j - a_j$. 选取 $T_p\mathbb{C}^n$ 的基, 使得方程组 (T_p) 的解更有几何意义:

$$T_p\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\rangle$$

其中, $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. 则

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in T_{X,p} \Longleftrightarrow J(f_1, f_2, \cdots, f_m)(p)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) b_j = 0, i = 1, 2, \cdots, m \Longleftrightarrow D_{b_1, b_2, \cdots, b_n}(f_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

这里, $D_{b_1, b_2, \cdots, b_m} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \quad (**)$. 所以

$$\begin{aligned} T_{X,p} &= \{\sum_{j=1}^{n} b_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \mid (\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}) f_i = 0, \forall\, i\} \\ &= \{D_b = \sum_{j=1}^{n} b_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \mid D_b(f) = 0, \forall\, f \in I(x)\} \\ &= \{D \in T_p\mathbb{C}^n \mid D(f) = 0, \forall\, f \in I(x)\} \end{aligned}$$

其中 $\dim T_{X,p} = n - rank\ J(f_1, f_2, \cdots, f_m)(p)$. 有时, 也用 $T_p(X)$ 表示 $T_{X,p}$.

3.1.3 切空间的维数

命题 3.1.1 设 $D \in T_p(X)$, 则知对任何 $f, g \in \emptyset(X)$, 都有

(1) $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$;

(2) $D(f^k) = kf^{k-1}(p)D(f)$.

令 $m_p = \{f \in \emptyset(X) \mid f(p) = 0\}$, 则 $\emptyset(X) = \mathbb{C} \oplus m_p$. 构造线性映射

$$D: \quad m_p \longrightarrow \mathbb{C}$$

由命题 3.1.1 可知, $m_p^2 \subset \ker D$. 所以 D 诱导了线性映射

$$\overline{D}: \quad m_p/m_p^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

这里有 $D(f) = \overline{D}(\overline{f})$. 另一方面, 若 $f \in m_p$, 则 $f(p) = 0$. f 在 p 点作 Taylor 展开, 则有

$$f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(x_n - a_n) + \{x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \text{ 的高次项}\}$$

$$\begin{aligned} T_p(X) &\longrightarrow Hom(m_p/m_p^2, \mathbb{C}) \\ D &\longmapsto \overline{D} \end{aligned}$$

此时有 $\overline{D}(\overline{f}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)D(x_1) + \overline{D}(\overline{f}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)D(x_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(D(x_n))$.

命题 3.1.2 上述定义的映射是双射.

证明　只要证明既是单射又是满射即可.

首先, 如果 $\overline{D}=0$, 即对于任意的 f, 有 $\overline{D}(\overline{f})=0$. 则 $D(x_1)=D(x_2)=\cdots=D(x_n)=0$. 根据式 $(**)$, 对于任意的 $j, b_j=0$. 所以 $D=0$. 因此 $D\longmapsto\overline{D}$ 是单射.

下证映射的满性. 取线性映射 $\lambda: m_p/m_p^2\longrightarrow\mathbb{C}$, $C=m_p/m_p^2$.

$$\emptyset(X)=\mathbb{C}\oplus C\oplus m_p^2$$

则 $\lambda: C\longrightarrow\mathbb{C}$ 线性, 这里

$$C\cong m_p/m_p^2,\quad \mathbb{C}=\emptyset(X)/m_p$$

将 λ 线性扩充到 $\emptyset(X)\xrightarrow{\lambda}\mathbb{C}$ 使得

$$\lambda|_{\mathbb{C}}=0,\quad \lambda|_{m_p^2}=0$$

则

$$f,g\in\emptyset(X),\quad f=f_0+f_1+f_2,\quad f_0=f(p),\quad g=g_0+g_1+g_2,\quad g_0=g(p)$$

则 $\lambda(f)=f_1$, $\lambda(g)=g_1$. 于是

$$\begin{aligned}\lambda(fg)&=\lambda((f_0+f_1)(g_0+g_1))\\&=\lambda(f_0\cdot g_0+f_0g_1+g_0f_1)\\&=f_0\lambda(g_1)+g_0\lambda(f_1)\\&=f(p)\lambda(g)+g(p)\lambda(f)\end{aligned}$$

所以 λ 为导数, 故 $\lambda\in T_p(X)$. 满性得证. ■

通过上述命题, 我们总结得到以下定理.

定理 3.1.4　$T_P(X)\cong Hom(m_p/m_p^2,\mathbb{C})$

若 $\emptyset(X)\xrightarrow{\varphi}\emptyset(X)_{m_p}$, $\emptyset(X)_{m_p}$ 的极大理想记为 $\mathfrak{m}=s^{-1}m_p$. 则知

$$m_p=\varphi^{-1}(\mathfrak{m}),\quad m_p^2=\varphi^{-1}(\mathfrak{m}^2)$$

所以 $m_p/m_p^2\cong\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

引理 3.1.1 (Nakayama 引理)　*设 $(A,\mathfrak{m})$ 是局部环, M 是有限生成 A-模. $k=A/\mathfrak{m}$ 为域. 则:*

(1) *当 $M\subseteq\mathfrak{m}M$ 时, 有 $M=0$;*

(2) *若存在 $m_1,m_2,\cdots,m_r\in M$, 使得 $\overline{m}_1,\overline{m}_2,\cdots,\overline{m}_r$ 为 k-模 $M/\mathfrak{m}M$ 的生成元. 则 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 也是 M 作为 A-模的生成元.*

证明　(1) 不妨设

$$\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_r\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_r\end{pmatrix}$$

这里 $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in\mathfrak{m}$. 于是,

$$(I-A)\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_r\end{pmatrix}=0$$

上式两边同乘以其伴随矩阵,

$$(I-A)^*(I-A)\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_r\end{pmatrix}=0$$

故,

$$|I-A|\cdot\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_r\end{pmatrix}=0$$

这里 $|I-A|=1+a$, 这里 $a\in\mathfrak{m}$. 所以 $1+a\notin\mathfrak{m}$. 故 $1+a$ 可逆, 从而

$$m_1=m_2=\cdots=m_r=0$$

故 $M=0$.

(2) 令 $N=A\langle m_1,m_2,\cdots,m_r\rangle\subseteq M$, $N+\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}M=M/\mathfrak{m}M$, 所以 $N+\mathfrak{m}M=M$.

$$\mathfrak{m}(M/N)=\mathfrak{m}M+N/N=M/N$$

由 (1) $M/N=0$, 所以 $M=N$. 证毕. ■

推论 3.1.1 符号同上, 若 $f_1,f_2,\cdots,f_r\in\mathfrak{m}$, 使得 $\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_r$ 为 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 $A/\mathfrak{m}$-向量空间的基, 则 $\mathfrak{m}=\langle f_1,f_2,\cdots,f_r\rangle$.

推论 3.1.2 若 $A=\varnothing(X)$, $\mathfrak{m}_p\lhd A$ 是极大理想. $p\in X$. 如果存在 $f_1,f_2,\cdots,f_r\in\mathfrak{m}_p$, 使得 $\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_r$ 为 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 的 k-基. 则 $\{p\}$ 是 $Z_X(f_1,f_2,\cdots,f_r)$ 的一个分支.

证明 设 $C\subset Z_X(f_1,f_2,\cdots,f_r)$ 是包含 p 的一个不可约分支. $\mathfrak{m}\lhd\varnothing(C)$ 是 $x\in C$ 的极大理想. 由条件知 $\mathfrak{m}_p=\langle f_1,f_2,\cdots,f_r\rangle+\mathfrak{m}_p^2$

$$0\longrightarrow I_X(C)\longrightarrow\varnothing(X)\longrightarrow\varnothing(C)\longrightarrow 0$$

$f_1,f_2,\cdots,f_r\in I_X(C),\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_p/I_X(C)$. 于是 $\mathfrak{m}_p=\langle f_1,f_2,\cdots,f_r\rangle+\mathfrak{m}_p^2$ 等价于 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$. 因为 $\varnothing(X)$ 无零因子, 由 Nakayama 引理, 所以 $\mathfrak{m}=0$. ■

定理 3.1.5 设 X 为不可约代数簇, $p\in X$. 则 $\dim T_p(X)\geq\dim X$.

证明 设 $A=\varnothing(X),\mathfrak{m}_p\lhd A,f_1,f_2,\cdots,f_r$ 同推论 3.1.2, 则知 $r=\dim T_p(X)$. 另一方面, $\{p\}$ 为 $Z_x(f_1,f_2,\cdots,f_r)$ 的一个不可约分支, 从而 $0=\dim\{p\}\geq\dim X-r$, 所以 $\dim T_p(X)\geq\dim X$. ■

注 3.1.3 定理 3.1.5 不能用 $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$ 来证. 因它不一定是仿射环, 不能直接用我们的结论. 尽管这时可推出 $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$ 的极大理想由 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 生成. ■

3.2 光滑代数簇

3.2.1 代数簇上的光滑点

设 $X = Z(f_1, f_2, \cdots, f_m) \subseteq \mathbb{C}^n$ 是不可约代数簇, $p \in X, d = \dim X$. 上节已经证明

$$\dim T_p(X) = n - rk\, J(f_1, f_2, \cdots, f_m)(p) \geq d$$

即 $rk\, J(f_1, f_2, \cdots, f_m)(p) \leq n - d$.

定义 3.2.1 设 $(A, \mathfrak{m})$ 为局部环. 如果 $\mathfrak{m}$ 由 $d = \dim A$ 个元生成, 则称 A 为正则局部环.

定义 3.2.2 设 $p \in X$, 若满足 $\dim T_p(X) = \dim X$ 则称 p 是 X 的光滑点.

命题 3.2.1 设 $p \in X$, 则以下条件等价:

(1) p 是 X 的光滑点;

(2) $\dim J(f_1, f_2, \cdots, f_m)(p) = n - d$;

(3) $\mathcal{O}(X)_{m_p}$ 是正则局部环.

定义 3.2.3 如果 X 上所有点都是 X 的光滑点, 则称 X 是光滑的. X 的非光滑点称为是奇点. 通常用 X_{sing} 表示 X 的奇点的集合.

$$X_{sing} = \{p \in X \mid rk\, J(f_1, f_2, \cdots, f_m)(p) < n - d\}$$

注 3.2.1 用 $\triangle_1, \cdots, \triangle_N$ 表示 $J(f_1, \cdots, f_m)$ 的所有 $n-d$ 阶子式, 则

$$X_{sing} = Z(f_1, \cdots, f_m, \triangle_1, \cdots, \triangle_N)$$

注 3.2.2 由于奇异性只与局部环 $\mathcal{O}(X)_{m_p} = \mathcal{O}(X)_p$ 有关, 因此, 与定义方程无关. ■

例 3.2.1 如果 $H = Z(f)$ 不可约. f 的次数 $\deg f \geq 1$. 则 $H_{sing} = Z(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. 下证 $H_{sing} \subsetneq H$. 否则, $H = H_{sing}$, 则 $f | \frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \cdots, n$. 由次数的原因,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

f 为常数多项式, 与假设矛盾. ■

定义 3.2.4 X 中形如 $X - Z(I)$ 的开集称为 Zariski 开集.

命题 3.2.2 $X \neq X_{sing}$.

证明　由 Noether 规范化定理, X 不可约时,

$$A = \emptyset(X) = \mathbb{C}[z_1, z_2, \cdots, z_d][\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m]$$

$$Rat(X) = \mathbb{C}(z_1, z_2, \cdots, z_d)[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m]$$

另一方面, 由本原扩张定理,

$$Rat(X) = \mathbb{C}(z_1, z_2, \cdots, z_d)[\eta]$$

这里, η 在 $\mathbb{C}[z_1, z_2, \cdots, z_d]$ 上整. 因此知存在 $s_0 \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \cdots, z_d]$ 使得

$$\eta_0 = s_0 \in \eta \in \emptyset(X)$$

令 $B = \mathbb{C}[z_1, z_2, \cdots, z_d][\eta_0] \subset A$,

$$Rat(B) = \mathbb{C}(z_1, z_2, \cdots, z_d)[\eta_0] = Rat(A) = \mathbb{C}(z_1, z_2, \cdots, z_d)[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m]$$

同理, 存在 $s_i \in \mathbb{C}[z_1, z_2 \cdots, z_d]$, 使得

$$s_i \eta_i \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \cdots, z_d][\eta_0] = B$$

显然, 存在超曲面 $H \subset \mathbb{C}^{d+1}$, 这里 $H : f(x_1, x_2, \cdots, x_d, x_{d+1}) = 0$, 使得

$$B = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_d, x_{d+1}]/\langle f \rangle, \quad \eta_0 = \overline{x}_{d+1}$$

即 $\emptyset(H) = B$. 由于 $H_{sing} \subsetneq H$, 故存在多项式 $g(x_1, \cdots, x_{d+1})$, 其零点集包含

$$H_{sing}, \quad H_{sing} \subseteq Z(g)$$

令 $s = s_1 s_2 \cdots s_m \cdot g$. 则 $s\eta_i \in B$, 从而知

$$\mathcal{S}^{-1}A = A_s = B_s = \mathcal{S}^{-1}B$$

这里, $\mathcal{S} = \{1, s, s^2, \cdots\}$. 即 $X - Z(\mathcal{S}) = H - Z(\mathcal{S}) = U$. H 在 U 上光滑, 故 X 在 U 上也光滑, 从而 $X_{sing} \neq X$. ■

定理 3.2.1　X 的光滑点组成 X 的一个非空 Zariski 开集. 此开集是稠密的.

一般地, 可以证明

定理 3.2.2　若不可约代数簇 X 与 Y 双有理等价. 则存在 Zariski 非空开集

$$U \subset X, \quad V \subset Y$$

使得 $U \cong V$.

命题 3.2.3　设 U, V 分别是 X 中两 Zariski 非空开集, 且 $U \cap V \neq \emptyset$, 则 $U \cap V$ 仍是 Zariski 开集.

命题 3.2.4　设 $U \neq \emptyset$, 则 $\overline{U} = X$. 这里, $\overline{U}$ 表示包含 U 的最小 Zariski 闭集.

3.2.2　零维 Noether 局部环 $(A, \mathfrak{m})$

设 $(A, \mathfrak{m})$ 是局部环, $\dim A = 0$, 则 $\mathfrak{m}$ 是 A 中惟一的素理想. 若 $\mathfrak{m} = 0$, 则 A 为域. 不考虑这种情况, 下设 $\mathfrak{m} \neq 0$.

引理 3.2.1 $\mathfrak{m}$ 中任何元都是幂零元, 又 $\mathfrak{m}$ 有限生成, 从而存在 k, 使得 $\mathfrak{m}^k=0$.

证明 设 $0\neq a\in\mathfrak{m}$. 若 a 不是幂零元, 则 $\mathcal{S}=\{1,a,a^2,\cdots\}$ 与 $\langle 0\rangle$ 不交. 从而存在素理想 $\mathfrak{p}$ 与 $\mathcal{S}$ 不交. 故 $a\notin\mathfrak{p},a\in\mathfrak{m}$, 知 $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$. 这是矛盾的. ■

引理 3.2.2 若 $\mathfrak{m}$ 是主理想, 则 A 中任何理想 $I=\mathfrak{m}^r$, 对于某个 r 成立.

证明 设 $I\neq 0$, 则存在 $r\in\mathbb{N}$, 使得 $I\subset\mathfrak{m}^r,I\not\subseteq\mathfrak{m}^{r+1}$. 设 $\mathfrak{m}=\langle x\rangle$, 则 $\mathfrak{m}^r=\langle x^r\rangle,\mathfrak{m}^{r+1}=\langle x^{r+1}\rangle$. 于是, 存在 $y\in I-\langle x^{r+1}\rangle$, 即 $y=ax^r,a\notin\mathfrak{m}=\langle x\rangle$. 所以 a 可逆, 故

$$x^r=a^{-1}y\in I,\quad \mathfrak{m}^r\subset I\subset\mathfrak{m}^r$$

所以 $I=\mathfrak{m}^r$. ■

3.2.3 一维 Noether 局部整环 $(A,\mathfrak{m})$

由于 $\dim A=1$, 故 $\mathfrak{m}\neq 0,\langle 0\rangle$ 和 $\mathfrak{m}$ 是 A 中唯一的素理想. $\mathbb{C}=A/\mathfrak{m}$.

定理 3.2.3 下列条件等价:

(1) A 整闭;

(2) A 是正则局部环, 即 $\mathfrak{m}$ 为主理想;

(3) 存在 x, 使得对于所有 $I\lhd A,I\neq 0$, 都有某个 k, 使得 $I=\langle x^k\rangle$.

证明 (3) $\Longrightarrow$ (1) : 因为 A 为 PlD, 所以为 UFD. 故 A 整闭.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : 设 $a\in\mathfrak{m}$, $a\neq 0$, 令 $I=\langle a\rangle$. 则包含 I 的素理想只有 $\mathfrak{m}$, 故 $\sqrt{I}=\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ 有限生成. 所以存在 n 使得 $\mathfrak{m}^n\subset I$. 设 n 极小, 即 $\mathfrak{m}^{n-1}\not\subseteq I$. 取 $b\in\mathfrak{m}^{n-1}$, $b\notin I$. 由于

$$b\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}^n\subseteq I=\langle a\rangle$$

所以 $\frac{b}{a}\mathfrak{m}\subset A$, 令 $y=\frac{b}{a}$. 因为 $b\notin I$, 所以 $y\notin A$. 又因为 A 整闭, 所以 y 在 A 上不是整的. 则可证明, $y\mathfrak{m}\not\subseteq\mathfrak{m}$. 否则

$$y\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m},\quad y\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_r\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_r\end{pmatrix}$$

有首一多项式 $f_A(\lambda)$ 使得 $f_A(y)=0,f_A(\lambda)\in A[\lambda]$, 矛盾. 因此, $y\mathfrak{m}$ 中有 A 的可逆元. 所以 $y\mathfrak{m}=A,\quad\mathfrak{m}=Ay^{-1}$ 令 $x=y^{-1}$, 则

$$\mathfrak{m}=Ax,\quad x\in\mathfrak{m},\quad\mathfrak{m}=\langle x\rangle$$

所以 A 是正则局部环.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 设 $\mathfrak{m}=\langle x\rangle,I\lhd A,I\neq 0$. 则知 $\sqrt{I}=\mathfrak{m}$, 这就推出

$$\mathfrak{m}^n\subseteq I\subseteq\mathfrak{m}$$

由于 A 是整环, 所以 $\mathfrak{m}^n \neq 0$, 令 $\overline{A} = A/\mathfrak{m}^n$, 它只有一个素理想 $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$, 从而知 $(\overline{A}, \overline{\mathfrak{m}})$ 是 Noether 局部环, 且 $\dim \overline{A} = 0$. 又 $\overline{\mathfrak{m}} = \langle \overline{x} \rangle$ 为主理想. 则知, 存在某个 $k \leq n$ 使得

$$\overline{I} = \overline{\mathfrak{m}}^k = \left\langle \overline{x}^k \right\rangle$$

所以 $I = \left\langle x^k \right\rangle + \langle x^n \rangle = \left\langle x^k \right\rangle$. 证毕. ■

推论 3.2.1 设 X 是一维不可约代数簇, 即不可约代数曲线, 则 X 正规当且仅当 X 光滑.

证明 正规和光滑都是局部性质. ■

3.2.4 曲线 X 在光滑点 p 处的赋值

设 X 是曲线, $p \in X$ 为 X 的光滑点.

定义 3.2.5 (构造赋值 I) 设 $A = \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}, \mathfrak{m}$ 为 A 的极大理想, 则知 $\mathfrak{m} = \langle x \rangle$, 这是正则局部环. 定义赋值

$$\mu_p : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

当 $a \in \mathcal{O}(X)$, $a = 0$ 时, $\mu_p(0) = +\infty$; 当 $a \in \mathcal{O}(X)$, 且 $a \neq 0$ 时, 则知 $\langle a \rangle = \left\langle x^k \right\rangle, k \geq 0$. 则 μ_p 满足

(1) $0 \neq a \in \mathbb{C}$ 时, $\mu_p(a) = 0$;

(2) $\mu_p(ab) = \mu_p(a) + \mu_p(b)$;

(3) $\mu_p(a+b) \geq \min\{\mu_p(a), \mu_p(b)\}$.

定义 3.2.6 (构造赋值 II) 将 μ_p 扩充到 $Rat(X)^* = Rat(X) - \{0\}$,

$$\begin{aligned} \mu_p : Rat(X)^* &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \tfrac{b}{a} \qquad &\longmapsto \mu_p(\tfrac{b}{a}) := \mu_p(b) - \mu_p(a) \end{aligned}$$

则 $\mu_p : Rat(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ 满足

(1) $f \in \mathbb{C} \subset Rat(X)^*$, 则 $\mu_p(f) = 0$;

(2) $\mu_p(fg) = \mu_p(f) + \mu_p(g)$;

(3) $\mu_p(f+g) \geq \min\{\mu_p(f), \mu_p(g)\}$.

推论 3.2.2 设 $p \in X$ 是 X 的光滑点, 则

$$\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p} = \{f \in Rat(X) \mid f = 0 \text{ 或者 } \mu_p(f) \geq 0\}$$

$\mathfrak{m} = \{f \in Rat(X) \mid f = 0 \text{ 或者 } \mu_p(f) \geq 1\}$.

定义 3.2.7 若 $\mu_p(f) > 0$, 则称 p 为 f 的 $\mu_p(f)$ 重零点; 若 $\mu_p(f) < 0$, 则称 p 为 f 的 $|\mu_p(f)|$ 重极点.

定义 3.2.8 一维 Noether 整闭整环称为离散赋值环 DVR.

3.3 正规代数簇

3.3.1 正规簇上的奇点集

我们从上节可知, 对于不可约代数曲线来说, 正规和光滑是一回事情. 本节我们考虑当维数超过一的不可约代数簇, 正规与光滑的关系.

定理 3.3.1 设 X 是不可约仿射代数簇. 则 $Co\dim_X X_{sing} \geq 2$, 即

$$\dim X_{sing} \leq \dim X - 2$$

证明 (a). 设 $H \subseteq X$ 是一个不可约超曲面, 且设 $I(H) = \langle f \rangle$. 又 $p \in H \subsetneq X$, 我们有如下断言: 如果 p 是 X 的奇点, 则 p 也是 H 的奇点.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I(H) & \longrightarrow & \varnothing(X) & \xrightarrow{1_H} & \varnothing(H) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \cup & & \cup & & \\ 0 & \longrightarrow & I(H) & \longrightarrow & \mathfrak{m}_p & \xrightarrow{1_H} & \mathfrak{m}_{H,p} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

上述的 $\mathfrak{m}_{H,p}$ 是极大理想, 且 $\mathfrak{m}_{H,p} = \mathfrak{m}_p/\varnothing(x)f$. 由于 $\mathfrak{m}_{H,p}^2$ 在 $\varnothing(X)$ 中的原像为 $\mathfrak{m}_p^2$, 且有正合列 $*$, 即 $\mathfrak{m}_p^2$ 在 $\varnothing_{H,p}$ 中的像包含在 $\mathfrak{m}_{H,p}^2$ 中.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}\overline{f} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}_p}{\mathfrak{m}_p^2} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}_{H,p}}{\mathfrak{m}_{H,p}^2} \longrightarrow 0$$

所以

$$\begin{aligned} \dim T_p(H) &= \dim \tfrac{\mathfrak{m}_{H,p}}{\mathfrak{m}_{H,p}^2} = \dim \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 - \dim \mathbb{C}\overline{f} \\ &= \dim T_p(X) - \dim \mathbb{C}\overline{f} \geq T_p(X) - 1 \\ &> \dim X - 1 = \dim H \end{aligned}$$

即 p 为 X 的奇点, 这就推出 p 也为 H 的奇点.

(b) 现设 $co\dim_X X_{sing} = 1$, 即 X_{sing} 中包含 X 的一个不可约超曲面 H. 令 $\mathfrak{p} = I(H)$. 如果 $\mathfrak{p}$ 是主理想, 由 (a) 知, H 上的点都是 H 的奇点. 这不可能. 一般地, $h_t(\mathfrak{p}) = 1$, 或者 $\dim A/\mathfrak{p} = d-1$. $A = \varnothing(X), A/\mathfrak{p} = \varnothing(H)$. 则 $A_\mathfrak{p}$ 是一维 Noether 局部整环. 因为 A 整闭, 且这是局部性质, 所以 $A_\mathfrak{p}$ 整闭. 由局部性质的结论, $A_\mathfrak{p}$ 是离散赋值环. 从而 $A_\mathfrak{p}$ 的极大理想 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ 是主理想. $\mathfrak{m} = \left\langle \frac{x}{s_0} \right\rangle_\mathfrak{p}$, $x \in \mathfrak{p}$, $s_o \notin \mathfrak{p}$.

$$\mathfrak{m} = \frac{x}{s_0}A_\mathfrak{p} = xA_\mathfrak{p} = \langle x \rangle_\mathfrak{p}, \mathfrak{p} = \langle y_1, y_2, \cdots, y_r \rangle \lhd A$$

从而存在 $s_i \notin \mathfrak{p}$, 使得 $s_i y_i = a_i x$. 令 $s = s_1 s_2 \cdots s_r$. 则 $sy_1, \cdots, sy_r \in Ax$, $y_1, \cdots, y_r \in A_s x$.

$$\mathfrak{p}A_s = A_s x \subseteq A_s = \varnothing(X_s), \quad \mathfrak{p}A_s = \mathfrak{p}\varnothing(X)_s = I(H \cap X_s)$$

X 在 H 上的点都奇异, 所以 X_s 在 $H \cap X_s$ 上的点都奇异. 同样得出不可约超曲面 $H \cap X_s$ 无光滑点, 矛盾! ■

推论 3.3.1 设 X 是正规不可约仿射代数簇. $H \subseteq X$, 它是 X 上的不可约超曲面. $\mathfrak{p} = I(H) \lhd \varnothing(X)$, 则 $\varnothing(X)_\mathfrak{p}$ 是离散赋值环. 从而可定义赋值

$$\mu_H : \quad Rat(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

定义 3.3.1 设 $\varphi \in Rat(X)^*$, 若 $\mu_H(\varphi) = m > 0$, 则称 H 为 φ 的 m 重零点除子. 若 $\mu_H(\varphi) = -m < 0$, 则称 H 为 φ 的 m 重极点除子.

3.3.2 正规簇上的正则函数

设 X 是 d 维正规代数簇. $0 \neq f \in Rat(X)$. 如果 f 在 $p \in X$ 点有定义, 则称 f 在 p 点正则.

定理 3.3.2 设 X 是正规不可约放射代数簇. $f \in Rat(X)$ 是有理函数. 在开集 $U \subset X$ 上有定义. 如果 $Co\dim_X(X-U) \geq 2$, 则 f 在 X 上正则, 即 $f \in \mathcal{O}(X)$.

证明 定义理想 $I = \{q \in \mathcal{O}(X) \mid qf \in \mathcal{O}(X)\}$. 则 f 在 $Z(I)$ 以外有定义. 从而知

$$U \subset X - Z(I)$$

f 在 $Z(I)$ 上无定义. 故 $\dim Z(I) \leq \dim X - 2$. 又由于

$$A = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_d][\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m]$$

$R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_d]$ 为多项式环. A 在 R 上整, 从而知

$$\dim Z(I \cap R) \leq d - 2, \quad d = \dim X$$

R 是多项式环, 从而知存在两个互素的多项式 $q_1, q_2 \in I \cap R$. 因为 $I \cap R$ 包含一个非零的极小素理想 $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1$ 必为主理想. $\mathfrak{p}_1 = \langle q_1 \rangle$, q_1 不可约. $I \cap R \subsetneq \mathfrak{p}_1$, 否则 $\dim Z(I \cap R) \geq d - 1$ 矛盾. 取

$$q_2 \in I \cap R - \mathfrak{p}_1$$

即可. 由 I 的定义, 存在 $p_1, p_2 \in \mathcal{O}(X)$, 使得 $f = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$. $Rat(X)/\mathbb{C}(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ 是代数扩张. 设

$$\lambda^N + r_1\lambda^{N-1} + \cdots + r_{N-1}\lambda + r_N$$

为 f 的极小 (特征) 多项式, $r_i \in \mathbb{C}(x_1, x_2, \cdots, x_d)$. 则知

$$f^N + r_1 f^{N-1} + \cdots + r_{N-1} f + r_N = 0$$

于是 $p_1^N + q_1 r_1 p_1^{N-1} + \cdots + q_1^{N-1} r_{N-1} p_1 + q_1^N r_N = 0$. 这是 p_1 的特征多项式, 又 $p_1 \in \mathcal{O}(X)$ 在 R 上整, 故

$$q_1^i r_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

同理

$$q_2^i r_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

因为 R 是 UFD, 故 $r_i \in R, i = 1, 2, \cdots, N$. 即 f 在 R 上整. 又由 $\mathcal{O}(X)$ 是整闭整环, 故 $f \in \mathcal{O}(X)$. ■

推论 3.3.2 设 X 是正规不可约的, 则

$$\mathcal{O}(X) = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{p}}$$

这里 $\mathfrak{p}$ 跑遍所有非零的极小理想.

证明 设 $r \in \bigcap\limits_{\mathfrak{p}} \emptyset(X)_{\mathfrak{p}}$, 对任何极小理想 $\mathfrak{p}$, 知

$$I = \{q \in \emptyset(X) \mid qr \in \emptyset(X)\} \not\subseteq \mathfrak{p}$$

否则, 由 $I \subseteq \mathfrak{p}$ 知, $\mathcal{S} = \emptyset(X) - \mathfrak{p}$ 满足

$$r\mathcal{S} \cap \emptyset(X) = \emptyset$$

即 $r \notin \emptyset_P = S^{-1}\emptyset(X)$ 与假设矛盾. 因此 $Z(I)$ 中不含超曲面. 从而知 $\dim Z(I) \leq \dim X - 2$. 所以 r 在 $X - Z(I)$ 上有定义知 $r \in \emptyset(X)$. ■

3.3.3 正规簇上的除子

设 X 是 d 维正规不可约代数簇, $d \geq 1$. 令 $\mathscr{H} = \{H \subseteq X \mid H$ 是不可约超曲面$\}$. 注意到 $I(H)$ 不一定为主理想, 即 H 不一定有一个 "定义方程".

定义 3.3.2 设 $H \subseteq X$. D 是一个下述形式的代数和(有限和).

$$D = \sum_{H \in \mathscr{H}} n_H H, n_H \in \mathbb{Z} \qquad D > 0 \Longleftrightarrow n_H \geq 0, \forall\, H \in \mathscr{H}$$

则称 D 是 X 上的一个除子.

命题 3.3.1 除子的全体构成一个加群(合并同类项)

$$DivX = \bigoplus_{H \in \mathscr{H}} \mathbb{Z}_H$$

注 3.3.1 对于任意的 $H \in \mathscr{H}$, 可定义一个赋值 $\mu_H : Rat(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$. 即由离散赋值环 $\emptyset(X)_H$ 给出. ■

定义 3.3.3 设 $f \in Rat(X)^*$, 则可定义除子

$$div(f) = \sum_{H \in \mathscr{H}} \mu_H(f) \cdot H$$

这样的除子称为 "主除子".

注 3.3.2 (1) 只有有限个 H 使得 $\mu_H(f) \neq 0$. 因为 $f = \frac{b}{a}$, $a, b \in \emptyset(X)$.

$$Z(a) = H_1 \cup \cdots \cup H_k, \quad Z(b) = H_1' \cup \cdots \cup H_k'$$

所以, 当 H 不在 $H_1, \cdots, H_k, H_1', \cdots, H_s'$ 之中时, $\mu_H(f) = 0$;

(2) $div(f \cdot h) = div(f) + div(h)$, 这里 $f, h \in Rat(X)^*$;

(3) $div(f) \geq 0 \Longleftrightarrow f \in \emptyset(X)$;

(4) $\mu_H(f) \geq 0, \forall\, H \in \mathscr{H} \Longleftrightarrow f \in \emptyset(X)_H, \forall\, H \Longleftrightarrow f \in \bigcap\limits_{H \in \mathscr{H}} \emptyset(X)_H = \emptyset(X)$;

(5) $div(f) = 0 \Longleftrightarrow f$ 是 $\emptyset(X)$ 中的可逆元. 这是因为, 由 $div(f) = 0$ 可知, $f \in \emptyset(X)$.

$$div(f^{-1}) = div(f) = 0 \Longrightarrow f^{-1}\emptyset(X)$$

所以 f 可逆. ■

定义 3.3.4 如果存在 $f \in Rat(X)^*$, 使得 $D - D' = div(f)$. 则称两除子 $D, D' \in Div(X)$ 称为是线性等价的, 记为 $D \equiv D'$.

命题 3.3.2 上述的 $\equiv$ 是等价关系, 等价类的全体称为是"除子类群".

注 3.3.3 规定符号 $Cl(X) := Div(X)/\{$ 主除子群 $\}$.

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(X)^* \longrightarrow Rat(X)^* \longrightarrow Div(X) \longrightarrow Cl(X) \longrightarrow 0$$

注 3.3.4 $Cl(X) = 0 \Longleftrightarrow$ 任何超平面都由 $\mathcal{O}(X)$ 中的一个函数定义 $\Longleftrightarrow \mathcal{O}(X)$ 的所有极小非零素理想 $\mathfrak{p}$ 都是主理想 $\Longleftrightarrow$ 从代数方面, $\mathcal{O}(X)$ 是 UFD. ■

3.4 代数簇之间的态射

3.4.1 态射

回顾: 设 X 是一个代数簇(不一定不可约), 则 X 上的正则函数环(坐标函数环)定义为

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I(X), \quad X \subset \mathbb{C}^n$$

$\mathcal{O}(X)$ 的元都可看成是 X 上的函数.

定义 3.4.1 设 X, Y 是仿射簇. $\varphi : X \longrightarrow Y$ 是一个映射, 如果 Y 上的正则函数在 φ 的拉回下仍是 X 上的正则函数:

$$\forall f \in \mathcal{O}(Y) \Longrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$$

则称 φ 是"正则的", 或是"态射".

注 3.4.1 记 $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, 则 φ^* 是一个环同态 $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$. 有时, 称 φ^* 为 φ 的余态射. ■

定义 3.4.2 如果 φ 是单射且为满射, φ, φ^{-1} 都是态射, 则称 φ 为同构. 如果 $X = Y$, 则称 φ 为自同构.

例 3.4.1 映射 $\varphi = (f_1, f_2, \cdots, f_m) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ 是正则的当且仅当

$$f_1, f_2, \cdots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$$

这是因为 $\mathbb{C}^m$ 的坐标函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 有 $\varphi^*(y_i) = f_i$. ■

例 3.4.2 设 X 是仿射簇, $\varphi = (f_1, f_2, \cdots, f_m) : X \longrightarrow \mathbb{C}^m$. 因为 $\varphi^*(y_i) = f_i$, 所以 φ 正则当且仅当 $f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{O}(X)$. ■

例 3.4.3 设 $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ 为态射. $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^m$ 是仿射簇. 若 $\varphi(X) \subset Y$, 则诱导映射 $\overline{\varphi} : X \longrightarrow Y$ 是正则的. 这是因为, $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[\overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_m]$, $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n]$, $\overline{\varphi}^*(\overline{y}_i) = f_i(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n) \in \mathcal{O}(X)$. ■

例 3.4.4 设 $\varphi : X \longrightarrow Y$ 正则, $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ 是闭子簇. $\varphi(X') \subset Y'$. 则 $\varphi' = \varphi|_X : X' \longrightarrow Y'$ 也是正则. ■

引理 3.4.1　设 $X \subseteq \mathbb{C}^m, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ 是闭子簇. $\varphi : X \longrightarrow Y$ 为态射, 则存在多项式

$$f_1, f_2, \cdots, f_m \in \underline{[}x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Phi=(f_1,f_2,\cdots,f_m)} & \mathbb{C}^m \\ \cup & & \cup \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

即 $\varphi = \Phi|_X$.

证明　设 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 表示 $\mathbb{C}^m$ 的坐标函数.

$$\overline{y_j} = y_j|_Y, \quad \overline{f}_j := \varphi^*(\overline{y}_j) \in \varnothing(X), \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

因为

$$\varnothing(X) = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{I(X)}$$

存在 $f_j \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, 使得

$$\overline{f}_j = f_j + I(X)$$

下证 $\Phi = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 满足引理 3.4.1 的要求. 设

$$a \in X \subseteq \mathbb{C}^n, \quad \varphi(a) := b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

则

$$b_j = y_j(b) = \overline{y}_j(b) = \overline{y}_j(\varphi(a)) = \varphi^*(\overline{y}_j)(a) = \overline{f}_j(a) = f_j(a)$$

所以 $\varphi(a) = \Phi(a)$. 证毕. ∎

注 3.4.2　我们用 Mor(X, Y) 表示从 X 到 Y 的所有态射的集合, $Alg_{\mathbb{C}}(\varnothing(Y), \varnothing(X))$ 表示 $\varnothing(Y)$ 到 $\varnothing(X)$ 保持常数 $\mathbb{C}$ 的环同态的集合. 则有映射

$$Mor(X, Y) \overset{1:1}{\simeq} A|_{g\,\mathbb{C}}(\varnothing(Y), \varnothing(X))$$
$$\varphi \longmapsto \varphi^*$$ ∎

定理 3.4.1　上述对应是1 : 1的.

证明　(1) “单性”: 若 $\varphi_1^* = \varphi_2^*$, 则对所有 $f \in \varnothing(Y), \forall\, p \in X$, 令 $q_1 = \varphi_1(p)$, $q_2 = \varphi_2(p)$.

$$f(q_1) = \varphi_1^*(f)(p) = \varphi_2^*(f)(p) = f(\varphi_2(p)) = f(q_2)$$

下证 $q_1 = q_2$, 即 $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$. 反证, 若 $q_1 \neq q_2$, 则极大理想 $\mathfrak{m}_{q_1} \neq \mathfrak{m}_{q_2}$, 取 $f_1 \in \mathfrak{m}_{q_1} - \mathfrak{m}_{q_2}$, 则 $f_1(q_1) = 0, f(q_2) \neq 0$. 这与上结论矛盾. 所以 $q_1 = q_2$, 即 $\varphi_1 = \varphi_2$.

(2) “满性”: 设 $\rho : \varnothing(Y) \longrightarrow \varnothing(X)$ 是 $\mathbb{C}$-代数同态. $Y \subset \mathbb{C}^m$, 其坐标为 $y_1, y_2, \cdots, y_m$. 令

$$\overline{y}_i = y_i|_Y \in \varnothing(Y)$$

则知

$$f_j := \rho(\overline{y}_j) \in \varnothing(X)$$

定义态射

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad \Phi := (f_1, f_2, \cdots, f_m), \quad \Phi^*(y_j) = f_j$$

如果 $h = h(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in I(Y)$, 又由于 ρ 是环同态, 我们有

$$h(f_1, f_2, \cdots, f_m) = h(\rho(\overline{y}_1), \cdots, \rho(\overline{y}_m)) = \rho(h(\overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_m)) = 0$$

因为 $h \in I(Y)$, 所以 $h(\overline{y_1}, \cdots, \overline{y_m}) = h|_Y = 0$. 故对于任意的 $a \in X$, $h \in I(Y)$, 有

$$h(\Phi(a)) = 0$$

所以 $\Phi(X) = Y$, 从而 $\varphi = \Phi|_X : X \longrightarrow Y$, 且

$$\varphi^*(\overline{y}_j) = \Phi^*(y_j) = f_j = \rho(\overline{y}_j)$$

所以 $\varphi^* = \rho$. ■

3.4.2 态射的像、原像和纤维

定理 3.4.2 设 $\varphi : X \longrightarrow Y$ 是仿射簇之间的态射.

(1) 若 $\mathcal{S} \subseteq \text{Ø}(Y)$, 则

$$\varphi^{-1}(Z_Y(S)) = Z_X(\varphi^*(S))$$

所以, 在 Zariski 拓扑下, φ 是连续的.

(2) 若 $I \lhd \text{Ø}(X)$, 则

$$\overline{\varphi(Z_X(I))} = Z(\varphi^{*-1}(I))$$

证明 (1) $p \in \varphi^{-1}(Z_Y(S)) \iff \varphi(p) \in Z_Y(S) \iff \forall\, f \in S, f(\varphi(p)) = 0 \iff \forall\, f \in S, \varphi^*(f)(p) = 0 \iff p \in Z_X(f^*s)$.

(2) 设 $A \subseteq Y$, 则 $\overline{A} = Z(I(A))$. 所以 $I(\overline{A}) = I(A)$. 即

$$f \in \text{Ø}(Y), \quad A = \varphi(Z_X(I))$$

而

$$f|_{\overline{A}} = 0 \iff f|_A = 0 \iff \varphi^*(f)|_{Z_X(I)} \iff \varphi^*(f) \in I(Z_X(I)) = \sqrt{I}$$

当且仅当存在 m, 使得

$$\varphi^*(f^m) \in I \iff f^m \in \varphi^{*-1}(I) \iff f \in \sqrt{\varphi^{*-1}(I)}$$

所以

$$\overline{A} = Z_Y(\sqrt{\varphi^{*-1}(I)}) = Z_Y(\varphi^{*-1}(I))$$

即

$$\overline{\varphi(Z_X(I))} = Z_Y(\varphi^{*-1}(I))$$

证毕. ■

定义 3.4.3 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是仿射簇之间的态射, $y \in Y$ 是一个点. 则定义 y 上的纤维 $f^{-1}(y)$ 为

$$f^{-1}(y) = Z_X(f^* m_y)$$

作为集合:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

3.4.3 态射由局部环同态决定

设 $x \in X, \mathfrak{m}_X \lhd \mathcal{O}(X)$ 是极大理想, $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x}$ 是局部环.

定义 3.4.4 设 $(A, m), (B, n)$ 是两局部环. $\varphi : A \longrightarrow B$ 为环同态, 如果 $\varphi(m) \subseteq n$, 则称 φ 为局部同态.

设 $\varphi : X \longrightarrow Y$ 是态射, $y = \varphi(x)$. 则

$$\varphi_x^* : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

是局部的.

定理 3.4.3 设 X, Y 是不可约的, $\varphi : X \longrightarrow Y$ 为态射. $y = \varphi(x), x \in X$.

(1) 如果有态射 $\psi : X \longrightarrow Y$ 使得 $\varphi_x^* = \psi_x^*$, 则 $\varphi = \psi$.

(2) $x \in X, y \in Y$. 若有局部同态 $\rho : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, 则存在开集 $U \subset X, x \in U$, 和态射 $\varphi : U \longrightarrow Y$, 使得 $y = \varphi(x), \rho = \varphi_x^*$.

(3) 若 $x \in X, y \in Y, \rho : \mathcal{O}_{Y,y} \cong \mathcal{O}_{X,x}$ 为同构, 则存在开集 U, V, 使得

$$x \in U \subset X, \quad y \in V \subset Y$$

以及同构 $\varphi : U \simeq V$, 使得 $\varphi_x^* = \rho$.

证明 (1)由下图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{Y,\varphi(X)} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_x^*} \\ \mathcal{O}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

所以 φ^* 由 φ_x^* 唯一决定, 而 φ 由 φ^* 唯一决定. 所以 φ 由 φ_x^* 唯一决定.

(2) $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_m]$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{O}_{X,x} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{O}(Y) & & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

令 $g_j := \rho(\overline{y}_j)$, 则存在 $t \in \mathcal{O}(X) - \mathfrak{m}_x$, 使得

$$g_j \in \mathcal{O}(X)_t (\Longleftrightarrow t g_j \in \mathcal{O}(X))$$

所以 $\rho(\mathcal{O}(Y)) \subset \mathcal{O}(X)_t$. 因此存在态射 $\varphi : X_t \longrightarrow Y$ 使得 $\varphi^* = \rho|_{\mathcal{O}(X)_t}$, 所以 $\varphi_x^* = \rho$.

(3) 由证明 (2), 不妨设存在 $\varphi : X \longrightarrow Y$, 使得 $\varphi_x^* = \rho$, 即 $\rho(\emptyset(Y)) \subset \emptyset(X)$. 设

$$\emptyset(X) = \mathbb{C}[\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n]$$

因为 $\emptyset_{Y,y} \overset{\rho}{\cong} \emptyset_{X,x}$, 故

$$\overline{x_i} = \frac{\rho(h_i)}{\rho(s_i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

令 $s = s_1 s_2 \cdots s_m, s_i \in \emptyset(Y) - \mathfrak{m}_y$, 则知 $\overline{x}_i = \frac{\rho(a_i)}{\rho(s)}$, 令 $t = \rho(s)$. 则 $\rho(\emptyset(Y)_s) = \emptyset(X)_t$. 所以 $\rho : \emptyset(Y)_s \simeq \emptyset(X)_t$. 结论 (3) 成立. ■

定义 3.4.5 如果 $\overline{\varphi(X)} = Y$, 则称 φ 是支配态射. 此时, $\varphi^* : \emptyset(Y) \hookrightarrow \emptyset(X)$ 是单射, 从而诱导了函数域之间的扩张, $\varphi^* : Rat(Y) \hookrightarrow Rat(X)$.

3.5 总结

至此, 我们对前面内容作一个简要的总结.

- 解方程组 $\begin{cases} f_1(x_1, \ x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (I)$

  $\Longleftrightarrow$ $Z(I) \subseteq K^n$;

  $\Longleftrightarrow$ $Z(I) = Z(\sqrt{I}) \subseteq K^n$;

  $\Longleftrightarrow$ $A = K[\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n] = K[x_1, \cdots, x_n]/\sqrt{I}$ 的极大素理想集;

  $\Longleftrightarrow$ 研究无幂零元的仿射环.

- 解不可约方程组 $\Longleftrightarrow$ 研究仿射整环 A.

- 仿射整环 A 的结构:

$$A = K[y_1, \cdots, y_d][\eta_1, \cdots, \eta_r]$$

- 仿射整环的研究 $\Longleftrightarrow$ 多项式环的“有限扩张”的研究.

- 推广:

  (1) Noether 环的研究;

  (2) 环的整扩张的研究.

- 新环的构造方法

  (1) 商环: 研究 X 的子簇 Y

$$0 \longrightarrow I_X(Y) \longrightarrow \emptyset(X) \longrightarrow \emptyset(Y) \longrightarrow 0$$

  (2) 分式环:$S^{-1}A$;

(3) 整闭包 $\widetilde{A}$.

命题 3.5.1 (封闭性) (1) 仿射环的商环仍为仿射环. Noether 环的商环仍为 Noether 环;

(2) 仿射环的分式环不一定为仿射环, Noether 环的分式环仍为 Noether 环;

(3) 仿射环的整闭包仍为仿射环. Noether 环的整闭包不一定为 Noether 的.

例 3.5.1 (反例) (1) $s \in A$, A 仿射, 则 $A_s = A[\frac{1}{s}]$ 也是仿射的;

(2) $\dim A \leq 2$, 则 A 是 Noether 的可推出 $\widetilde{A}$ 是 Noether 的. ■

命题 3.5.2 (维数理论) 设 $A = \emptyset(X), X$ 不可约.

$$\dim X = \dim A = \deg_{tr} Rat(A) \tag{3-1}$$

$$= Krull - \dim A \tag{3-2}$$

其中定义 3-2 适用于任意 Noether 环.

命题 3.5.3 (光滑性) 设 $A = \emptyset(X)$, $p \in X$, $\mathfrak{m}_p \lhd A$, 则 X 在 p 点光滑,

$\Longleftrightarrow$ $\dim T_p(X) = \dim X$;

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{m}_p A_{\mathfrak{m}_p}$ 由 $\dim X$ 个元生成; (*)

$\Longleftrightarrow$ $(A_{\mathfrak{m}_p}, \mathfrak{m})$ 是正则局部环.

(*) 适用于任何 Noether 局部环 $(A, \mathfrak{m})$.

即对 Noether 环, 可定义维数, 可定义光滑性.

3.6 有限态射

本节我们将介绍代数函数, 以及有限覆盖等重要结果.

3.6.1 环的有限扩张

定义 3.6.1 设 A, B 为两整环, $A \subseteq B$. 如果 B 是有限生成 A 模, 即

$$B = Ab_1 + Ab_2 + \cdots + Ab_m$$

则称 B 是 A 的有限扩张, 且一定是整扩张.

命题 3.6.1 (有限扩张的基本性质 I) (1) 设 $\mathfrak{q} \lhd B$ 为素理想, 则 $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ 为 A 的素理想;

(2) 设 $\mathfrak{m} \lhd B$ 为极大理想, 则 $\mathfrak{m} \cap A \lhd A$ 也是极大理想;

(3) 把 B 中的极大素理想链限制到 A 上, 也是极大素理想链.

命题 3.6.2 (上升定理) 设 $A \subseteq B$. 有下列交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} B: & \mathfrak{q}_0 & \subsetneq & \mathfrak{q}_1 & \subsetneq & \mathfrak{q}_2 & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{q}_n \\ & \rightsquigarrow & & \rightsquigarrow & & \rightsquigarrow & & & & \rightsquigarrow \\ A: & \mathfrak{p}_0 & \subsetneq & \mathfrak{p}_1 & \subsetneq & \mathfrak{p}_2 & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{p}_n \end{array}$$

命题 3.6.3 (下降定理)

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{q}_m & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{q}_2 & \subsetneq & \mathfrak{q}_1 & \subsetneq & \mathfrak{q}_0 \\ \rightsquigarrow & & & & \rightsquigarrow & & \rightsquigarrow & & \rightsquigarrow \\ \mathfrak{p}_m & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{p}_2 & \subsetneq & \mathfrak{p}_1 & \subsetneq & \mathfrak{p}_0 \end{array}$$

命题 3.6.4 (有限扩张的基本性质 II) (1) $\dim A = \dim B$;

(2) 当 A, B 为仿射环时, A 中的任何极大理想是 B 中某极大理想的限制. 设 $\mathfrak{p}_0 = \langle 0 \rangle$, $\mathfrak{p}_n$ 是极大理想, 由上升定理, 存在极大理想 $\mathfrak{q}_n$, 使得 $\mathfrak{p}_n = A \cap \mathfrak{q}_n$;

(3) 当 A 是整闭整环时, $f \in B$, 则

$$\sqrt{\sqrt{\langle f \rangle} \cap A} = \sqrt{\langle N(f) \rangle}$$

(4) 若 $C \supseteq B$ 是 B 上的有限扩张. 则 $C \supseteq A$ 也是有限扩张;

(5) 设 A 整闭, B/A 整, 则 $b \in B$ 的特征多项式与极小多项式都在 $A[\lambda]$ 中.

3.6.2 有限态射

定义 3.6.2 设 X, Y 是 $\mathbb{C}$ 上的两不可约代数簇. $\varphi : X \to Y$ 是一个态射. 如果满足

(1) $\varphi : X \longrightarrow Y$ 是支配态射, 即 $\overline{\varphi(X)} = Y$;

(2) $\varphi^* : \emptyset(Y) \longrightarrow \emptyset(X)$ 是有限的, 即 $\varphi^*(\emptyset(Y)) \subseteq \emptyset(X)$ 是有限扩张.

则称 $\varphi : X \to Y$ 是有限态射.

下面我们介绍一系列有限态射的基本性质.

命题 3.6.5 $\varphi^* : \emptyset(Y) \to \emptyset(X)$ 是单同态

证明 要证明单同态, 我们只需说明映射的核为零. 反证, 假设 $\mathfrak{p} = \ker \varphi^* \neq 0$, 因 $\emptyset(Y)/\mathfrak{p} \hookrightarrow \emptyset(X)$, 故 $\emptyset(Y)/\mathfrak{p}$ 无零因子. 从而 $\mathfrak{p}$ 为素理想. 从而 $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p}, Z(\mathfrak{p}) \subsetneq Z(0) = Y$. 计算 $\overline{\varphi(X)} : X = Z(0)$

$$\overline{\varphi(X)} = \overline{Z_X(0)} = Z_Y({\varphi^*}^{-1}(0)) = Z_Y(P) \subsetneq Y$$

与 φ 是支配映射的条件矛盾. ■

由上述命题, 不妨设 $\varphi^* : \emptyset(Y) \hookrightarrow \emptyset(X)$ 为包含同态. 即 $\emptyset(Y) \subseteq \emptyset(X)$.

命题 3.6.6 $\varphi : X \to Y$ 为满态射.

证明　设 $y \in Y$ 为一个点, 则 $\mathfrak{m}_y \lhd \emptyset(Y)$ 极大. 由命题 3.6.4(2), 存在极大理想 $\mathfrak{m} \lhd \emptyset(X)$, 使得 $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m} \cap \emptyset(Y)$. 令 $x = Z_X(\mathfrak{m})$, 即 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. 则

$$\varphi(x) = \varphi(Z_X(\mathfrak{m}_x)) = Z_Y({\varphi^*}^{-1}\mathfrak{m}_x) = Z_Y(\mathfrak{m}_x \cap \emptyset(Y)) = Z_Y(\mathfrak{m}_y) = y$$

所以 $\varphi : X \to Y$ 是满. ■

命题 3.6.7　$\dim X = \dim Y$.

证明　因为 $\dim X = \dim \emptyset(X) = \dim \emptyset(Y) = \dim Y$, 所以 $\dim X = \dim Y$. ■

命题 3.6.8　有限态射的复合仍为有限态射.

证明　设 $\varphi : X \longrightarrow Y, \psi : Y \longrightarrow Z$ 都是有限态射, 则

$$\emptyset(Z) \subseteq \emptyset(Y) \subseteq \emptyset(X)$$

由命题 3.6.4(4) 可知, $\emptyset(X)$ 是 $\emptyset(Z)$ 的有限扩张, 从而 $\psi \circ \varphi$ 是有限的. 可参考下图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\
Z \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\emptyset(X) & \emptyset(Y) \arrow[l] \\
\emptyset(Z) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[ur, "\psi^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$\pi^* = \varphi^* \circ \psi^*$, 即 $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. ■

命题 3.6.9　若 $X' = Z_X(\mathfrak{q})$, $Y' = Z_Y(\mathfrak{p})$ 都是不可约子簇. 如果 $\varphi(X') \subseteq Y'$, 且 $\overline{\varphi(X')} = Y'$. 则 $\varphi' = \varphi|_{X'}$, 且 $\varphi' : X' \longrightarrow Y'$ 是有限态射.

证明　考虑链

$$0 \longrightarrow I(X') \longrightarrow \emptyset(X) \xrightarrow{u^*} \emptyset(X') \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow I(Y') \longrightarrow \emptyset(Y) \xrightarrow{v^*} \emptyset(Y') \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\
X' \arrow[u, hook, "u"] \arrow[r, "\varphi'"] & Y' \arrow[u, hook, "v"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\emptyset(X) \arrow[d, "u^*"] & \emptyset(Y) \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[d, "v^*"'] \\
\emptyset(X') & \emptyset(Y') \arrow[l, "{\varphi'}^*"]
\end{tikzcd}$$

由于

$$\emptyset(X) = \varphi^*(\emptyset(Y))e_1 + \cdots + \varphi^*(\emptyset(Y))e_m$$

左右两边同时作用 u^* 可得

$$u^*\emptyset(X) = u^*\varphi^*(\emptyset(Y))u^*(e_1) + \cdots + u^*\varphi^*(\emptyset(Y))u^*(e_m)$$

即

$$\begin{aligned}
\emptyset(X') &= {\varphi'}^*(v^*(\emptyset(Y)))u^*(e_1) + \cdots + {\varphi'}^*(v^*(\emptyset(Y)))u^*(e_m) \\
&= {\varphi'}^*(\emptyset(Y'))u^*(e_1) + \cdots + {\varphi'}^*(\emptyset(Y'))u^*(e_m)
\end{aligned}$$

故 $\emptyset(X')$ 为 ${\varphi'}^*(\emptyset(Y'))$ 的有限扩张. 所以 $\varphi' : X' \to Y'$ 为有限态射. ■

命题 3.6.10 $\varphi : X \to Y$ 为闭映射, 也为开映射.

在证明命题 3.6.10 之前, 我们先做一些准备工作.

引理 3.6.1 若 $X' \subseteq X$ 是不可约子簇, 则 $\overline{\varphi(X')} = Y'$ 也不可约.

证明 反证, 若 Y' 可约, 则 $Y' = Y_1 \cup Y_2$, 这里 Y_i 是非空闭集, $Y_i \neq Y', i = 1, 2$. 又因为 φ 是连续映射, 所以 $\varphi^{-1}(Y_i)$ 为 X 中的闭子集. 从而 $\varphi^{-1}(Y_i) \cap X'$ 为 X 的闭子集.

$$X' = (\varphi^{-1}(Y_1) \cap X') \cup (\varphi^{-1}(Y_2) \cap X')$$

由于 X' 不可约, 故存在 $i = 1$ 或 $i = 2$, 使得 $X' = \varphi^{-1}(Y_i) \cap X'$. 所以 $X' \subseteq \varphi^{-1}(Y_i)$, 也就是说 $\varphi(X') \subseteq Y_i$, 因此 $\overline{\varphi(X')} \subseteq Y_i$. 所以

$$\overline{\varphi(X')} = Y' = Y_i$$

这与假设矛盾. 所以 Y' 不可约. ■

推论 3.6.1 当 X' 不可约时, $\varphi(X') = Y'$, 即 $\varphi(X')$ 为闭子集.

证明 因为 $\varphi' = \varphi|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$ 为有限态射, 所以 φ' 是满的, 即 $\varphi(X') = Y'$. ■

下面我们来证明命题 3.6.10.

证明 设 $X' \subseteq X$ 为闭子集, 则 $X' = X_1 \cup \cdots \cup X_r$, 其中 X_i 不可约, 由推论 3.6.1 $\varphi(X_i)$ 为 Y 的闭子集. 从而 $\varphi(X') = \varphi(X_1) \cup \cdots \cup \varphi(X_z)$ 为 Y 的闭子集. 故 φ 为闭映射. ■

命题 3.6.11 对于任意的 $y \in Y$, $|\varphi^{-1}(y)| < +\infty$.

证明 若 $\varphi^{-1}(y)$ 不是有限点集. 则 $\varphi^{-1}(y)$ 包含一个正维数的不可约子簇 $X' \subseteq \varphi^{-1}(y)$, 则 $\varphi : X' \longrightarrow y = Y'$ 为有限.

$$\dim Y' = \dim\{y\} = 0$$

这是矛盾的, 所以 $\dim \varphi^{-1}(y) = 0$. 从而 $|\varphi^{-1}(y)| < +\infty$. ■

命题 3.6.12 设 Y 是正规的, $a \in \emptyset(X), a \neq 0$. 则 $\varphi(Z_X(a)) = Z_Y(N(a))$.

证明 因为

$$\sqrt{\sqrt{\langle a \rangle} \cap \emptyset(Y)} = \sqrt{\langle N(a) \rangle}$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi(Z_X(a)) &= \varphi(Z_X(\sqrt{\langle a \rangle})) = \overline{\varphi(Z_X(\sqrt{\langle a \rangle}))} = Z_Y(\varphi^{*-1}(\sqrt{\langle a \rangle})) \\ &= Z_Y(\sqrt{\langle a \rangle} \cap \emptyset(Y)) = Z_Y(\sqrt{\langle N(a) \rangle}) = Z_Y(N(a))\end{aligned}$$

证毕. ■

命题 3.6.13 设 $\mathfrak{q} \lhd \emptyset(X)$ 为素理想, 则 $\varphi(Z_X(\mathfrak{q})) = Z_Y(\mathfrak{q} \cap \emptyset(Y))$.

证明 同上, 设 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \emptyset(Y)$, 则 $\varphi(Z_X(\mathfrak{q})) = Z_Y(\mathfrak{p})$. ■

例 3.6.1 设 X 不可约, $\widetilde{X}$ 为 X 的正规化, 即

$$\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(\widetilde{X}) \subseteq Rat(X)$$

而

$$\mathcal{O}(\widetilde{X}) = \widetilde{\mathcal{O}(X)} = \mathcal{O}(X) \text{ 在 } Rat(X) \text{ 中的整闭包}$$

以前我们证明过: $\mathcal{O}(\widetilde{X})$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 上的有限扩张. 从而, 诱导了一个有限态射 $\mu : \widetilde{X} \to X$. 又因 $Rat(\widetilde{X}) = Rat(X)$, 所以 μ 还是双有理的. ■

定义 3.6.3 设 $\varphi : X \to Y$ 为有限态射.

$$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$$

$$\varphi^* : Rat(Y) \hookrightarrow Rat(X)$$

我们把 $Rat(X)/Rat(Y)$ 的扩张次数 n 称为是 φ 的次数. 称 φ 是 n 次有限映射, 或 n 次有限覆盖.

推论 3.6.2 正规化 $\mu : \widetilde{X} \to X$ 是次数为一的有限态射.

3.6.3 有限态射的定义方程

定理 3.6.1 (Noether 定理) 任何不可约 d 维代数簇 X 是 $\mathbb{C}^d$ 的有限覆盖 $\varphi : X \to \mathbb{C}^d$.

证明

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_d][\eta_1, \cdots, \eta_r] \supseteq \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_d] = \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$$

是有限扩张, 它诱导了映射 $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}^d$. ■

下面我们讨论最重要的情形:在 Y 是整闭（或光滑）的情况下. 考虑下图

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] & X \arrow[dl, "\varphi"] \\ \mathbb{C}^d & \end{tikzcd}$$

这里 $\widetilde{\varphi}$ 也为有限覆盖. 至此我们给出假设: Y **光滑**, X **正规**.

例 3.6.2 设 $\pi : X \to Y$ 是两正规代数簇之间的 n 次覆盖, 则

$$Rat(X) = Rat(Y)[\eta] \qquad \eta^n + r_1\eta^{n-1} + \cdots + r_{n-1}\eta + r_n = 0$$

其中 $r_i = \frac{a_i}{s_i} \in \mathcal{O}(Y)$. 存在适当的非零元 $b \in \mathcal{O}(Y), b \neq 0$, 使得 $b\eta$ 在 $\mathcal{O}(Y)$ 上整. 即

$$(b\eta)^n + br_1(b\eta)^{n-1} + \cdots + b^n r_n = 0, b^i r_i \in \mathcal{O}(Y)$$

令 $\xi = b\eta \in \widetilde{\mathcal{O}(X)} = \mathcal{O}(X)$, 则

$$Rat(X) = Rat(Y)[\xi], \quad \mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}(Y)[\xi] \subseteq \mathcal{O}(X)$$

注意到

$$Rat(\mathcal{O}(Y)[\xi]) = Rat(\mathcal{O}(Y))[\xi] = Rat(Y)[\xi] = Rat(X)$$

且 $\mathcal{O}(Y)[\xi]$ 是仿射环, 从而存在代数簇 Σ, 使得

$$\mathcal{O}(\Sigma)=\mathcal{O}(Y)[\xi],\quad \mathcal{O}(\Sigma)\subseteq\mathcal{O}(X),\quad Rat(\Sigma)=Rat(X)$$

其中 $\mathcal{O}(X)$ 在 $\mathcal{O}(\Sigma)$ 上整, $\mathcal{O}(X)\subset\widetilde{\mathcal{O}(\Sigma)}$. 反之, 设 $u\in Rat(\Sigma)=Rat(X)$ 在 $\mathcal{O}(\Sigma)$ 上整, 即 $u\in\widetilde{\mathcal{O}(\Sigma)}$, 则 u 也在 $\mathcal{O}(X)$ 上整. 又因为 $\mathcal{O}(X)$ 是整闭的, 所以 $u\in\mathcal{O}(X)$. 即

$$\mathcal{O}(X)=\widetilde{\mathcal{O}(\Sigma)}=\mathcal{O}(\widetilde{\Sigma})$$

又因为 $\mathcal{O}(Y)\subset\mathcal{O}(\Sigma)\subset\mathcal{O}(X)$, 且有

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[d, "\varphi_0"'] & X \arrow[l, "\mu"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

所以, $\Sigma\overset{\varphi_0}{\to}Y$ 的次数$=Rat(\Sigma)/Rat(Y)$ 的次数$=Rat(X)/Rat(Y)$ 的次数$=n$. ■

定义 3.6.4 在上例中, 若 ξ 满足 $\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_n=0, a_i\in\mathcal{O}(Y)$, 则

$$\mathcal{O}(\Sigma)=\mathcal{O}(Y)[z]/\left\langle z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\right\rangle$$

称 $z^n+a_1z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 为 $\varphi_0:\Sigma\to Y$ 的定义方程.

定理 3.6.2 设 $\varphi:X\to Y$ 是两个 d 维正规不可约代数簇之间的 n 次覆盖. 则存在 $\varphi_0:\Sigma\to Y$, 它是一个由某 n 次不可约多项式

$$f(z):=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\in\mathcal{O}(Y)[z]$$

定义的 n 次覆盖, 使得 $X\overset{\mu}{\to}\Sigma$ 为 Σ 的正规化, 且

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Sigma \arrow[dl, "\varphi_0"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

即 $\varphi=\varphi_0\circ\mu$.

推论 3.6.3 任何 d-维不可约正规代数簇 X 都是 $\mathbb{C}^{d+1}$ 中的某超曲面

$$H:\quad F(x_1,x_2,\cdots,x_d,z)=0$$

的正规化.

证明 在定理 3.6.2 中, 令 $Y=\mathbb{C}^d$, 根据 Noether 定理可知 $\Sigma\subset\mathbb{C}^{d+1}$, 其定义方程为

$$z^n+a_1(x_1,\cdots,x_d)z^{n-1}+\cdots+a_n(x_1,\cdots,x_d)=0$$

X 为 Σ 的正规化. ■

推论 3.6.4 两正规不可约代数簇之间的次数为一的有限覆盖为同构.

证明 设 $\varphi:X\to Y$ 是有限覆盖, 从而 $\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(Y)$ 是有限扩张. 又因为 $\deg\varphi=1$, 即 $Rat(X)/Rat(Y)$ 为一次扩张域, 从而

$$\begin{array}{ccc} Rat(Y) & = & Rat(X) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{O}(Y) & \subset & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

取 $a \in \mathcal{O}(X)$, 则 $a \in Rat(Y)$. a 在 $\mathcal{O}(Y)$ 上整. 于是我们有 $a \in \widetilde{\mathcal{O}(Y)} = \mathcal{O}(Y)$, 所以 $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X)$. 故 $\varphi : X \simeq Y$. ■

推论 3.6.5 设 $\varphi : X \to Y$ 是次数为一的有限覆盖, 如果 Y 正规, 则 φ 为同构.

3.6.4 双有理等价

设 $X \subseteq \mathbb{C}^n, Y \subseteq \mathbb{C}^m$, $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}]$, $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[\overline{y_1}, \cdots, \overline{y_m}]$.

以下设 X 与 Y 双有理等价, 即存在域同构 $\rho : Rat(Y) \longrightarrow Rat(X)$.

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_d][\eta_1, \cdots, \eta_r], \qquad \mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_d][\xi_1, \cdots, \xi_l]$$

定理 3.6.3 存在 X 的开集 U 和 Y 的开集 V, 使得 $U \cong V$.

推论 3.6.6 正规化 $\mu : \widetilde{X} \to X$, 则存在开集 $U \subset \widetilde{X}, V \subset X$ 使得 $\mu|_U : U \simeq V$.

推论 3.6.7 设 $\varphi : X \to Y$ 是两正规簇之间的 n 次覆盖, 则存在 Y 上的 Zariski 开集 $V \subset Y$, 使得对于任意的 $y \in V$, 都有 $|\varphi^{-1}(y)| = n$.

证明

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"] & \Sigma \arrow[dl, "\varphi_0"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

这里, φ_0 是由一个 n 次方程定义. 故存在 $V_0 \subset Y$ 与多项式的判别式定义的超曲面 B_{φ_0} 不相交, 且对于 φ_0 在 B_{φ_0} 以外的点 y, $|\varphi_0^{-1}(y)| = n$. 存在 X 上的闭子集 $X' \subsetneq X$ 使得 μ 在 $X - X'$ 上是到像的同构.

$$\mu : X - X' \simeq \Sigma - \mu(X')$$

取 $Y' = \varphi_0\mu(X') \cup B_{\varphi_0}$, 则 $y \in Y - Y'$, 有 $|\varphi^{-1}(y)| = n$. ■

3.6.5 有限态射的正规化

命题 3.6.14 设 $\varphi : X \to Y$ 有限, 则存在 $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{X} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y & \widetilde{Y} \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd}$$

证明 首先

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[d, hook, "\varphi^*"] & \subseteq & \mathcal{O}(\widetilde{Y}) & \subseteq & Rat(Y) \arrow[d, hook, "\varphi^*"] \\ \mathcal{O}(X) & \subseteq & \mathcal{O}(\widetilde{X}) & \subseteq & Rat(X) \end{tikzcd}$$

取 $a \in \mathcal{O}(\widetilde{Y})$, 则 $\varphi^*(a) \in Rat(X)$. 由 a 在 $\mathcal{O}(Y)$ 上整, $\varphi^*(a)$ 在 $\mathcal{O}(X)$ 上整. 故 $\varphi^*(a) \in \mathcal{O}(\widetilde{X})$. 所以

$$\varphi^* : \mathcal{O}(\widetilde{Y}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{X})$$

它是有限扩张. 故存在 $\widetilde{\varphi^*} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, 使得 $\widetilde{\varphi}^* = \varphi^*$. 上图交换. ■

定理 3.6.4 设 $\varphi : X \to Y$ 是不可约代数簇之间的 n 次有限态射. 如果 Y 是正规的. 则对于任意的 $y \in Y$, $|\varphi^{-1}(y)| \le n$.

在证明定理 3.6.4 之前, 我们需要借助如下引理.

引理 3.6.2 存在 $\mathbb{C}^N$ 上的多项式 f, 使得 $f(p_1), f(p_2), \cdots, f(p_m) \in \mathbb{C}$ 两两不同.

我们来证明定理 3.6.4.

证明 设 $\varphi^{-1} = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$, 这里

$$\{p_1, p_2, \cdots, p_m\} \subseteq X \subseteq \mathbb{C}^N$$

令 $a = f|_X \in \mathcal{O}(X)$, 根据引理 3.6.2, $a(p_1), a(p_2), \cdots, a(p_m)$ 是 $\mathbb{C}$ 中 m 个不同的数. 因为 a 在 $\varphi^*\mathcal{O}(Y)$ 上整, $\mathcal{O}(Y)$ 是整闭的. 设 $m_a(\lambda)$ 为 a 的极小多项式, 从而 $m_a(\lambda) \in \mathcal{O}(Y)[\lambda]$

$$m_a(\lambda) = \lambda^k + \varphi^*(u_1)\lambda^{k-1} + \cdots + \varphi^*(u_k), \quad u_1, u_2, \cdots, u_k \in \mathcal{O}(Y)$$

$$a^k + \varphi^*(u_1)a^{k-1} + \cdots + \varphi^*(u_k) = 0$$

在 p_i 处取值, 于是

$$a(p_i)^k + \varphi^*(u_1)(p_i)a(p_i)^{k-1} + \cdots + \varphi^*(u_k)(p_k) = 0$$

即

$$a(p_i)^k + u_1(y)a(p_i)^{k-1} + \cdots + u_k(y) = 0$$

从而多项式 $\lambda^k + u_1(y)\lambda^{k-1} + \cdots + u_k(y)$ 有 m 个不同的零点, 所以 $m \le k \le n$. 定理得证. ■

3.7 纤维的维数与光滑性

3.7.1 纤维的维数

设 $\varphi : X \to Y$ 是两不可约仿射簇之间的支配态射, 即

$$\overline{f(X)} = Y, \quad n = \dim X, \quad m = \dim Y, \quad n \ge m$$

本节的一开始我们着力于研究如下问题.

问题 3.7.1 纤维 $\varphi^{-1}(y)$ 的维数是多少?

例 3.7.1 设

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (xy, xz) \end{aligned}$$

当 $p=(0,0)=0$ 时, $\varphi^{-1}(p)=X_1\cup X_2$, 其中 $X_1=Z(x)$ 是 yz-平面; $X_2=Z(y,z)$ 是 x-轴. 当 $p=(a,b)\neq 0$ 时,

$$(x,y,z)\in\varphi^{-1}(p)\Longleftrightarrow x\neq 0,\quad y=\frac{a}{x},\quad z=\frac{b}{x}$$

所以

$$\varphi^{-1}(p)=\{(t,\frac{a}{t},\frac{b}{t})\mid t\in\mathbb{C}^*\}$$

这里 $\varphi^{-1}(p)$ 为一条不可约代数曲线, 且同构于 $\mathbb{C}^*$. ■

定理 3.7.1 (1) 设 F 是 $\varphi^{-1}(y)$ 的一个不可约分支, 则 $\dim F\geq n-m$.

(2) 存在一个非空开集 $U\subset Y$, 使得对于任意的 $y\in U$, 都有 $\dim\varphi^{-1}(y)=n-m$.

在证明定理以前, 我们先做一些准备工作.

引理 3.7.1 若 $y\in Y$ 是 Y 的光滑点. 则存在 $f_1,f_2,\cdots,f_m\in\mathcal{O}(Y)$, 使得

$$Z_X(f_1,f_2,\cdots,f_m)=\{y\}\cup Y_1\cup\cdots\cup Y_r,\quad y\notin Y_1\cup\cdots\cup Y_r$$

证明 记 $\mathfrak{m}_y\lhd\mathcal{O}(Y)$, 则知 $y=Z_Y(\mathfrak{m}_y)$. 设 $\mathfrak{m}_y=\langle g_1,g_2,\cdots,g_k\rangle$. 又 $\mathcal{O}_{Y,y}=\mathcal{O}(Y)_{\mathfrak{m}_y}$ 是正则局部环. 而理想 $\mathfrak{m}_y\mathcal{O}(Y)_{\mathfrak{m}_y}$ 是由 m 个元 $\frac{f_1}{s_1},\cdots,\frac{f_m}{s_m}$ 生成. 从而 $f_i\in\mathfrak{m}_y$.

$$\begin{cases} g_1 &= \frac{a_{11}}{s_{11}}\frac{f_1}{s_1}+\frac{a_{12}}{s_{12}}\frac{f_2}{s_2}+\cdots+\frac{a_{1m}}{s_{1m}}\frac{f_m}{s_m}\\ g_2 &= \frac{a_{21}}{s_{21}}\frac{f_1}{s_1}+\frac{a_{22}}{s_{22}}\frac{f_2}{s_2}+\cdots+\frac{a_{2m}}{s_{2m}}\frac{f_m}{s_m}\\ &\vdots\\ g_k &= \frac{a_{k1}}{s_{k1}}\frac{f_1}{s_1}+\frac{a_{k2}}{s_{k2}}\frac{f_2}{s_2}+\cdots+\frac{a_{km}}{s_{km}}\frac{f_m}{s_m}\end{cases}$$

令 $s=\prod\limits_{i\leq k;j\leq m}S_{ij}\prod\limits_{k=1}^{m}S_k$, 则 $s\in\mathcal{O}(Y),s(y)\neq 0$.

$$sg_1,sg_2,\cdots,sg_k\in\mathcal{O}(Y)f_1+\mathcal{O}(Y)f_2+\cdots+\mathcal{O}(Y)f_m$$

所以

$$Z_Y(f_1,f_2,\cdots,f_m)\subseteq Z_Y(sg_1,sg_2,\cdots,sg_k)=Z(s)\cup\{y\}$$

又因为 $y\in Z_Y(f_1,f_2,\cdots,f_m)$, 所以

$$Z_Y(f_1,f_2,\cdots,f_m)=\{y\}\cup Y_1\cup\cdots\cup Y_r,\quad Y_1,\cdots,Y_r\subset Z_Y(s)$$

故 $y\notin Y_i$. ■

引理 3.7.2 若 $y\in Y$ 是 Y 的光滑点. $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 同上. $X_i=\varphi^{-1}(Y_i)$ 则

$$Z_Y(\varphi^*f_1,\cdots,\varphi^*f_m)=\varphi^{-1}(y)\cup X_1\cup\cdots\cup X_r$$

其中, $\varphi^{-1}(y)$ 与 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_r$ 不相交. 特别地, 对任何 $\varphi^{-1}(y)$ 的分支 F, 有

$$\dim F\geq\dim X-m=n-m$$

下面我们来证明定理 3.7.1(1)

证明　对 $m = \dim Y$ 归纳证明. 当 $m = 0$ 时, $Y = y, F = x$, 所以 $\dim F = n = n - m$. 下设 $m > 0$. 设定理对 $\dim Y < m$ 时成立, 若 $y \in Y - Y_{sing}$, 则知 (1) 成立. 下设 $y \in Y_{sing}$. 取 $f \in I(Y_{sing})$, 则 $f(y) = 0$. $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}(X)$, 且

$$F \subset Z_X(\varphi^*(f)) = X_1 \cup \cdots \cup X_r, \quad \dim X_i = \dim X - 1 = n - 1$$

不妨设 $F \subset X_1$ (因 F 不可约). $Y_1 = \overline{f(X_1)}$, 知 $Y_1 \subseteq Z_Y(f)$. 所以 $\dim Y_1 \leq m - 1, y \in Y_1$. 由于归纳假设

$$\dim F \geq \dim X_1 - \dim Y_1 = n - 1 - \dim Y_1 \geq n - 1 - (m - 1) = n - m$$

证毕. ■

下面我们来证明定理 3.7.1(2)

证明　注意到 Y 是 $\mathbb{C}^m$ 的有限覆盖. 显然 $\overline{\widetilde{\varphi}(X)} = \mathbb{C}^m$, π_0 为开和闭映射. 故只要对 $\widetilde{\varphi}$ 证明即可. 下设

$$Y = \mathbb{C}^m, \quad \mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1, y_2, \cdots, y_m], \quad \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[v_1, v_2, \cdots, v_N]$$

由于 $Rat(X)/Rat(Y)$ 的超越次数等于 $n - m$. 故 $\mathcal{O}(X)$ 中有 $n - m$ 个元 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-m}$ 在 $Rat(Y)$ 上是代数无关的. 其他元在 $Rat(Y)[v_1, v_2, \cdots, v_{n-m}]$ 上是整的. 即 $v_{n-m+1}, \cdots, v_N$ 在其上整. 设 $j \geq n - m + 1, v_j$ 的整方程

$$v_j^{k_j} + \frac{a_{j1}}{s_{j1}} v_j^{k_j - 1} + \cdots + \frac{a_{jk_j}}{s_{jk_j}}, \ s_{ji} \in \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_m], \ a_{ji} \in \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_m][v_1, \cdots, v_{n-m}]$$

去掉上方程的分母得:

$$s_j v_j^{k_j} + b_{j1} v_j^{k_j - 1} + \cdots + b_{jk_j} = 0, \quad s = \prod_{j=n-m+1}^{N} s_j \quad (*)$$

则 $s(y_1, y_2, \cdots, y_m) \neq 0$. 设 F 是 $\varphi^{-1}(y)$ 的一个分支. $y = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$. 则

$$I(\varphi^{-1}(y)) \subset I(F), \quad \mathcal{O}(\varphi^{-1}(y)) = \mathcal{O}(X)/I(\varphi^{-1}(y)) = \mathbb{C}[\overline{v}_1, \cdots, \overline{v}_N]$$

$\overline{v}_j = v_j|_{\varphi^{-1}(y)}$, 令 $U = Y - Z(s)$, 有满同态

$$\mathcal{O}(\varphi^{-1}(y)) \longrightarrow \mathcal{O}(F)$$
$$\overline{v} \longmapsto \overline{\overline{v}}$$

在 $(*)$ 中, 固定 $y = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \in U$, 则 $(*)$ 可化为首一多项式, 限制后, 说明 $j > n - m + 1$ 时, $\overline{v}_j$ 在 $\mathbb{C}[\overline{v}_1, \cdots, \overline{v}_{n-m}]$ 上整. $\overline{\overline{v}}_j$ 在 $\mathbb{C}[\overline{\overline{v}}_1, \cdots, \overline{\overline{v}}_{n-m}]$ 上整. 又

$$\mathcal{O}(F) = \mathbb{C}[\overline{\overline{v}}_1, \overline{\overline{v}}_2, \cdots, \overline{\overline{v}}_{n-m}]$$

故 $\mathcal{O}(F)$ 中在 $\mathbb{C}$ 上代数无关的元的个数 $\leq n - m$, 从而 $\dim F \leq n - m$. 由 (1) 可知, 对于任意的 $y \in U, \dim F = n - m$. ■

3.7.2　纤维的不可约性

设 X, Y 不可约, $n = \dim X, m = \dim Y$. $\varphi : X \to Y$ 为支配映射, $\overline{\varphi(X)} = Y$, $K = Rat(Y)$, $\overline{K}$ 为 K 的代数闭包.

$$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X), \quad \varphi^* : Rat(Y) \hookrightarrow Rat(X)$$

则 $X_{\mathbb{C}} \subset X_K \subset X_{\overline{K}}$, 其中

(1) $X_{\mathbb{C}}$: 表示方程组在 $\mathbb{C}^N$ 中的解;

(2) X_K : 表示方程组在 K^N 中的解;

(3) $X_{\overline{K}}$: 表示方程组在 $\overline{K}^N$ 中的解.

定理 3.7.2　如果 $X_{\overline{K}}$ 不可约, 则存在 Zariski 开集 $U \subset Y$, 使得 $\forall\, y \in U, \varphi^{-1}(y)$ 都是不可约纤维.

在证明定理 3.7.2 以前, 我们先做一些准备工作. 事实上若 $V_d \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_k]$ 表示 d 次多项式的子向量空间. 则知 $V_d \cong \mathbb{C}^{N(d)}$. 用 $V_d' \subseteq V_d$ 表示 d 次可约多项式的集合. 则我们得到如下引理.

引理 3.7.3　设 $V_d' \subsetneq V_d = \mathbb{C}^{N(d)}$ 是代数闭子集, 且是真闭子集.

$$F = \sum_{i_1+\cdots+i_k \leq d} a_{i_1\cdots i_k} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}, \quad (a_{i_1\cdots i_k} \mid i_1 + \cdots + i_k \leq d) \in \mathbb{C}^{N(d)}$$

$$V_d' = Z(I), \qquad I = \langle R_1, \cdots, R_r \rangle$$

其中, R_i 是 F 的系数的非零多项式.

注 3.7.1　引理 3.7.3 中的 "$\mathbb{C}$" 可替换为任何的代数闭域. ■

例 3.7.2　设 $k = 2, F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$. 则 F 可约当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$ ■

引理 3.7.4　仿射代数簇的任何 Zariski 开集都是有限个仿射开集的闭. 所谓仿射开集是指 Zariski 开集, 它本身也是仿射代数簇.

证明　设 Y 为仿射代数簇. $U \subseteq Y$ 为 Zariski 开集, 不妨设 $U \neq Y$. 即

$$U = Y - Z_Y(I), \qquad I \lhd \mathcal{O}(Y)$$

设 $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_r \rangle$, 则 $Z_Y(I) = Z_Y(f_1) \cap \cdots \cap Z_Y(f_r)$.

$$\begin{aligned} U &= Y - Z_Y(f_1) \cap Z_Y(f_2) \cap \cdots \cap Z_Y(f_r) \\ &= (Y - Z_Y(f_1)) \cup (Y - Z_Y(f_2)) \cup \cdots \cup (Y - Z_Y(f_r)) \\ &= Y_{f_1} \cup Y_{f_2} \cup \cdots \cup Y_{f_r} \end{aligned}$$

这里, Y_{f_i} 是仿射开集, 故引理成立. ■

例 3.7.3　$\mathbb{C}^2$ 的 Zariski 开集 $U = \mathbb{C}^2 - (0, 0)$ 不是仿射开集. 显然, 映射 $\varphi : U \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ 为单态射. 且有

$$\overline{\varphi(U)} = \overline{U} = \mathbb{C}^2$$

故

$$\begin{aligned}\varphi^*: \mathcal{O}(\mathbb{C}^2) &\hookrightarrow \mathcal{O}(U)\\ f &\longmapsto f|_U\end{aligned}$$

是单同态. 又因为 $\mathbb{C}^2$ 光滑, 故正规. $Co\dim_{\mathbb{C}^2}\{(0,0)\} = 2$. 从而知 U 上的任何正则函数 $f' \in \mathcal{O}(U)$ 可以扩充到 $\mathbb{C}^2$ 上. 即存在 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ 使得 $f|_U = f'$. 故 $\varphi^*: \mathcal{O}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow \mathcal{O}(U)$ 是满的. 从而 $\varphi^*: \mathcal{O}(\mathbb{C}^2) \cong \mathcal{O}(U)$. 若 U 为仿射, 则 $\varphi: \mathbb{C}^2 \simeq U$. 推出矛盾. ■

引理 3.7.5 设 Y 是不可约仿射代数簇, $U = Y - Y_1 \neq \emptyset$ 为 Zariski 开集. 则 $\overline{U} = Y$, 即 U 在 Y 中稠密.

证明 若 $Y_2 = \overline{U} \neq Y$, 又 $Y_1 \neq Y$, 由此可知 $Y = Y_1 \cup Y_2$ 这与不可约性矛盾. ■

推论 3.7.1 在上述引理中, Y 不可约, 则 U 也不可约.

证明 设 Y_i 为 Y 中的闭集, 则 $U \cap Y_i$ 是 U 中的闭集. 若

$$U = (U \cap Y_2) \cup (U \cap Y_3)$$

且 $U \cap Y_i \neq U$, 即 $Y_i \neq Y, i = 2, 3$. 则 $U = U \cap (Y_2 \cup Y_3)$. 所以 $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3, Y_i \neq Y$. 这是矛盾的. ■

引理 3.7.6 设仿射代数簇 Y 的每一个不可约分支的维数都相等. 若 Z 为 Y 的闭子集, 满足 $\dim Z < \dim Y$. 则 Y 不可约当且仅当 $U = Y - Z$ 不可约.

证明 $(\Longrightarrow)$: 推论 3.7.1 已证.

$(\Longleftarrow)$: 反证, 若 Y 可约, 设 $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$, $k \geq 2$. 且对于任意的 i, 都有 $\dim Y_i = \dim Y$, $Y_i \neq Y$. 则

$$U = (U \cap Y_1) \cup (U \cap Y_2) \cup \cdots \cup (U \cap Y_k)$$

这里, $U \cap Y_i \neq \emptyset$, 否则 $Y_i \subseteq Z$, 这与维数假设矛盾. 所以对于任意的 i, $U \cap Y_i = U$. 即 $U \subset Y_i$.

$$Y = U \cup Z = Y_i \cup Z = Y_i \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_r, \quad Z \not\subseteq Y_i$$

因此 Y 有分支的维数小于 $\dim Y_i$. 矛盾. ■

现在我们来证明定理 3.7.2.

证明 我们通过四步来证明此定理.

第一步: 可以假设 φ 的所有纤维的维数都为 $n - m$.

这是因为, $U = \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) = n - m\}$ 为 Y 的 Zariski 开集. 取 U 的一个仿射开集 $Y_f \subset U$, 令 $X_1 = \varphi^{-1}(Y_f) = X_{\varphi^*(f)}$. 也为 X 的仿射开集. 只要对 $\varphi_1 = \varphi|_{X_1}: X_1 \to Y_1$ 证明定理. 所以可以有这样的假设.

第二步: 设 $U \subset X$ 为 Zariski 开集. 则只要对 $\varphi|_U: U \to X$ 证明定理即可.

不妨假设 U 是仿射开集,

$$U = X - Z, \quad Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_i, \quad \dim Z_i < \dim X$$

如果 $\overline{\varphi(Z_i)} \neq Y$, 则可缩小 Y, 使得 X 中不含有 Z_i. 从而可假设 $\overline{\varphi(Z_i)} = Y, i = 1, 2, \cdots, r$. 通过缩小 Y, 可以假设 $\varphi_i = \varphi|_{Z_i} : Z_i \to Y$ 的所有纤维的维数相等, 都等于 $\dim Z_i - \dim Y < n - m$. 且

$$U \cap \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1} - \bigcup_{i=1}^{r}(U \cap Z_i)$$

由于 $\varphi^{-1}(y)$ 挖掉一个真闭子集不影响其不可约性. 故 $\varphi^{-1}(y)$ 不可约当且仅当 $U \cap \varphi^{-1}(y)$ 不可约. 第二步证明完成.

第三步: 归结为 φ 由一个方程定义.

设 $K = Rat(Y)$, $Rat(X)$ 在 K 上的超越次数为 $r = n - m$. 故 $Rat(X)$ 在 K 上有 r 个代数无关元, $u_1, \cdots, u_r \in Rat(X)$. 从而 $Rat(X)$ 为 $K(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ 上的单扩张. 即存在 $u_{r+1} \in Rat(X)$, 使得 $Rat(X) = K(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1})$. 可选取 u_{r+1} 使它在 $\mathcal{O}(Y)[u_1, \cdots, u_r]$ 上整. 从而其上的多项式

$$F = Z^k + a_1(u_1, u_2, \cdots, u_r)Z^{k-1} + \cdots + a_k(u_1, u_2, \cdots, u_r)$$

使 u_{r+1} 为其根. 这里 $a_i(u_1, \cdots, u_r) \in \mathcal{O}(Y)[u_1, \cdots, u_r]$. 设 X' 是对应于 $\mathcal{O}(Y)[u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}]$ 的代数簇. $\varphi' : X' \to Y$ 对应于包含映射

$$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(Y)[u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}]$$

则知 X 与 X' 双有理等价:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] \arrow[d, "\varphi"] & X' \arrow[dl, "\varphi'"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

缩小 Y, 使得 φ' 的纤维的维数都为 $r = n - m$. 又因存在开集 $U \subset X, U' \subset X$ 使得

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi"'] & U' \arrow[dl, "\varphi'"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

故只要证明对 φ' 证明即可. 不妨设 φ 是由上方程 F 定义.

第四步: $X_{\overline{K}}$ 不可约 $\iff$ $F \in \overline{K}[z, u_1, \cdots, u_r]$ 不可约.

下证, 存在开集 $U \subset Y$, 使得对于任意的 $y \in U$, $F_y \in \mathbb{C}[z, u_1, \cdots, u_r]$ 不可约. 其中 F_y 是把 $r+1$ 个变元 $z, u_1, \cdots, u_r$ 的多项式 F 的所有系数,

$$f_1, f_2, \cdots, f_N \in \mathcal{O}(Y)$$

在 y 点取值

$$f_1(y), f_2(y), \cdots, f_N(y) \in \mathbb{C}$$

因为可约为代数条件, 故 F_y 不可约当且仅当

$$R_j(f_1(y), f_2(y), \cdots, f_N(y)) = 0, j = 1, 2, \cdots$$

而 $R_j(f_1, f_2, \cdots, f_N) \in \mathcal{O}(Y), j = 1, 2, \cdots$ 不可能恒为零函数. 否则 $F \in \overline{K}[z, u_1, \cdots, u_r]$ 可约.

不妨设

$$R = R_l(f_1, \cdots, f_N) \neq 0, \quad R \in \mathcal{O}(Y)$$

则令 $U = Y - Z(R)$ 就满足定理的条件. ■

3.8 纤维的光滑性

3.8.1 映射的微分

设 X, Y 不可约. $\varphi : X \to Y$ 支配. $p \in X, q = \varphi(p) \in Y$. 设

$$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X), \quad \mathfrak{m}_q \longrightarrow \mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_q^2 \hookrightarrow \mathfrak{m}_p^2$$
$$\varphi^* : \mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$$

定义映射的微分:

$$d_p\varphi : (m_p/m_p^2)^V \longrightarrow (m_q/m_q^2)^V$$
$$d_p\varphi : T_p(X) \longrightarrow T_q(Y)$$

定义 3.8.1 设 X 是光滑的. 若 $d_p\varphi$ 是满线性映射, 则称 φ 在 p 点光滑.

令 $F = \varphi^{-1}(q)$,

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_p(F) \arrow[r, hook, "d_p\sigma"] \arrow[dr, "0\equiv d_p\varphi_0"'] & T_p(X) \arrow[d, "d_p\varphi"] \\ & T_q(Y) \end{tikzcd}$$

命题 3.8.1 $d_p\sigma$ 是单射.

证明　考虑如下映射链:

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{1_F} \mathcal{O}(F) \longrightarrow 0$$

$$\mathfrak{m}_p \longrightarrow \overline{\mathfrak{p}}_p \longrightarrow 0$$

而

$$\sigma^* : \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow \overline{\mathfrak{m}}_p/\overline{\mathfrak{m}}_p \longrightarrow 0$$

满线性映射的对偶为单射, 从而

$$d_p\sigma : T_p(F) \longrightarrow T_p(X)$$

是单射. ■

命题 3.8.2 $d_p\varphi_0 \equiv 0$.

证明　已知 $\varphi_0(F)=q$,

$$\begin{aligned}\varphi_0^*:\emptyset(Y) &\longrightarrow \emptyset(F)\\ u &\longmapsto \varphi_0^*(u)\end{aligned}$$

$$\varphi_0^*(u)(F)=u(\varphi(F))=u(q)$$

当 $u\in\mathfrak{m}_q$ 时, $u(q)=0$, 则 $\varphi_0^*(u)\equiv 0$. 所以

$$\varphi_0^*:\mathfrak{m}_q\longrightarrow\overline{\mathfrak{m}}_p$$

是零映射. 即

$$\varphi_0^*:m_q/m_q^2\longrightarrow\overline{m_p}/\overline{m_p}^2$$

为零映射. 这蕴含着, $d_p(\varphi_0):T_p(F)\longrightarrow T_q(Y)$ 为零映射. ■

本节的主要目的是证明如下定理.

定理 3.8.1　设 $\varphi:X\to Y$ 是不可约代数簇之间的支配映射, $\overline{\varphi(X)}=Y$. 设 X 光滑, 则存在 Y 的稠密开集 $U\subset Y$, 使得 $q\in U$ 时, $\varphi^{-1}(q)$ 光滑.

3.8.2　纤维的光滑点

假设 3.8.1　φ 的所有纤维的维数相同. 都等于 $\dim X-\dim Y=n-m$.

引理 3.8.1　若 φ 在 p 点光滑, 且 $q=\varphi(p)$.

$$\dim\varphi^{-1}(q)=\dim X-\dim Y=n-m$$

则 $\varphi^{-1}(q)$ 在 p 点光滑, Y 在 q 点光滑.

证明　因为存在如下映射 $T_{F,p}\xhookrightarrow{d_p\sigma}\ker d_p\varphi$,

$$\begin{aligned}\dim F &\le \dim T_{F,q}\le\dim\ker d_p\varphi\\ &=\dim T_pX-\dim T_qY=n-\dim T_q(Y)\\ &\le n-1=\dim F\end{aligned}$$

所以 F 在 p 点光滑, Y 在 q 点也光滑. ■

3.8.3　光滑点的邻域是完全交

命题 3.8.3　设 $p\in X, I(X)=\langle f_1,f_2,\cdots,f_r\rangle, X\subset\mathbb{C}^N,\dim X=n$. X 不可约, 则 $r\ge N-n$.

证明　由于 X 不可约, 则有 $\dim X=n\ge N-r$, 所以 $r\ge N-n$. ■

定义 3.8.2　如果上述命题中的 $r=N-n$, 则称 X 是完全交.

定理 3.8.2　设 $p\in X$ 为 X 的光滑点, 则存在 X 的包含 p 的仿射开集 $U=X_s, p\in U$, 使得 X_s 是完全交.

证明 p 为 X 的光滑点 $\Longleftrightarrow$ $\dim T_p(X)=n$ $\Longleftrightarrow$ $rkJ(f_1,\cdots,f_r)(p)=N-n$, 这里 $J(f_1,\cdots,f_r)(p)$ 是 $r\times N$ 矩阵 $\Longleftrightarrow J(f_1,\cdots,f_r)(p)$ 中有 $N-n$ 行线性无关, (不妨设前面 $N-n$ 行线性无关) $\Longleftrightarrow J(f_1,\cdots,f_{N-n})(p)$ 的秩等于 $N-n$ (不妨设后面的 $(N-n)\times(N-n)$ 的子式不为零) 根据隐函数定理:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_N)=0 \\ \qquad\vdots \\ f_r(x_1,\cdots,x_N)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

$x_{n+1},\cdots,x_N$ 可解出, 在 p,q 附近解析, 即 $(*)$ 局部等价于:

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \qquad\vdots \\ x_N=\varphi_{N-n}(x_1,\cdots,x_n) \end{cases} \qquad (**)$$

$\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-n}$ 为解析函数. 即存在 p 的解析邻域 U_p 使得

$$\begin{aligned} U_p &= \{(x_1,\cdots,x_n,\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{N-n}(x_1,\cdots,x_n)) \mid |x_i|<\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,n\} \\ &\cong V_\varepsilon=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid |x_i|<\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,n\}\subseteq\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

令 $X'=Z(f_1,\cdots,f_{N-n})$, 则 $p\in X\subseteq X'$, 由上证明

$$X|_{U_p}\subseteq X'|_{U_p}=U_p\cong V_\varepsilon,$$

这说明 X 是 X' 过 p 的唯一分支, 即 $X'=X\cup Z$, 其中 Z 为不过 p 点. $I(Z)\not\subseteq\mathfrak{m}_p$, 故存在 $s\in I(Z)$, 使得 $s(p)\neq 0$. 注意到

$$\begin{aligned} X_s &= \{x\in X\mid s(x)\neq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{C}^N \mid \begin{cases} f_1(x)=0, \\ \vdots \\ f_{N-n}(x)=0, \end{cases} s(x)\neq 0\} \\ &= \{(x_1,\cdots,x_{N+1})\in\mathbb{C}^{N+1}\mid \begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_N)=0 \\ \vdots \\ f_{N-n}(x_1,\cdots,x_N)=0 \\ s(x_1,\cdots,x_N)x_{N+1}=1 \end{cases}\} \\ &= Z_{\mathbb{C}^{N+1}}(f_1,\cdots,f_{N-n},sx_{N+1}-1) \end{aligned}$$

也就是说:

$$\dim X_s=(N+1)-(N-n+1)$$

所以 X_s 是完全交. ■

推论 3.8.1 设 $p\in X$ 是 n 维不可约代数簇 X 的光滑点. 则存在 p 的解析邻域 $p\in U\subset X$ 和坐标系 $z_1,\cdots,z_n\in\O^{a_n}(U)$, 即 $U\cong\mathbb{C}^n$ 的开集.

推论 3.8.2 设 $X\subseteq\mathbb{C}^N$, p 为 X 的光滑点. 则存在 $f_1,\cdots,f_{N-n}\in\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_N]$ 使得 X 在 p 点附近可由方程组 $f_1=\cdots=f_{N-n}=0$ 定义.

用到如下事实: 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 X 在 p 点的局部解析坐标.

$$\begin{cases} y_1 &= \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \quad\vdots & \\ y_n &= \varphi_n(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

是 $x_1, \cdots, x_n$ 的解析映射. 如果

$$rk\ J(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(p) = n$$

等价地, $(dy_1)_p, \cdots, (dy_n)_p$ 线性无关, 则 $y_1, \cdots, y_n$ 也可作为 p 点附近的解析坐标.

3.8.4 映射在光滑点处的解析表示

$\varphi : X \to Y$ 同上, $p \in X, q = \varphi(p)$. φ 在 p 点光滑.

定理 3.8.3 设 $\varphi : X \longrightarrow Y$ 是不可约代数簇之间的支配映射, $\overline{\varphi(X)} = Y$. 则存在 q 点的局部坐标系 $(V_q, t_1, \cdots, t_m)$ 和 X 在 p 点的局部坐标系 $(U_p, z_1, \cdots, z_n)$ 使得 $\varphi(U_p) = V_q$, 且

$$\begin{array}{rcl} \varphi|_{U_p}: & U_p & \longrightarrow V_q \\ & (z_1, \cdots, z_n) & \longmapsto (z_1, \cdots, z_m) \end{array}$$

即 φ 由方程组 $\begin{cases} t_1 = z_1 \\ \vdots \\ t_m = z_m \end{cases}$ 定义.

证明 不妨设 $X \subset \mathbb{C}^N, Y \subset \mathbb{C}^M$ 为完全交.

$$\begin{array}{ccccl} X & \subseteq & \mathbb{C}^N & : & f_1 = \cdots = f_{N-n} = 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \\ Y & \subseteq & \mathbb{C}^M & : & h_1 = \cdots = h_{M-m} = 0 \end{array}$$

因为 q 为 Y 的光滑点, 故存在

$$g_1, g_2, \cdots, g_m \in \mathbb{C}[y_1, y_2, \cdots, y_M]$$

使得 $\{q\}$ 为 $Z_Y(g_1|_Y, \cdots, g_m|_Y)$ 的一个孤立分支. 从而 $\{q\}$ 也为

$$Z(g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_{M-m})$$

的一个孤立分支. 因 q 为 Y 的光滑点, 可选取 $g_1, \cdots, g_m$ 使得 $\mathcal{O}_{Y,q}$ 中, $g_1, \cdots, g_m$ 生成 $\mathcal{O}_{Y,q}$ 的极大理想. $g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_{M-m}$ 生成 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^M,q}$ 的极大理想. 即

$$J(g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_{M-m})(q)$$

是满秩的, 即可逆. 因此, 可重新给出 $\mathbb{C}^M$ 在 q 附近的解析坐标系 V:

$$t_1 = g_1, \cdots, t_m = g_m, t_{m+1} = h_1, \cdots, t_M = h_{M-m}$$

所以

$$V \cap Y = \{(t_1, \cdots, t_m, 0, \cdots, 0) \mid |t_i| < \varepsilon\}$$

即 $t_1,\cdots,t_m$ 为 $V\cap Y$ 上的坐标. 又 $\varphi^{-1}(q)$ 在 p 点附近的定义方程为:

$$f_1=\cdots=f_{N-n}=\varphi^*(g_1)=\cdots=\varphi^*(g_m)=0 \qquad (*)$$

在 p 点附近, $\varphi^{-1}(q)$ 是局部完全交. 由于 $(\varphi^{-1}(q),p)$ 在 p 点光滑, 从而

$$rk\ J(\varphi^*(g_1),\cdots,\varphi^{-1}(g_m),f_1,\cdots,f_{N-n})(p)=N-(n-m)$$

满秩, 从而 $\mathbb{C}^N$ 在 p 附近可重新选坐标, $(*)$ 在 p 附近可解出. 即 $x_1,\cdots,x_N$ 中的坐标可用 $x_{i_1},\cdots,x_{i_{n-m}}$ 表出(解析). 可取 $\mathbb{C}^N$ 在 p 点的局部解析坐标系 $(U:z_1,\cdots,z_N)$ 使得

$$\begin{aligned}
&z_1=\varphi^*(\delta_1),\ \cdots,\ z_m=\varphi^*(\delta_m),\\
&z_{m+1}=x_{i_1},\ \cdots,\ z_n=x_{i_{n-m}},\\
&z_{n+1}=f_1,\quad \cdots,\ z_N=f_{N-n}.
\end{aligned}$$

不妨设 $\Phi(U)=V$, 从而

$$U_p=U\cap X:z_{n+1}=\cdots=z_N=0$$

U_p 的坐标: $z_1,\cdots,z_n$. $U_p\cap\varphi^{-1}(q)$ 的坐标系: $z_{m+1},\cdots,z_n$.

$$V_q=V\cap Y:t_m=\cdots=t_M=0$$

V_q 的坐标:$t_1,\cdots,t_m$. 因此, φ 的局部方程是: $t_1=z_1,\cdots,t_m=z_m$. ■

3.8.5 映射的光滑点组成一个 Zariski 开集

考虑下图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & \mathbb{C}^N \arrow[d, "\Phi"] \\
Y & \subseteq & \mathbb{C}^M
\end{tikzcd}$$

其中 $\Phi(x)=(\Phi_1(x),\cdots,\Phi_M(x))$, X,Y 都是光滑的. φ 的纤维维数相同, 都等于 $n-m$. 我们作如下定义:

$$d_p\Phi=\frac{\partial(\Phi_1,\cdots,\Phi_M)}{\partial(x_1,\cdots,x_N)}(p)=\mathscr{A}(p)$$

$$\begin{aligned}
d_p\Phi:\qquad & T_p\mathbb{C}^N \longrightarrow T_q\mathbb{C}^M, \qquad\qquad q=\varphi(p)\\
\xi=&\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix}\longmapsto \mathscr{A}(p)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T_p(x) & \hookrightarrow & T_p\mathbb{C}^N & \xrightarrow{d_pf} & T_0(\mathbb{C}^{N-n}) & \longrightarrow & 0\\
 & & d_p\varphi\downarrow & & \downarrow d_p\Phi & & & & \\
0 & \longrightarrow & T_q(Y) & \hookrightarrow & T_q\mathbb{C}^M & \xrightarrow{d_pq} & T_0(\mathbb{C}^{M-m}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$d_p\varphi$ 是满的 $\Longleftrightarrow \dim d_p\Phi(T_p(x)) = m$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_p(x) \arrow[r, hook] \arrow[d, "d_p\varphi"'] & T_p\mathbb{C}^N \arrow[r, "d_pf"] \arrow[d, "d_p\Phi"] & T_0(\mathbb{C}^{N-n}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_q(Y) \arrow[r, hook] & T_q\mathbb{C}^M \arrow[r, "d_pq"] & T_0(\mathbb{C}^{M-m}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

记矩阵

$$\mathscr{M} = d(f, \Phi) = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_{N-n}, \Phi_1, \cdots, \Phi_M)}{\partial(x_1, \cdots, x_N)}$$

把 $\mathscr{M}$ 看成是下线性映射:

$$\overline{\mathscr{M}} : Rat(X)^N \longrightarrow Rat(X)^{N-n+M}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \longmapsto \mathscr{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

为了计算 $\mathscr{M}$ 作为 $Rat(X)$ 上的矩阵的秩, 等价于计算 $\ker \overline{\mathscr{M}}$ 的维数.

定义 3.8.3 设 K 上有扩域 $Rat(X), K = \varphi^* Rat(Y)$

$$Rat(X) = K(x_1, \cdots, x_{n-m})[\eta_1, \cdots, \eta_r]$$

用 $Der_K(Rat(X))$ 表示 $Rat(X)$ 上的 K-导数的全体. $D : RAt(X) \longrightarrow Rat(X)$. 若满足

(1) $D(u + v) = D(u) + D(v), D(u - v) = D(u) - D(v)$;

(2) $D(u \cdot v) = uD(v) + vD(u)$;

(3) $\forall\, u \in K, D(u) \equiv 0$.

则 $Der_K(Rat(X))$ 是 $Rat(X)-$向量空间, 基为 $D(x_1), \cdots, D(x_{n-m})$.

注 3.8.1 实际上, 任给

$$D(x_1) = u_1, D(x_2) = u_2, \cdots, D(x_{n-m}) = u_{n-m}$$

都可构造一个导数.

命题 3.8.4 $\mathbb{C}(x_1, \cdots, x_N)$ 上的导数 D 可以诱导出 $Rat(X)$ 上的导数

$$\Longleftrightarrow D(f_1) \equiv \cdots \equiv D(f_{N-n}) \equiv 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} D(x_{\mathbb{C}}) \equiv 0, \forall\, j$$

命题 3.8.5 $\mathbb{C}(x_1, \cdots, x_N)$ 的满足上述条件的导数 D 还满足 $D(\Phi_k) \equiv 0, \forall\, k$. 即

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} D(x_i) \equiv 0, \quad \forall\, k$$

当且仅当 D 是 $K = \varphi^*(Rat(Y))$ 导数.

定理 3.8.4 设 X, Y 光滑不可约, $\varphi: X \to Y$ 的纤维的维数都相同. 则存在 Zariski 非空开集 $U \subset X$ 使得对于任意的 $p \in U$, φ 在 p 点光滑. 特别地, 对于任意的 $q \in Y$, $\varphi^{-1}(q) \cap U$ 光滑.

证明 考虑

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \ker \overline{\mathscr{M}} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} u_i & = 0, \forall\, j \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} u_i & = 0, \forall\, k \end{cases} \Longleftrightarrow D \in Der_K(Rat(X)).$$

所以

$$\dim_{Rat(X)} \ker \overline{\mathscr{M}} = n - m \Longleftrightarrow rank_{Rat(X)} \mathscr{M} = N - (n - m)$$

这说明 $Rat(X)$ 上的矩阵的大于 $N-(n-m)$ 阶子式恒为零. $N-(n-m)$ 阶子式 $\triangle_1, \cdots, \triangle_r$ 不恒为零. 令

$$U = X - Z_X(\triangle_1, \cdots, \triangle_r) \neq 0$$

U 是 Zariski 开集, 则对于任意的 $p \in U$, 都有 $rk\mathscr{M}(p) = N - (n-m)$. 即 φ 在 p 点光滑. ■

3.8.6 主要定理的证明

定理 3.8.5 设 $\varphi: X \to Y$ 是不可约代数簇之间的支配映射. $\overline{\varphi(X)} = Y$. 设 X 光滑, 则存在 Y 的非空 Zariski 开集 $V \subset Y$, 使得对于任意的 $q \in V, \varphi^{-1}(q)$ 是光滑的.

证明 缩小 Y, 可使 Y 光滑, 且对于任意的 $q \in Y$, $\dim \varphi^{-1}(q) = n - m$. 由定理 3.8.4, 设 $Z \subset X$ 是使得 φ 不光滑的真闭子集. $Z = Z_1 \cup Z_2 \cdots \cup Z_k$. 下证, 对于任意的 i, $\overline{\varphi(Z_i)} \neq Y$. 故 $V = Y - \overline{\varphi(Z)}$ 满足定理要求.

反证: 若存在 i, 使得 $\overline{\varphi(Z_i)} = Y$. 由定理 3.8.4, 存在 Z_i 的 Zariski 开集 $U_i \subset Z_i, U_i \neq \emptyset$ 使得对于任意的 $p \in U_i$, $d_p\varphi_i$ 是满的, $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$. 由交换图

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_p(Z_i) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "d_p\varphi_i"'] & T_p(X) \arrow[d, "d_p\varphi"] \\ & T_q(Y) \end{tikzcd}$$

因此 $d_p\varphi_i$ 是满的当且仅当 $d_p\varphi$ 是满的, 这与 $p \in Z$ 的假设矛盾. ■

定理 3.8.6 设 $\varphi: X \to Y$ 是 d 次有限覆盖, X, Y 光滑, $q \in Y$. 那么 φ 在 q 上的点都光滑当且仅当 φ 在 q 上无分支当且仅当 $|\varphi^{-1}(q)| = d$.

3.9 射影代数簇

3.9.1 射影空间

定义 3.9.1 设 V 是 $n+1$ 维 K 向量空间, $\mathbb{P}(V)$ 表示过原点的所有直线的集合, 则称 $\mathbb{P}(V)$ 为 n 维射影空间, 记为 $\mathbb{P}^n$.

注 3.9.1 (1) 实际上 $\mathbb{P}(V)$ 中的“点”就是 V 中的“直线”;

(2) $\mathbb{P}(V)$ 上无法建立整体坐标系. 但 V 中的直线 L 可由其方向向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \neq 0$ 唯一确定. 但方向向量并不唯一, 不是坐标. 仍可用它描述点. $(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})$ 与 $(X_1', X_2', \cdots, X_{n+1}')$ 表示同一个"点"当且仅当存在 $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, 使得

$$X_i' = \lambda X_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, n+1$$

请读者自行验证如下命题.

命题 3.9.1 注记 3.9.1 中 (2) 所提及的关系为一个等价关系.

为建立 $1-1$ 对应, 现在用 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})$ 的等价类描述点. 引进 $[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$ 来表示 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})$ 的等价类, 则 $\mathbb{P}(V)$ 上的点可用等价类 $[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$ 来描述.

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n = \{[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}] \mid X_i \in K, X_i \text{ 不全为零}, i = 1, 2, \cdots, n+1\}$$

$[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}] = [X_1', X_2', \cdots, X_{n+1}'] \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in K, \lambda \neq 0,$ 使得 $X_i' = \lambda X_i, \forall\, i$. 基于此, 我们引入齐次坐标的概念.

定义 3.9.2 我们把上述 $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ 称为 $\mathbb{P}^n$ 中的点的齐次坐标.

命题 3.9.2 设 $\mathbb{A}_K^n = K^n$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的一个子集,

$$\begin{aligned} K^n &\hookrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) &\longmapsto [x_1, \cdots, x_n, 1] \end{aligned}$$

所以, $\mathbb{P}^n = K^n \cup H_\infty$, 这里

$$H_\infty = \{[x_1, \cdots, x_n, 0] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \in K, \text{不全为零}\}$$

定义 3.9.3 我们称 H_∞ 是 $\mathbb{P}^n$ 的无穷远超平面. K^n 中的点称为通常空间的点, H_∞ 称为无穷远点.

3.9.2 方程组在无穷远处的解

若 $[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}] \in \mathbb{P}^n, X_{n+1} \neq 0$. 则该点落在通常空间 K^n 之中, 其坐标

$$x_i = \frac{X_i}{X_{n+1}}, i = 1, 2, \cdots, n. \qquad [X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}] = [\frac{X_1}{X_{n+1}}, \cdots, \frac{X_n}{X_{n+1}}, 1]$$

设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $d \geq 1$ 次多项式. 则

$$F(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}) = X_{n+1}^d f(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \cdots, \frac{X_n}{X_{n+1}})$$

为齐次多项式. 记 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n, 1)$. 为了求解方程组

$$(1) \begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

在无穷远处的解, 等价于解齐次多项式方程组

$$(2) \begin{cases} F_1(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}) = 0 \\ \qquad \vdots \\ F_m(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

注 3.9.2 若 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})$ 为 (2) 的非零解, 则 $[\lambda X_1, \cdots, \lambda X_{n+1}], \lambda \neq 0$ 也为 (2) 的解, 故等价类 $[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$ 中的 $n+1$ 元素组要么都是 (2) 的解, 要么都不是. 因为

$$F_i(\lambda X_1, \cdots, \lambda X_{n+1}) = \lambda^{d_i} F_i(X_1, \cdots, X_{n+1})$$

故可称 $[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$ 为 (2) 的解, 或不为 (2) 的解. ■

定义 3.9.4 某齐次方程组在 $\mathbb{P}^n$ 中的解集称为是 $\mathbb{P}^n$ 的闭集.

注 3.9.3 方程组 (2) 有平凡解 $X_1 = X_2 = \cdots = X_{n+1} = 0$, 我们总不考虑此解. ■

以下设 K 为代数闭域.

设 $f(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}) \in K[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$, $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ f_i 是 i 次齐次部分. $p = [a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}]$ 是 f 的零点, 且与坐标的选取无关. 则

$$0 = f(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i f_i(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}), \forall\, \lambda$$

因 K 为无限域, 故对于任意的 i, $f_i(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) = 0$.

定义 3.9.5 设 I 是多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]$ 的一个真理想, 如果 I 由齐次多项式生成即由有限个生成元, 则称 I 是齐次理想.

注 3.9.4 由 $1 \notin I, I$ 是齐次理想可得 $I \subset \langle X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}\rangle$. $Z(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ 是代数闭集, 即 Zariski 闭集, 由此可定义 Zariski 开集. ■

引理 3.9.1 设 I 为齐次理想, $I \neq \langle 1 \rangle$. 则

$$Z(I) = \emptyset \Longleftrightarrow \exists s \geq 1 \text{ 使得 } X_i^s \in I, i = 1, 2, \cdots, n+1$$

证明　设 $I = \langle F_1, \cdots, F_m \rangle$, 考虑方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ \cdots, x_n, 1) = 0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x_1, \ \cdots, x_n, 1) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

显然可知 (1) 无解, 又因为 K 为代数闭域. 从而

$$\sum_{i=1}^{m} F_i(x_1, \cdots, x_n, 1) g_i(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

齐次化上方程

$$\sum_{i=1}^{m} F_i(X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}) G_i(X_1, \cdots, X_n) = X_{n+1}^{s_{n+1}}$$

故 $X_{n+1}^{s_{n+1}} \in I$. 同理, 存在 $s_i \geq 1$ 使得 $X_i^{s_i} \in I, \forall\, i$. 取 $s = \max\{s_1, s_2, \cdots, s_{n+1}\}$, 则

$$X_i^s \in I, i = 1, 2, \cdots, n+1$$

证毕. ■

3.9.3 射影齐次坐标与仿射坐标

设 $U_i \subset \mathbb{P}^n$ 表示 $X_i \neq 0$ 的开集. 定义

$$\begin{aligned} U_i &= \{[X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_{n+1}] \mid X_i \neq 0\} \\ &= \{[\tfrac{X_1}{X_i}, \cdots, \tfrac{X_{i-1}}{X_i}, 1, \tfrac{X_{i+1}}{X_i}, \cdots, \tfrac{X_{n+1}}{X_i}] \mid X_i \neq 0\} \end{aligned}$$

令 $x_{i_k} = \frac{X_k}{X_i}, k \neq i$. U_i 上有仿射坐标

$$U_i(x_{i1}, \cdots, x_{i,i-1}, x_{i,i+1}, \cdots, x_{n+1}), \quad U_i \cong \mathbb{C}^n, \quad \mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$$

这里, U_i 为 $\mathbb{P}^n$ 的仿射开集. 设 $Z \subset \mathbb{P}^n$ 为代数闭集. 即下方程组在 $\mathbb{P}^n$ 中的解,

$$\begin{cases} F_1(X_1, X_2, \ \cdots, X_i, \cdots, X_{n+1}) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ F_m(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_{n+1}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

显然, $Z \cap U_i$ 是下列方程组在 U_i 中的解集:

$$\begin{cases} F_1(x_{i1}, \cdots, \ x_{i,i-1}, 1, x_{i,i+1}, \cdots, x_{in}) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ F_m(x_{i1}, \cdots, x_{i,i-1}, 1, x_{i,i+1}, \cdots, x_{in}) = 0 \end{cases} \tag{$1)_i$}$$

$Z \cap U_i$ 是仿射代数簇, 记 $X_i = Z \cap U_i$, 故 $Z = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} X_i$ 为 Z 的仿射开集. 不妨设 $i < j$, 且 $[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}] \in U_i \cap U_j$, 则知 $X_i \neq 0, X_j \neq 0$.

$$\begin{aligned} [X_1, \cdots, X_{n+1}] &= [x_{i1}, \cdots, x_{i,i-1}, 1, x_{i,i+1}, \cdots, x_{i,n+1}] \\ &= [x_{j1}, \cdots, x_{j,j-1}, 1, x_{j,j+1}, \cdots, x_{j,n+1}] \\ &= [\tfrac{x_{j1}}{x_{ji}}, \cdots, \tfrac{x_{j,i-1}}{x_{ji}}, 1, \tfrac{x_{j,i+1}}{x_{ji}}, \cdots, \tfrac{x_{j,j-1}}{x_{ji}}, \tfrac{1}{x_{ji}}, \tfrac{x_{j,j+1}}{x_{ji}}, \cdots, \tfrac{x_{j,n+1}}{x_{ji}}] \end{aligned}$$

这里, $x_{i\alpha}$ 对于 α 的不同范围取值不一样. 当 $\alpha \leq i-1$ 时, $x_{i\alpha} = \frac{x_{j\alpha}}{x_{ji}}$;当 $i+1 \leq \alpha \leq j-1$ 时, $x_{i\alpha} = \frac{x_{j\alpha}}{x_{ji}}$; 当 $\alpha = j$ 时, $x_{i\alpha} = \frac{1}{x_{ji}}$;当 $\alpha \geq j+1$ 时, $x_{i\alpha} = \frac{x_{j\alpha}}{x_{ji}}$. 综上所述

$$x_{i\alpha} = \begin{cases} \frac{x_{j\alpha}}{x_{ji}}, \ \alpha \neq i, j \\ \frac{1}{x_{ji}}, \ \ \alpha = j \end{cases}$$

3.9.4 齐次坐标环

设 $I \lhd \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}]$ 为齐次理想. $Y = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$ 为代数闭集.

$$S = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_{n+1}] = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$$

这里, S_n 是 n 次齐次多项式的集合. $0 \in S_n$. $I(Y) = \{f \in S \text{ 是齐次的} \mid f(Y) = 0\}$.

$$S(Y) := S/I(Y) = \frac{\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_{n+1}]}{I(Y)}$$

命题 3.9.3 (1) $Z(I) = \emptyset \Longleftrightarrow I \supseteq S_d$, 对于某个 $d \geq 1 \Longleftrightarrow \sqrt{I} \supset S_+ = \bigoplus\limits_{n \geq 1} S_n$.

(2) $Y_1 \subseteq Y_2 \Longrightarrow I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$;

(3) $I_1 \subseteq I_2$ 是两个齐次理想 $\Longrightarrow Z(I_1) \supseteq Z(I_2)$;

(4) $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$;

(5) I 齐次, $Z(I) \neq \emptyset$, 则 $I(Z(I)) = \sqrt{I}$;

(6) 设 $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, 则 $Z(I(Y)) = \overline{Y}$;

(7) $Y = Z(I), I$ 是齐次的, 则 Y 不可约当且仅当 $S(Y)$ 是整环当且仅当 $I(Y)$ 为素理想;

(8) 任何代数闭集 $Y = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$ 可分解成有限个不可约代数闭集的并, 且两两无包含关系,
$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$$

(9) 不可约代数闭集 $Y \subset \mathbb{P}^n$ 的维数定义: $\dim Y = d \Longleftrightarrow$ 存在

  (a) $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_d = Y$, 其中 Y_i 是 $\mathbb{P}^n$ 的不可约代数闭集;

  (b) Y 中不存在长度大于 d 的不可约闭子集链.

(10) $\dim \mathbb{P}^n = n = \dim S - 1$;

(11) $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{S}$ 是非零极小齐次素理想当且仅当存在齐次不可约多项式 $p(x_1, \cdots, x_{n+1})$, $\deg p \geq 1$, 使得 $\mathfrak{p} =< p >$.

我们来证明上述命题中的 (10).

证明 设 $\langle 0 \rangle \subsetneq \langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle x_1, \cdots, x_{n+1} \rangle$ 为 S 中的齐次素理想, 最后一个对应于空集. 所以它对应于一个长度为 n 的不可约子簇链. 从而 $\dim \mathbb{P}^n \geq n$.

另一方面, 若有极大的齐次素理想链
$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d \subsetneq \mathfrak{p}_{d+1}, \quad d \leq n$$
又知所有非单位齐次理想 I,
$$I \subseteq S_+ = \langle x_1, \cdots, x_{n+1} \rangle$$
故因极大性, $\mathfrak{p}_{d+1} = \langle x_1, \cdots, x_{n+1} \rangle$. 从而知 $d \leq n$, 所以诱导长度为 $d \leq n$ 的闭子簇链.

综合以上 $\dim \mathbb{P}^n = n$. ■

我们再给出上述命题中 (11) 的证明.

证明 ($\Longleftarrow$) 若有非零素理想
$$0 \neq \mathfrak{p}' = \langle f_1, \cdots, f_r \rangle \subseteq \mathfrak{p} = \langle p \rangle$$
则知 $f_i = pg_i$, 若 $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$, 则 $p \notin \mathfrak{p}'$. 这就推出 $g_1, g_2, \cdots g_r \in \mathfrak{p}$. 所以 $\mathfrak{p}' = \langle g_1, \cdots, g_r \rangle$. 一直下去, 这是不可能的. 所以 $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. 即 $\mathfrak{p}$ 是极小的.

($\Longrightarrow$) 若 $\mathfrak{p} \neq 0$ 是非零极小齐次素理想, 则存在 $p \in \mathfrak{p}, p \neq 0$, 齐次且 $\deg p \geq 1$ 极小. 下证 p 不可约. 设
$$p = fg, \quad \deg f < \deg p, \quad \deg g < \deg p$$

这就推出 $f, g \notin \mathfrak{p}$, 矛盾! 故

$$\langle 0\rangle \subsetneq \langle p\rangle \subseteq \mathfrak{p}$$

由 $\mathfrak{p}$ 的极小性可知 $\mathfrak{p} = \langle p\rangle$. ■

推论 3.9.1 $\mathbb{P}^n$ 中 $(n-1)$-维不可约子簇都由一个不可约齐次多项式定义.

3.9.5 射影代数簇上的有理函数与正则函数

(1) 定义

$$Rat(\mathbb{P}^n) = \{\frac{F(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})}{G(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})} \mid F, G \text{ 都是其次的}, G \neq 0, \deg F = \deg G\}$$

记 $\varphi = \frac{F}{G} \in Rat(\mathbb{P}^n)$, 显然, 对任何点 $P = [A_1, \cdots, A_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$, 当 $G(P) \neq 0$ 时, 可定义 $\varphi(P) = \frac{F(P)}{G(P)}$, 且与 P 的齐次坐标的选取无关, 即 φ 是 $\mathbb{P}^n$ 上的有理函数. 当 F, G 无公因子时, φ 的定义域为 $U = \mathbb{P}^n - Z(G)$.

(2) 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 为不可约代数簇.

$$Rat(X) = \{\left.\frac{F}{G}\right|_X \mid F, G \text{ 是齐次的}, G \neq 0, \text{且 } G \text{ 在 } X \text{ 上不恒为零}\}$$

作为 X 上的函数 $\varphi = \left.\frac{F}{G}\right|_X$, 在 $X - X \cap Z(G)$ 上恒有定义.

定义 3.9.6 $\varphi = \left.\frac{F}{G}\right|_X, \varphi_1 = \left.\frac{F_1}{G_1}\right|_X$ 称为同一个有理函数, 即 $\varphi = \varphi_1$ 当且仅当对于任何的 $p \in X$, 且 φ, φ_1 都在 p 点有定义, 且 $\varphi(p) = \varphi_1(p)$

引理 3.9.2 $\varphi = \varphi_1 \Longleftrightarrow FG_1 - F_1G \in I(X)$.

证明 $\varphi = \varphi_1 \Longleftrightarrow$ 对于任意的 $p \in X - (Z(G) \cup Z(G_1))$, 有 $\varphi(p) = \varphi_1(p)$, 即 $F(p)G_1(p) - F_1(p)G(p) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \forall\, p \in X, G(p)G_1(p)(F(p)G_1(p) - F_1(p)G(p)) = 0 \\
&\Longleftrightarrow G \cdot G_1 \cdot (FG_1 - GF_1) \in I(X) \\
&\Longleftrightarrow FG_1 - F_1G \in I(X)
\end{aligned}$$

这是因为 $G, G_1 \notin I(X)$. ■

命题 3.9.4 X 上有理函数的集合 $Rat(X)$ 为一个域.

定义 3.9.7 设 $\varphi \in Rat(X)$ 是有理函数, $p \in X$. 若存在 F, G 齐次多项式, $\deg F = \deg G, G(p) \neq 0$, 使得 $\varphi = \left.\frac{F}{G}\right|_X$, 则称 φ 在 p 点正则.

定义 3.9.8 设 $U \subset X$ 为 Zariski 开集. $\varphi \in Rat(X)$, 若 φ 在 U 上处处正则, 则称 φ 为 U 上的正则函数.

命题 3.9.5 $Rat(\mathbb{P}^n) = Rat(U_i)$. 即 “射影” 情形与 “仿射” 情形定义的有理函数与正则函数是一致的. 有时写为

$$\frac{F}{G} \in Rat(\mathbb{P}^n), \quad \left.\frac{F}{G}\right|_{U_i} \in Rat(X)$$

证明　我们用 $\varnothing(U)$ 表示 U 上的正则函数环. $\mathbb{P}^n=\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}U_i$, 且在仿射意义下 $U_i\cong\mathbb{C}^n$. U_i 有坐标 $x_{i\alpha}=\frac{X_\alpha}{X_i}$, 其中 $\alpha\neq i$.

$$\frac{F(X_1,\cdots,X_{n+1})}{G(X_1,\cdots,X_{n+1})}=\frac{F(\frac{X_1}{X_i},\cdots,\frac{X_{i-1}}{X_i},1,\frac{X_{i+1}}{X_i},\cdots,\frac{X_{n+1}}{X_i})}{G(\frac{X_1}{X_i},\cdots,\frac{X_{i-1}}{X_i},1,\frac{X_{i+1}}{X_i},\cdots,\frac{X_{n+1}}{X_i})}=\frac{F(x_{i1},\cdots,x_{i,i-1},1,x_{i,i+1},\cdots,x_{i,n+1})}{G(x_{i1},\cdots,x_{i,i-1},1,x_{i,i+1},\cdots,x_{i,n+1})}$$

$$Rat(\mathbb{P}^n)\subseteq Rat(U_i)$$

反之,设

$$\frac{f(x_{i1},\cdots,x_{i,i-1},1,x_{i,i+1},\cdots,x_{i,n+1})}{g(x_{i1},\cdots,x_{i,i-1},1,x_{i,i+1},\cdots,x_{i,n+1})}\in Rat(U_i)$$

则齐次化后

$$\frac{f}{g}=\frac{X_i^Nf(\frac{X_1}{X_i},\cdots,\frac{X_{i-1}}{X_i},\frac{X_{i+1}}{X_i},\cdots,\frac{X_{n+1}}{X_i})}{X_i^Ng(\frac{X_1}{X_i},\cdots,\frac{X_{i-1}}{X_i},\frac{X_{i+1}}{X_i},\cdots,\frac{X_{n+1}}{X_i})}=\frac{F(X_1,X_2,\cdots,X_{n+1})}{G(X_1,X_2,\cdots,X_{n+1})}\in Rat(\mathbb{P}^n)$$

所以 $Rat(\mathbb{P}^n)=Rat(U_i)$. ■

注 3.9.5　设 $p\in X\cap U_i\subset X\subset\mathbb{P}^n, X\cap U_i\subseteq U_i$.

$$\varnothing(U_i)\longrightarrow\varnothing(X\cap U_i)\longrightarrow 0$$

定义

$$\varnothing_{X\cap U_i,p}=\{\varphi\in Rat(X\cap U_i)\mid\varphi\text{ 在 }p\text{ 点正则}\}$$

$$\varnothing_{X,p}=\{\varphi\in Rat(X)\mid\varphi\text{ 在 }p\text{ 点 正则}\}$$

根据

$$\begin{array}{ccc} Rat(X) & \simeq & Rat(X\cap U_i)\\ \varphi & \longmapsto & \varphi|_{U_i}\end{array}$$

可知 $\varnothing_{X\cap U_i,p}=\varnothing_{X,p}$ 与 p 的邻域无关.以下用 $S(X)$ 来描述 $\varnothing_{X,p}$. ■

命题 3.9.6　设 $\mathfrak{m}_p\lhd S(X)$ 为一齐次极大理想, $\mathfrak{m}_p=\{F\in S(X)\mid F\text{ 齐次}, F(P)=0\}$, 则

$$\varnothing_{X,p}=S(X)_{(\mathfrak{m}_p)}$$

其中, $S(X)_{(\mathfrak{m}_p)}$ 表示形如 $\frac{F}{S}$ 的元的集合. $S,F\in S(X)$ 齐次, 且 $\deg F=\deg S, S(p)\neq 0$.

证明　首先 $S(X)_{(\mathfrak{m}_p)}\subseteq\varnothing_{X,p}$ 是显然的. 现在设 $\varphi\in\varnothing_{X,p}$, 则 $\varphi=\frac{F}{G}\big|_X$, $G(p)\neq 0$, 从而

$$\varphi=\frac{\overline{F}}{\overline{G}}\in S(X)_{(\mathfrak{m}_p)}$$

这就推出了 $\varnothing_{X,p}\subseteq S(X)_{(\mathfrak{m}_p)}$. 所以等式成立. ■

命题 3.9.7　$Rat(X)=S(X)_{((0))}$.

证明　因为对于任意的 $\varphi\in Rat(X),\varphi=\frac{F}{G}\big|_X, G\notin I(X)$.

$$\varphi\longmapsto\overline{\varphi}=\frac{\overline{F}}{\overline{G}}\in S(X)((0))$$

此为双射, 即为域同构. ■

定理 3.9.1 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 为不可约射影代数簇. 则 $\emptyset(X) = \mathbb{C}$.

证明 不妨设对于任意的 $i, X \not\subseteq Z(X_i)$. 即

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, \quad U_i \cap X \neq \emptyset$$

$$\emptyset(U_i \cap X) = S(X)_{(\overline{X}_i)} \qquad \emptyset(U_i) = S_{(x_i)} \longrightarrow \emptyset(U_i \cap X) \longrightarrow 0$$

所以 $\emptyset(U_i \cap X) = S(X)_{(\overline{x}_i)}$. 设 $\varphi = \left.\frac{F}{G}\right|_X, G \notin I(X), F, G$ 齐次, 且 $\deg F = \deg G$. $\varphi \in \emptyset(X)$. 则 $\left.\varphi\right|_{U_i} \in \emptyset(U_i \cap X)$. 所以

$$\left.\varphi\right|_{U_i} = \left.\frac{F_i}{X_i^{m_i}}\right|_{U_i} \Longleftrightarrow X_i^{m_i} F - F_i G \in I(X), i = 1, 2, \cdots, n+1$$

取 $m = \max\{m_1, \cdots, m_{n+1}\}$, 则

$$X_i^m F - F_i' G \in I(X), \qquad \overline{X}_i^m \overline{F} = \overline{F}_i' \overline{G} \in S(X)$$

$$\varphi \overline{X}_i^m \in S(X)_m, i = 1, 2 \cdots, m+1$$

这里, $\varphi \cdot S(X)_m \subseteq S(X)$, $S(X)_m$ 是有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间. 所以存在 $d \geq 1, a_1, a_2, \cdots, a_d \in \mathbb{C}$, 使得

$$\varphi^d + a_1 \varphi^{d-1} + \cdots + a_d = 0$$

即 φ 在 $\mathbb{C}$ 上是代数的. 又因为 $\mathbb{C}$ 是代数闭域, 所以 $\varphi \in \mathbb{C}$, 即 $\emptyset(X) = \mathbb{C}$. ■

3.9.6 不可约代数簇的维数

命题 3.9.8 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 不可约. 则 $\dim X = \dim \mathcal{S}(X) - 1$.

证明 设 $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$. 故

$$X = \bigcup_{i=1}^{n+1} (X \cap U_i)$$

可定义 X 的维数为 $Rat(X)$ 的超越次数. 则知, 当 $X \cap U_i \neq \emptyset$ 时, $Rat(X) = Rat(X \cap U_i)$. 所以

$$\dim X = \dim(X \cap U_i)$$

$X \cap U_i$ 是仿射代数簇. 故 $X \cap U_i$ 中的不可约子簇的极大链的长度为 $d = \dim X$, 且任何不可约子簇链都可扩充为长度为 d 的极大链.

另一方面, $X \cap U_i$ 的任何不可约闭子集 Y 都是 X 中的闭射影子簇 $\overline{Y}$ 的限制. $Y = U_i \cap \overline{Y}$. 故知 X 中的不可约子簇的极大链的长度为 d, 且任何这样的链都可以扩充为长度为 d 的链. 因此,

$$\dim X = \dim S(X) - 1$$

注 3.9.6 设 $Y: \begin{cases} f_1(x_{i1},\cdots,\ x_{i,i-1},x_{i,i+1},\cdots,x_{i,n+1})=0 \\ \qquad\vdots \\ f_m(x_{i1},\cdots,x_{i,i-1},x_{i,i+1},\cdots,x_{i,n+1})=0 \end{cases}$ 把该方程组齐次化,

$$\begin{cases} F_1=0 \\ \vdots \\ F_m=0 \end{cases} \qquad \overline{Y}\subseteq Y$$

则 $Y=\overline{Y}\cap U_i$. ■

3.9.7 到 $\mathbb{P}^m$ 的有理映射

1. X 是不可约射影代数簇

设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m,\varphi_{m+1}\in Rat(X)$, 则可定义有理映射

$$\begin{aligned} \varphi: \quad & X \dashrightarrow \mathbb{P}^m \\ & p \longmapsto [\varphi_1(p),\cdots,\varphi_{m+1}(p)] \end{aligned}$$

定义 3.9.9 φ 是上述有理映射, $p\in X$, 如果满足

(1) $\varphi_1,\cdots,\varphi_{m+1}$ 在 p 点正则;

(2) $\varphi_1(p),\cdots,\varphi_{m+1}(p)$ 不同时为零.

则称 φ 在 p 点有定义, 也称 φ 在 p 点正则. φ 的不正则点组成 X 的一个 Zariski 闭集.

若有另一有理映射:

$$\begin{aligned} \psi: \quad & X \dashrightarrow \mathbb{P}^m \\ & p \longmapsto [\psi_1(p),\cdots,\psi_{m+1}(p)] \end{aligned}$$

我们给出 $\varphi=\psi$ 的定义.

定义 3.9.10 设 φ,ψ 为两个有理映射. 如果存在 Zariski 开集 $U\subset X$, 使得 φ,ψ 都在 U 上正则, 且 $\varphi|_U=\psi|_U$. 即对于任意的 $p\in U,\varphi(p)=\psi(p)$. 则称 $\varphi=\psi$.

引理 3.9.3 若 $\varphi|_U=\psi|_U$, p 为 φ,ψ 的正则点 (不一定在 U 中), 则 $\varphi(p)=\psi(p)$.

证明 不妨设 φ_{n+1},ψ_{n+1} 都是 $Rat(X)$ 中的非零函数. 由 $\varphi|_U=\sigma|_U$ 知

$$\frac{\varphi_i(p)}{\varphi_{n+1}(p)}=\frac{\psi_i(p)}{\psi_{n+1}(p)},\quad \forall\, p\in U,\quad \varphi_{n+1}(p)\neq 0,\quad \psi_{n+1}(p)\neq 0$$

上等式在 $U_0\subset U$ 上恒成立.

$$(\varphi_i\psi_{m+1}-\psi_i\varphi_{m+1})|_{U_0}\equiv 0$$

实际上

$$\varphi|_U=\psi|_U \Longleftrightarrow \forall\, i,j,(\varphi_i\psi_j-\varphi_j\psi_i)|_U\equiv 0 \quad (*)$$

若 $U \subset V$, V 是 φ, ψ 的正则点的交集. 则 $(*)$ 在 U 上成立当且仅当 $(*)$ 在 V 上成立. 故知, 只要 p 为 φ, ψ 的正则点, 那么 $\varphi(p) = \psi(p)$. ■

定义 3.9.11 若 $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ 为有理映射, 定义 φ 的有理函数不唯一. 有理映射是一个等价类. $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ 称为在 p 点正则 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{m+1} \in Rat(X)$, 满足 (1),(2) 使得 φ 在 p 的邻域 U 中可由 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{m+1}$ 定义. 即 p 为 "有理映射" $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ 的正则点 $\Longleftrightarrow p$ 是 φ 在某一组有理函数的表示下的正则点 $Dom(\varphi) \subsetneq X$ 表示 φ 的定义域.

定义 3.9.12 如果 $Dom(\varphi) = X$, 则称 $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ 为正则映射(态射). $U \subset X$ 为 Zariski 开集.则

$$\varphi = \psi \Longleftrightarrow \varphi|_U = \psi|_U$$

2. **有理映射的齐次表示**

设 $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ 由 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{m+1}$ 定义. $\varphi_i \in Rat(X)$. 则知 φ_i 在 $S(Y)_{((0))}$ 中, 即存在 $\frac{f_i}{s_i} = \varphi_i$, $f_i, s_i \in S(Y)$ 齐次, 次数相同. 可选取 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{m+1}$ 的公分母 s,

$$\varphi_i = \frac{f_i}{s}, \quad \deg f_i = s, \quad \forall\, i$$

从而 $s(p) \neq 0$, 且 p 正则时, $\varphi(p) = [f_1(p), \cdots, f_{m+1}(p)]$. 可以验证, 存在 $U_0 \subset X$ 使得 $\varphi|_{U_0} = [f_1, \cdots, f_{m+1}]$, 即 $p \in U_0, \varphi(p) = [f_1(p), \cdots, f_{m+1}(p)]$.

反之, 给定齐次元 $f_1, f_2, \cdots, f_{m+1} \in S(X)_N$. 则 $f_1, f_2, \cdots, f_{m+1}$ 定义的有理映射与 $\frac{f_1}{f_{m+1}}, \frac{f_2}{f_{m+1}}, \cdots, \frac{f_m}{f_{m+1}}, 1$ 定义的有理映射相同.

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 3.1

第四章 代数曲线

4.1 代数曲线的局部性质

4.1.1 代数曲线的介绍

定义 4.1.1 (代数曲线) 称一维射影不可约复代数簇 X 是代数曲线.

定义 4.1.2 (单变量代数函数域) $K=\mathbb{C}(x,y), K=\mathbb{C}(x)[y]$,$y$ 在 $\mathbb{C}(x)$ 上整.或等价的,存在不可约多项式 f, 使得 $f(x,y)=0$.

命题 4.1.1 紧黎曼曲面是紧的一维复流形, 它与 R 之间的关系是 $K=Rat(X)=Rat(R)$.

注 4.1.1 R 是 X 的光滑模型(奇点解消). ■

命题 4.1.2 紧黎曼曲面和光滑射影代数曲面是一回事情.

命题 4.1.3 任何单变量函数域是唯一光滑射影代数曲线的函数域.

命题 4.1.4 任何光滑代数曲面是 $\mathbb{P}^1$ 的有限次覆盖.(利用 Riemann 的方法)

命题 4.1.5 任何光滑代数曲面双有理等价于一条平面曲线,它只有结点作为奇点.

平面代数曲线奇点的解消应用到如下定理.

定理 4.1.1 (牛顿定理) $f(x,y)=y^d+a_1(x)y^{d-1}+\cdots+a_d(y)$ 是 $\mathbb{C}[x,y]$ 中的不可约代数曲线. 则存在正整数 n,使得

$$f(t^n,y)=(y-y_1(t))(y-y_2(t))\cdots(y-y_d(t))$$

这里,$y_i(t)$ 是 t 的收敛幂级数.

引理 4.1.1 一般地,若

$$f(x,y)=y^d+a_1(x)y^{d-1}+\cdots+a_d(y)\in\mathbb{C}[[x]][y]$$

是不可约多项式,则存在 n 和 $y_i(t)\in\mathbb{C}[[t]]$ 使得

$$f(t^n,y)=(y-y_1(t))(y-y_2(t))\cdots(y-y_d(t))$$

$$f(x,y)=(y-y_1(x^{\frac{1}{n}}))(y-y_2(x^{\frac{1}{n}}))\cdots(y-y_d(x^{\frac{1}{n}}))$$

设 $C:f(x,y)=0$ 可局部分解成 d 个解析分支

$$C=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_d,\quad C_i:y=y_i(x^{\frac{1}{n}})$$

将每一个分支可参数化:

$$\begin{array}{lll}\triangle & \xrightarrow{1:1} C_i, & \qquad \triangle\subset\mathbb{C}\\ t & \longmapsto (t^n,y_i(t)) & \end{array}$$

这里, $\triangle$ 可看成是 C_i 的奇点解消.

4.1.2 平面代数曲线

定义 4.1.3 设 $\mathbb{P}^2$ 是复射影平面, 有齐次坐标 X, Y, Z. $F(X, Y, Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ 是 d 次不可约齐次多项式. 则称 $C = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(X, Y, Z) = 0\}$ 称为 $\mathbb{P}^2$ 中 d 次不可约代数曲线.

考虑二维复平面到复二维射影平面的嵌入映射:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \quad &\hookrightarrow \quad U \subset \mathbb{P}^2 \\ (x, y) &\longmapsto [x, y, 1] \end{aligned}$$

定义 4.1.4 将上述嵌入进的射影平面称为通常平面, 定义 $L_\infty : Z = 0$.
把 $L_\infty = \{[X, Y, 0] \mid X, Y \in \mathbb{C}$ 不全为零$\}$ 称为无穷远直线.

$$L_\infty \cong \mathbb{P}^1, \quad [X, Y, 0] \longmapsto [X, Y]$$

一维射影空间称为“射影直线”.

定义 4.1.5 定义 $\mathbb{P}^2$ 上的有理函数 $\varphi = \frac{F}{G}$, $\deg F = \deg G$, F, G 齐次.

$$Rat(\mathbb{P}^2) = \{\frac{H(X, Y, Z)}{G(X, Y, Z)} \mid H, G \text{ 齐次}, G \neq 0, \deg G = \deg H\}$$

定义 4.1.6 $Rat(C) = \{\varphi = \frac{H}{G}\big|_C \mid \frac{H}{G} \in Rat(\mathbb{P}^2), F \nmid G\}$.

定义 4.1.7 C 的齐次坐标环定义为:

$$S(C) = \frac{\mathbb{C}[X, Y, Z]}{\langle F \rangle} = \bigoplus_{n \geq 0} S(C)_n$$

命题 4.1.6 若 $p \in C$, 且 $p \in C \cap U$, 则

$$\varnothing_{C,p} = \{\varphi = \frac{H}{G}\bigg|_C \mid G, H \text{ 齐次且次数相同}, G(P) \neq 0\} = \{\frac{h(x, y)}{g(x, y)}\bigg|_C \mid g(p) \neq 0\}$$

注 4.1.2 可以用 p 的任何仿射坐标计算 C 在 p 点的局部环, 它们都一样. ■

命题 4.1.7 设 C 在 p 点的局部环的极大理想, G, H 齐次且次数相同, $G(p) \neq 0$, $H(p) \neq 0$. 则

$$\mathfrak{m}_{C,p} = \{\frac{h(x, y)}{g(x, y)}\bigg|_C \mid g, h \in \mathbb{C}[x, y], g(p) \neq 0, h(p) = 0\}$$

命题 4.1.8 设 $p = (a, b) \in \mathbb{C}^2$, 或者 $p = [a, b, 1] \in \mathbb{P}^2$. G, H 齐次且次数相同, $G(p) \neq 0$. 则

$$\varnothing_{\mathbb{P}^2,p} = \{\frac{h(x, y)}{g(x, y)} \mid g, h \in \mathbb{C}[x, y], g(a, b) \neq 0\}$$

命题 4.1.9 若 g, h 是 p 点附近的解析函数, $g(a, b) \neq 0$, 则

$$\varnothing^{a_n}_{\mathbb{P}^2,p}\{\frac{h}{g}\} = \{\frac{h}{g}\} = \mathbb{C}[[x - a, y - b]]$$

这表示 $(x - a, y - b)$ 的收敛幂级数. 故

$$\varnothing^{a_n}_{C,p} = \{\varphi|_C \mid \varphi \in \varnothing^{a_n}_{\mathbb{P}^2,p}\} = \varnothing^{a_n}_{\mathbb{P}^2,p} / \langle\langle f(x, y) \rangle\rangle, \quad p \in C$$

推论 4.1.1 若 U 为 p 的解析邻域, 则 $\varnothing^{a_n}_{\mathbb{P}^2,p} = \varnothing^{a_n}_{U,p} = \mathbb{C}[[x - a, y - b]]$.

4.1.3 曲线的重数与切线

定义 4.1.8 设 $p=(a,b)\in C\subset\mathbb{C}^2: f(x,y)=0$. 令 $u=x-a, v=y-b$. 将 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 展开成 u,v 的多项式, 按照 u,v 的齐次部分

$$f=f_m+f_{m+1}+\cdots+f_d,\quad f_m\neq 0$$

这里, f_i 是 u,v 的齐次多项式. 称 m 为曲线 C 在 p 点的重数, 记为

$$mult_p(C)=m_p(C)=m$$

也称 p 为 C 的 m 重点.

(1) $m=1$ 时: 称 p 为 C 的单重点;

(2) $m\geq 2$ 时: 称 p 点为 C 的多重点.

引理 4.1.2 单重点和光滑点等价, 多重点和奇点等价.

证明 p 为 C 的单重点 $\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p\neq 0$, 或者 $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p\neq 0.\Longleftrightarrow rk\, J(f)=1=2-\dim C\Longleftrightarrow \dim T_p(C)=2-\dim C\Longleftrightarrow p$ 为 C 的光滑点. ■

定义 4.1.9 当 p 为 C 的光滑点时:

$$T_p(C)=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b)=0\}$$

是一条直线, 称为切线, 方程为

$$T_p(C): \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b)=0$$

定义 4.1.10 当 $m\geq 2$ 时, $f_m(u,v)\neq 0$ 为 u,v 的 m 次齐次多项式, 故 $f_m=l_1l_2\cdots l_m$. 这里, l_i 为 u,v 的一次齐次多项式. 称 $L_i: l_i=0$ 为 C 在 p 点的切线.

命题 4.1.10 m 重奇点由 m 条切线. 这些切线可以相同.

注 4.1.3 $p\in C$ 是否为 C 的奇点与仿射坐标的选取无关. 这是因为它等价于 $\O_{C,p}$ 为正则局部环. 重数也与局部仿射坐标的选取无关. 切线与仿射坐标的选取也无关. ■

命题 4.1.11 设 $mult_p(C)=l(m_{C,p}^n/m_{C,p}^{n+1}),\quad n\gg 0$, 其中 $l(M)$ 表示 $\O_{C,p}$-模 M 的长度. 它们与仿射坐标的选取无关.

下一节: 我们用相交数来刻划重数和切线. 从而可说明

4.2 平面曲线的局部相交数

设 $C,D\subset\mathbb{C}^2$, $C: f(x,y)=0, D: g(x,y)=0$. $p=(0,0)\in C\cap D$, C 与 D 无公共分支.

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{C}[x,y] & \subset & \O_{\mathbb{C}^2,p} & \subset & \O_{\mathbb{C}^2,p}^{a_n} = \mathbb{C}[[x,y]]\\ \triangledown & & \triangledown & & \triangledown\\ (f,g) & \subset & \langle f,g\rangle & \subset & \langle\langle f,g\rangle\rangle\end{array}$$

$f(0,0)=g(0,0)=0.$

定义 4.2.1 C 与 D 在 p 点的相交数 $I_p(C,D)$ 定义为:

$$I_p(C,D)=I_p(f,g)=\dim_{\mathbb{C}^2}\frac{\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}}{\langle f,g\rangle}=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{\langle\langle f,g\rangle\rangle}$$

引理 4.2.1 存在 $s\geq 1, t\geq 1$ 使得

$$\left\langle x^s,y^t\right\rangle\subseteq\langle f,g\rangle\subseteq\langle\langle f,g\rangle\rangle$$

证明 令 $F=\mathbb{C}(x), R=\mathbb{C}[x]$, 则 $f,g\in R[y]$ 无公因子. 可知 $f,g\in F[y]$ 也无公因子. 则有

$$\frac{u(x,y)}{a(x)}f(x,y)+\frac{v(x,y)}{b(x)}g(x,y)=1$$

这里, $\frac{u}{a},\frac{v}{b}\in F[y]=\mathbb{C}(x)[y], u,v\in\mathbb{C}[x,y], a(x),b(x)\in\mathbb{C}[x], ab\neq 0$. 从而

$$ab=buf+avg\in(f,g)$$

设 $ab=x^sc(x), c(0)\neq 0$, 则 $c(x)$ 在 $\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}$ 中可逆. 故

$$x^s\in\langle f,g\rangle\lhd\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}$$

同理, 存在 $t\geq 1$, 使得 $y^t\in\langle f,g\rangle$. ■

定理 4.2.1 $\dfrac{\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}}{\langle f,g\rangle}\overset{\varphi}{\simeq}\dfrac{\mathbb{C}[[x,y]]}{\langle\langle f,g\rangle\rangle}$.

证明 由于 $\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}\subseteq\mathbb{C}[[x,y]]$ 诱导

$$\begin{aligned}\varphi:\tfrac{\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}}{\langle f,g\rangle}&\longrightarrow\tfrac{\mathbb{C}[[x,y]]}{\langle\langle f,g\rangle\rangle}\\ [u]&\longmapsto\overline{\overline{u}}\end{aligned}$$

(1) 由于 $x^s,y^t\in\langle f,g\rangle\subseteq\langle\langle f,g\rangle\rangle$, 故 $\frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{\langle\langle f,g\rangle\rangle}$ 中的类都可用多项式表示, 即对于任意的 $\overline{u}$, 存在多项式 $u_0(x,y)$, 使得

$$\overline{\overline{u}}=\overline{\overline{u_0(x,y)}},\quad u_0\in\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}$$

故 φ 是满的.

(2) 下证 $\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}/\langle f,g\rangle$ 中的任何类都可用多项式表示. 设

$$[\frac{u(x,y)}{v(x,y)}]\in\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}/\langle f,g\rangle,\quad v(0,0)\neq 0$$

所以,

$$v=\lambda(1-c(x,y)),\quad\lambda\in\mathbb{C},\quad\lambda\neq 0,\quad c(0,0)=0$$

从而知

$$c(x,y)^{s+t}\in(x^s,y^t)\lhd\mathbb{C}[x,y],\quad[\frac{u}{v}]=[u]\cdot\lambda^{-1}\cdot[\frac{1}{1-c}]$$

由 $(1-c)(1+c+\cdots+c^{s+t-1})=1-c^{s+t}$ 故,

$$[1-c][1+c+\cdots+c^{s+t-1}]=[1],\qquad[\frac{1}{1-c}]=[1+c+\cdots+c^{s+t-1}]$$

从而

$$[\frac{u}{v}]=[\lambda^{-1}u(1+c+\cdots+c^{s+t-1})]$$

可由多项式表示.

(3) 设 $u(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$, $\varphi([u(x,y)])=\overline{\overline{u}}=\overline{\overline{0}}$. 则 $u\in\langle\langle f,g\rangle\rangle$. 且存在收敛幂级数 $a',b'\in\mathbb{C}[[x,y]]$, 使得 $u=a'f+b'g$.

$$a'=a+x^sa_1'+y^ta_2',\quad b'=b+x^sb_1'+y^tb_2',\qquad a_1',a_2',b_1',b_2'\in\mathbb{C}[[x,y]]$$

这里, a,b 都是多项式. 所以 $u-af-bg=r$ 为多项式. 且展开成幂级数以后, 每项含 x^s 或 y^t. 又多项式展开后只有有限项, 故 $r=x^sr_1+y^tr_2$. r_1,r_2 为多项式, 从而

$$u-af-bg=r\in(x^s,y^t)\subset(f,g)$$

从而 $u\in(f,g)\subset\langle f,g\rangle$. 所以 $[u]=0$, 即 φ 为单同态. 因此 φ 是同构映射. ■

推论 4.2.1 设 $h(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$, 则 $h(x,y)\in\langle f,g\rangle\lhd\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}\Longleftrightarrow h(x,y)\in\langle\langle f,g\rangle\rangle\lhd\mathbb{C}[[x,y]]$.

推论 4.2.2 $\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}}{\langle f,g\rangle}=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{\langle\langle f,g\rangle\rangle}<\infty$.

注 4.2.1 若 $\mathbb{P}^2$ 中有曲线 C, D. $F(X,Y,Z)=0$, $G(X,Y,Z)=0$. 则有多种方式化为仿射的情形. 但所定义出的 C 与 D 在 p 点的局部相交数是不变的, 这是由于: 若 $\deg F=m,\deg G=n$. 设 L 是不过 $p\in C\cap D$ 的直线, 则

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}}{\langle f,g\rangle}=\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,p}}{\left\langle\frac{F}{L^m},\frac{G}{L^n}\right\rangle}$$

后者与仿射坐标的选取无关. ■

例 4.2.1 (1) $I_p(x,y)=1$;

(2) $I_p(y-x^2,y)=2$;

(3) $I_p(y-x^2,x)=1$.

通过画图, 交点数的求解是简单的. ■

定义 4.2.2 若 f 是无重因子的多项式, $p\in C:f(x,y)=0$. 则定义 C 在 p 点的 Milnor 数

$$h_p(C)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle}=I_p(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$$

定理 4.2.2 (相交数计算公理) (1) $I_p(f,g)=I_p(g,f)$;

(2) $I_p(f,g)=I_p(f,g+hf),\forall\, h\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}$;

(3) $I_p(f,gh)=I_p(f,g)+I_p(f,h)$, 这里, f 与 gh 无公因子;

(4) $I_p(x,y)=1,\ p=(0,0)$;

(5) 若 $h(p)\neq 0$, 则 $I_p(f,gh)=I_p(f,g)$;

(6) $I_p(f,g_1^{n_1}\cdots g_s^{n_s})=\sum\limits_{i=1}^{s}n_iI_p(f,g_i)$.

证明　只需证 (3), 其余的是平凡的. 令 $R = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}$, 我们构造矩正合列

$$0 \longrightarrow \frac{R}{\langle f,g\rangle} \xrightarrow{\psi} \frac{R}{\langle f,gh\rangle} \xrightarrow{\varphi} \frac{R}{\langle f,h\rangle} \longrightarrow 0$$

因为 $\langle f,gh\rangle \subset \langle f,h\rangle$. 所以 φ 是自然的诱导映射, 且是满射. 所以只要证明

$$\ker\varphi \cong R/\langle f,g\rangle$$

直接构造

$$\begin{aligned}\psi: \tfrac{R}{\langle f,g\rangle} &\longrightarrow \tfrac{R}{\langle f,gh\rangle}\\ \overline{\mu} &\longmapsto [\mu h]\end{aligned}$$

第一步: 我们证明对于任意的 $\mu \in R/\langle f,g\rangle, \varphi(\psi(\overline{\mu})) = 0$.

这是因为 $\varphi(\psi(\overline{\mu})) = \varphi([\mu h]) = \overline{\overline{\mu h}} = \overline{\overline{0}}$. 所以 $Im\,\psi \subset \ker\varphi$.

第二步: 验证 ψ 是单射.

若 $\psi(\overline{\mu}) = [\mu h] = [0]$, 则 $\mu h \in \langle f,gh\rangle$, 即

$$\mu h = af + bgh = \frac{u_1}{u_0}f + \frac{u_2}{u_0}gh, \quad u_0(p) \neq 0$$

考虑 $u_i \in \mathbb{C}[x,y]$ 的像 $u_0\mu h = u_1 f + u_2 gh$. 所以 $h|u_1 f$, 又因为 $\gcd(h,f) = 1$, 所以 $h|u_1$. 即存在 u_1' 使得 $u_1 = u_1' h$. 故

$$u_0\mu = u_1' f + u_2 g, \quad \mu = \frac{u_1'}{u_0}f + \frac{u_2}{u_0}g \in \langle f,g\rangle$$

故 $\overline{\mu} = \overline{0}$, 所以 ψ 是单射.

第三步: 证明 $\ker\varphi \subseteq I_m\,\psi$. 设 $\varphi([r]) = \overline{\overline{0}}$, 即 $\overline{\overline{r}} = \overline{\overline{0}}$, 或 $r \in \langle f,h\rangle$. 所以 $r = af + bh$, 这里 $a,b \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}$.

$$[r] = [af + bh] = [bh] = \psi(\overline{b})$$

所以 $\ker\varphi \subseteq I_m\,\psi$.

故矩复形为矩正合列. 从而作为向量空间, 中间的维数为两边维数之和. 因此

$$I_p(f,gh) = I_p(f,g) + I_p(f,h)$$

证毕. ■

例 4.2.2　设 $p = (0,0), f = y^2 - x^3, g = y^3 - x^2$, 现计算 $I_0(f,g)$,

$$\begin{aligned}I_0(f,g) &= I_0(y^2 - x^3, y^3 - x^2) = I_0(y^2 - x^3, (y^3 - x^2) - y(y^2 - x^3))\\ &= I_0(y^2 - x^3, yx^3 - x^2) = I_0(y^2 - x^3, x^2(yx - 1))\\ &= I_0(y^2 - x^3, x^2) = 2I_0(y^2 - x^3, x)\\ &= 2I_0(y^2, x) = 2\cdot 2\cdot I_0(y,x) = 4\end{aligned}$$

由此计算得到 $I_0(f,g) = 4$. ■

定理 4.2.3　设 C 在 p 点的重数为 m. 切线为 $L_1, \cdots, L_m$ (可以重复). L 是过 p 点的任一直线, 则 $I_p(C,L) \geq m$. 且 $I_p(C,L) > m \iff$ 存在某个 i, 使得 $L = L_i$.

证明　因为相交数与仿射坐标的选取无关, 通过线性变换, 不妨设 $p = (0,0)$.

$$L: x = 0 \quad f = f_m + f_{m+1} + \cdots, f_m \neq 0, \quad f_m = l_1 l_2 \cdots l_m$$

且设 $x \nmid f$.不然是平凡的. 又由

$$\begin{aligned} I_p(f,x) &= I_p(f(0,y),x) = I_p(y^m f_m(0,1) + y^{m+1} f_{m+1}(0,1) + \cdots) \\ &= I_p(y^m, x) + I_p(f_m(0,1) + yg, x) = m + I_p(f_m(0,1) + yg, x) \geq m \end{aligned}$$

因此

$$I_p(f,x) > m \Longleftrightarrow I_p(f_m(0,1) + yg, x) \geq 1 \Longleftrightarrow f_m(0,1) = 0$$

$\Longleftrightarrow x | f_m \Longleftrightarrow$ 对于某个 i, $L = L_i$. 定理得证. ■

定理 4.2.4 设 $p \in C : F(X,Y,Z) = 0$. 且设 p 为 C 的光滑点. 则 C 在 p 点的切线方程为

$$\frac{\partial F}{\partial X}(p)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(p)Y + \frac{\partial F}{\partial Z}(p)Z = 0$$

证明 不妨设 $p = [a,b,1]$, $f(x,y) = F(x,y,1)$. $F(X,Y,Z) = Z^d f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}), d \geq 2$.

$$\frac{\partial F}{\partial X} = Z^{d-1}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial Y} = Z^{d-1}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = dZ^{d-1} f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}) - Z^{d-2}X\frac{\partial f}{\partial x} - Z^{d-2}Y\frac{\partial f}{\partial y}$$

把 $p = [a,b,1]$ 的坐标代入, 可得:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p), \qquad \frac{\partial F}{\partial Y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p), \qquad \frac{\partial F}{\partial Z}(p) = -a\frac{\partial f}{\partial x}(p) - b\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

所以, 方程为:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)X + \frac{\partial f}{\partial y}(p)Y - (a\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b\frac{\partial f}{\partial y}(p))Z = 0$$

仿射坐标如下:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b) = 0$$

所以, 切线方程为所求的方程. ■

注 4.2.2 由定理 4.2.4 可知, 切线与仿射坐标的选取无关. ■

推论 4.2.3 p 为 C 的奇点 $\Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial X}(p) = \frac{\partial F}{\partial Y}(p) = \frac{\partial F}{\partial Z}(p) = 0 \qquad (1)$.

证明 因为

$$dF = \frac{\partial F}{\partial X}X + \frac{\partial F}{\partial Y}Y + \frac{\partial F}{\partial Z}Z$$

故条件推出 $p \in C$. 设 $p = [a,b,1]$, 则 (1) 推出 $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$. 所以 p 为奇点.

反之, $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$. 则

$$\frac{\partial F}{\partial X}(p) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial Y}(p) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial Z}(p) = 0$$

所以, (1) $\Longleftrightarrow p$ 为 C 的奇点. ■

4.3 Bézout 定理

设 $C \subseteq \mathbb{P}^2 : F = 0, \deg F = m = \deg C; D \subseteq \mathbb{P}^2 : G = 0, \deg G = n, \gcd(F,G) = 1$. 且 C

与 D 无公共分支. 从而知 $C\cap D$ 不含曲线. $\dim(C\cap D)=0, C\cap D$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中的零维代数集. 故 $|C\cap D|<+\infty$.

定义 4.3.1 已知 $I_p(C,D)=I_p(F,G)$ 与仿射方程的选取无关. 设 $A=(a_{ij})\in GL(n,3,\mathbb{C})$, $|A|\neq 0$. 令

$$\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} \qquad (1)$$

则可得一个同构

$$\begin{aligned}\overline{A}:\quad \mathbb{P}^2 &\xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{P}}^2\\ [X,Y,Z] &\longmapsto [\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}]\end{aligned}$$

次同构被称为是 $\mathbb{P}^2$ 的射影变换. 也可理解为 $\overline{\mathbb{P}}^2$ 的射影变换. 也可理解为 $\overline{\mathbb{P}^2}$ 有齐次坐标 $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$.

注 4.3.1 (1) 定义了同构映射

$$\begin{aligned}\sigma:\quad \mathbb{P}^2 &\simeq \overline{\mathbb{P}}^2\\ C \quad & \quad \overline{C}=\sigma(C)\\ F=0 \quad & \quad \overline{F}=0\end{aligned}$$

C 与 $\overline{C}$ 之间的方程的关系,

$$F(X,Y,Z)\overset{(1)}{=}\overline{F}(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})$$

已知相交数与仿射坐标的选取无关, 与射影坐标的选取也无关. ■

证明 首先

$$I_p(F,G)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,p}}{\left\langle\frac{F}{L^m},\frac{G}{L^m}\right\rangle}$$

考虑同构映射

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{P}}^2,\overline{p}} &\simeq \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,p}\\ \left\langle\frac{\overline{F}}{\overline{L}^n},\frac{\overline{G}}{\overline{L}^m}\right\rangle &\longmapsto \left\langle\frac{F}{L^n},\frac{G}{L^m}\right\rangle\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{P}}^2,\overline{p}}}{\left\langle\overline{F}/\overline{L}^n,\overline{G}/\overline{L}^m\right\rangle}\cong\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,p}}{\langle F/L^n,G/L^m\rangle}$$

所以 $I_p(F,G)=I_{\overline{p}}(\overline{F},\overline{G})$. ■

用齐次方程表示, 仍有以下公理成立.

定理 4.3.1 (1) $I_p(F,G)=I_p(G,F)$;

(2) $I_p(F,G)=I_p(F,G+HF)$, $\quad \deg F\leq\deg G$;

(3) $I_p(F,GH)=I_p(F,G)+I_p(F,H)$;

(4) $I_p(L_1, L_2) = 1, \quad \deg L_i = 1$;

(5) 若有 $H(P) \neq 0$, 则有 $I_p(F, GH) = I_p(F, G)$;

(6) $I_p(F, G_1^{n_1} \cdots G_r^{n_r}) = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i I_p(F, G_i)$.

定义 4.3.2 定义 C 与 D 在 $\mathbb{P}^2$ 上的相交数.

$$C \cdot D = I(C, D) = I(F, G) = \sum_{p \in C \cap D} I_p(F, G)$$

显然关于 $I_p(\cdot, \cdot)$ 满足的公理 (1)–(6) 对 $I(\cdot, \cdot)$ 也成立.

下面给出本节的一个主要定理.

定理 4.3.2 (Bézout 定理) $I(C, D) = \deg C \cdot \deg D = mn$.

在证明该定理以前, 我们先给出如下引理.

引理 4.3.1 当 $\deg D = n = 1$ 时, $I(C, D) = m$.

证明 由射影不变性, 不妨设 $G = Z$, 即 $D = L_\infty$. 因为通过射影变换可将任何直线变到 L_∞. 记

$$F = F_m + F_{m-1}Z + \cdots + F_0 Z^m$$

这里, $F_i = F_i(X, Y)$ 是 i 次齐次. 特别地,

$$F_m = L_1 L_2 \cdots L_m, \quad \deg L_i = 1, \quad L_i = L_i(X, Y) = a_i X + b_i Y$$

于是

$$I(F, G) = I(F_m + F_{m-1}Z + \cdots, Z) = I(F_m, Z) = \sum_{i=1}^{m} I(L_i, Z) = m$$

证毕. ■

下面我们来证明定理 4.3.2.

证明 记 $s = \deg_Z F$, $t = \deg_Z G$. 我们对 $s + t$ 施数学归纳法. 不妨设 $s \leq t$.

第一步: 当 $s + t \leq 1$ 时, 根据引理 4.3.1 可得定理.

第二步:

$$F = F_{m-s} Z^s + \cdots + F_m, \quad G = G_{n-t} Z^t + \cdots + G_n$$

设 $H = \gcd(F, F_{m-s})$, 即 $F = HF'$. 因为 $H = H(X, Y)$, 所以

$$I(H, G) = I(H, G) + I(F', G) = \deg H \cdot \deg G + I(F', G)$$

第三步: 设 $\gcd(F, F_{m-s}) = 1$, $\gcd(G, G_{n-t}) = 1$. 令

$$G_1 = G_{n-t} \cdot Z^{t-s} F - F_{m-s} G$$

则 $\deg_Z G_1 < t, G_1 \neq 0, \deg G_1 = m + n - s$. 由归纳法

$$I(F, G_1) = \deg F \cdot \deg G_1 = m(n + m - s)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} I(F,G_1) &= I(F, G_{n-t}Z^{t-s}F - F_{m-s}G) \\ &= I(F, F_{m-s}G) \\ &= I(F, F_{m-s}) + I(F,G) \\ &= m(m-s) + I(F,G) \end{aligned}$$

所以, $I(F,G) = m(m+n-s) - m(m-s) = mn$. ■

推论 4.3.1 $\mathbb{P}^2$ 中任何两曲线必有交点.

定义 4.3.3 (曲线的拐点) 设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 有光滑点 p, L 是过 p 的切线. 如果 $I_p(C,L) \geq 3$, 则称 p 为 C 的拐点.

条件与坐标的选取无关. 不妨设 $p = [0,0,1], L : x = 0$. 这里是指射影变换后的坐标. $C \subset \mathbb{C}^2$ 的仿射方程 $f(x,y)$

$$f = x + ax^2 + bxy + cy^2 + f_3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} I_p(C,L) &= I_p(f,x) \\ &= I_p(cy^2 + f_3(0,y) + \cdots, x) \\ &= 2 + I_p(c + yh(y), x) \\ &\geq 3 \end{aligned}$$

由此可知

命题 4.3.1 p 为拐点 $\Longleftrightarrow c = 0$.

设 F 为 C 的齐次方程, 则

$$F = XZ^{n-1} + Z^{n-2}(aX^2 + bXY + cY^2) + \cdots$$

若记 $X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$, 则

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right)_{i,j=1}^{3}(p) = \begin{pmatrix} 2a & b & n-1 \\ b & 2c & 0 \\ n-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $H = det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right)$, 则 $p \in C$ 为光滑点, p 为拐点 $\Longleftrightarrow H(p) = 0$. 也就是说若 $\deg F = n$, 则 $\deg H = 3(n-2)$.

定理 4.3.3 若 C 为 n 次光滑曲线, 则 C 有 $3n(n-2)$ 个拐点, 这些拐点可以相同.

证明 $|\{拐点\}| = |\{F=0\} \cap \{H=0\}| = \deg F \cdot \deg H = n \cdot (3(n-2))$. ■

推论 4.3.2 次数 $d \geq 3$ 的光滑曲线至少有一个拐点.

应用: 设 C 是 3 次光滑曲线. 则 C 至少有一个拐点. 通过射影变换, 不妨设 $p = [0,0,1]$. 且 C 过 p 点的切线为 $X = 0$. 则

$$f(x,y) = x + ax^2 + bxy + f_3(x,y)$$

齐次化

$$\begin{aligned}F(X,Y,Z)&=XZ^2+(aX^2+bXY)Z+f_3(X,Y)\\&=X(Z^2+(aX+bY)Z)+f_3(X,Y)\\&=X(Z+\tfrac{aX+bY}{2})^2+f_3(X,Y)-\tfrac{X}{4}(aX+bY)^2\\&=X(Z+\tfrac{1}{2}(aX+bY))^2+f_3'(X,Y)\end{aligned}$$

令 $\overline{X}=Y,\overline{Y}=Z+\frac{1}{2}(aX+bY),\overline{Z}=X$. 这是射影变换. 将 $p=[0,0,1]$ 映成 $\overline{p}=[0,1,0]$; 把 $X=0$ 映成 $\overline{Z}=0$. $\mathbb{P}^2$ 中曲线的方程为 $\overline{Z}\cdot\overline{Y}^2+f_3'(\overline{Z},\overline{X})$, 其中

$$\overline{Z}\cdot\overline{Y}^2=a_0\overline{X}^3+b_0\overline{X}^2\overline{Z}+c_0\overline{X}\cdot\overline{Z}^2+d_0\overline{Z}^3$$

且 $a_0\neq 0$, 否则, $\overline{Z}=0$ 是 C 的一个分支, 这与 C 的光滑性矛盾. 缩入 $\overline{X}$, 可设 $a_0=1$. 通过

$$X=\overline{X}+\frac{b_0}{3}\overline{Z},\qquad Y=\overline{Y},\qquad Z=\overline{Z}$$

变换, 方程可化为

$$ZY^2=X^3+aXZ^2+bZ^3$$

仿射方程

$$y^2=x^3+ax+b,\qquad 4a^3+27b^2\neq 0$$

拐点: $p=[0,1,0]$. 拐点的切线: $Z=0$. 所以 C 在无穷远处只有一个点 $p=[0,1,0]$ 且光滑. 记 $f(x)=x^3+ax+b$, 则 C 在通常平面上有奇点当且仅当

$$\begin{cases}y^2-f(x)=0\\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2-f(x))=0\\ \frac{\partial}{\partial y}(y^2-f(x))=0\end{cases}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 上有解. 当且仅当

$$\begin{cases}y^2-f(x)=0\\ f'(x)=0\\ 2y=0\end{cases}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 上有解. 当且仅当

$$\begin{cases}f(x)\ =0\\ f'(x)=0\end{cases}$$

在 $\mathbb{C}$ 上有解. $\Longleftrightarrow f(x)$ 有重根. $\Longleftrightarrow 4a^3+27b^2=0$.

定理 4.3.4 三次光滑平面射影曲线射影等价于

$$C_{a,b}:y^2=x^3+ax+b$$

其中, $4a^3+27b^2\neq 0$.

4.4 Noether定理与Cayley-Bacharach定理

4.4.1 相交数为 1 的刻划

设 $p \in C \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2, f(x,y)=0, p \in D \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2, g(x,y)=0$. 本节的目的是: 刻划

$$I_p(f(x,y),g(x,y))=1$$

定理 4.4.1 $I_p(f,g)=1 \Longleftrightarrow C,D$ 过 p 点, 且 p 为 C 和 D 的光滑点. 且 C 和 D 在 p 点的切线不同.

证明 不妨设 $p=(0,0), f(0,0)=g(0,0)=0$.

$$f=f_1+f_2+\cdots \qquad g=g_1+g_2+\cdots$$

这里, f_i,g_i 是 i 次齐次部分.

$$I_p(f,g)=1 \Longleftrightarrow \dim \frac{\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}}{\langle f,g\rangle}=1 \Longleftrightarrow \langle f,g\rangle=\langle x,y\rangle$$

$\Longleftrightarrow$ 存在 2 阶可逆矩阵 $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in \emptyset_{\mathbb{C}^2,p}$ 使得

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

去掉 A 的元素的公分母 h, $h(p)\neq 0, h\in \mathbb{C}[x,y]$. 使得

$$h\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B=(a_{ij}), \quad b_{ij}\in \mathbb{C}[x,y], \quad |B|(p)\neq 0$$

且有

$$h=h_0+h_1+\cdots, \quad h_0\neq 0, \quad B=B_0+B_1+\cdots$$

则知 $|B_0|=|B|\cdot(p)\neq 0$,

$$h_0\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B_0\in GL_2(\mathbb{C})$$

所以, f_1,g_1 线性无关. 故 $f_1\neq 0, g_1\neq 0$. 且 C,D 在 p 点的切线不同. ■

4.4.2 Noether 条件

问题 4.4.1 曲线 $H=0$ 过 $p\in C\cap D$ 的意义?

命题 4.4.1 (Noether 条件) 已知曲线 C 由方程 $f(x,y)=0$ 确定, 曲线 D 的方程为 $g(x,y)=0$. $p\in C\cap D$. 则曲线 $h(x,y)=0$ 过点 p 当且仅当, $h\in\langle f,g\rangle \lhd \emptyset_{\mathbb{C}^2,p}$, 当且仅当 $h\in\langle\langle f,g\rangle\rangle \lhd \emptyset^{a_n}_{\mathbb{C}^2,p}=\mathbb{C}[[x-a,y-b]]$.

例 4.4.1 $f=x-2y^2, g=x-y^2$.

$$h\in\left\langle x-2y^2,x-y^2\right\rangle=\left\langle y^2,x-y^2\right\rangle=\left\langle x,y^2\right\rangle$$

$h=xa+y^2b$, $a,b\in\emptyset_{\mathbb{C}^2,p}$, 故 $uh=xv+y^2w$, $u,v,w\in\mathbb{C}[x,y]$, $u(p)\neq 0$. ■

以下设 $C, D \subset \mathbb{P}^2$, 其定义方程分别为 $F = 0, G = 0$. 且它们无公共分支. 若 $C \cap D = \{p_1, \cdots, p_r\}$. 曲线$E \subset \mathbb{P}^2$, 由 $H = 0$ 定义. $\deg F = n$, $\deg G = m$.

定理 4.4.2 (Noether **定理**) E 在所有的点 $P_1, P_2, \cdots, P_r$ 都满足关于 C 和 D 的 Noether 条件 $\Longleftrightarrow$ 存在齐次多项式 A, B 使得

$$H = AF + BG, \quad \deg A = \deg H - \deg F, \quad \deg B = \deg H - \deg G$$

证明 不妨设 $\{p_1, \cdots, p_r\} \cap L_\infty = \emptyset$. 必要性证明是显然的. 下证充分性.

由条件, 对于任意的 i, 存在 $\frac{v_i}{u_i}, \frac{v_i'}{u_i'} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p_i}$, 使得

$$h(x, y) = \frac{v_i}{u_i} f + \frac{v_i'}{u_i'} g$$

$u_i u_i'$ 在 p_i 点不为零. 即

$$u_i u_i' h \in (f, g) \lhd \mathbb{C}[x, y]$$

即对于任意的 i, 存在 $a_i \in \mathbb{C}[x, y]$ 使得

$$a_i(p_i) \neq 0, \quad a_i h \in (f, g) \lhd \mathbb{C}[x, y]$$

$a_1, a_2, \cdots, a_r, f, g$ 无公共零点. 从而存在 $b_1, \cdots, b_r \in \mathbb{C}[x, y]$, $s, t \in \mathbb{C}[a, b]$, 使得

$$a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r + fs + gt = 1$$

$$h = (a_1 h) b_1 + \cdots + (a_r h) b_r + fsh + gth \in (f, g)$$

齐次化后:

$$HZ^N = AF + BG, N \geq 0$$

下设 N 是所有上述表达式中的最小者. 我们证明 $N = 0$. 反设 $N \geq 1$. 令 $A_0 = A(X, Y, 0)$, $0 = A_0 F_0 + B_0 G_0$. 我们断言: F_0, G_0 无公共零点. 不然, 若 $\lambda X + \mu Y$ 为 F_0, G_0 的公因子, λ, μ 不全为零. 则 $[\mu, -\lambda, 0] \in C \cap D$ 与 $\{P_1, \cdots, P_r\} \subset \mathbb{C}^2$ 矛盾. 所以 $\gcd(F_0, G_0) = 1$.

故由 $A_0 F_0 = -B_0 G_0$ 知 $F_0 | B_0$, $G_0 | A_0$. 所以 $A_0 = -CG_0$, $B_0 = CF_0$, $C \in \mathbb{C}[x, y]$. 令

$$A_1 = A + CG, \quad B_1 = B - CF$$

则

$$(A_1)_0 = A_0 + C_0 G_0 = 0, \quad (B_1)_0 = B_0 - C_0 F_0 = 0$$

所以 $Z | A_1$, $Z | B_1$. 于是

$$Z^N H = AF + BG = (A_1 - CG)F + (B_1 + CF)G = A_1 F + B_1 G = Z(\widetilde{A} F + \widetilde{B} G)$$

所以 $Z^{N-1} H = \widetilde{A} F + \widetilde{B} G$. 这与 N 的极小性矛盾. 所以 $N = 0$. ■

4.4.3 Noether 条件的数值判别法

定理 4.4.3 (**验证** Noether **条件**) (1) 若 $I_p(F, G) = 1, H(p) = 0$. 则 N-条件成立.

(2) 若 C 在 p 点光滑. 且 $I_p(F, H) \geq I_p(F, G)$, 则 N-条件满足.

证明 (1) 的证明是显然的.

(2) 取 $p=(0,0)$, $T_pC: y-\alpha x=0$.

$$f=y-\alpha x+f_2(x,y)+\cdots=(1+b_1(x,y))y+(a(x)-\alpha)x=(1+b_1(x,y))(y-cx)$$

其中, $c=\frac{a(x)-\alpha}{1+b_1}, b_1(0,0)=0$.

$$\langle f,g\rangle=\langle y-cx,g\rangle=\langle y-cx,g(x,cx)\rangle=\langle y-cx,x^s\rangle$$

这里, $s=I_p(f,g)$. 若 $t=I_p(f,h)$, 则 $\langle f,h\rangle=\langle y-cx,x^t\rangle$. $h\in\langle f,g\rangle\Longleftrightarrow\langle f,h\rangle\subset\langle f,g\rangle$

$$\Longleftrightarrow\left\langle y-cx,x^t\right\rangle\subset\langle y-cx,x^s\rangle\Longleftrightarrow t\geq s$$

所以, $I_p(f,h)\geq I_p(f,g)\Longleftrightarrow h\in\langle f,g\rangle$. ■

4.4.4 Cayley-Bacharach 定理

设 $C,D\subseteq\mathbb{P}^2, \deg C=m, \deg D=n$. 其中, 曲线 C,D 分别由方程 $F=0, G=0$ 确定. $\deg H=m+n-\nu$, $(\nu\geq 3)$.

$$C\cap D=\{p_1,p_2,\cdots,p_{mn}\}$$

即 C 与 D 在每一个点都正常相交.

定理 4.4.4 *若 H 过 $C\cap D$ 中至少 $mn-(\nu-2)$ 个点. 则 H 过 $C\cap D$ 中所有的点.*

证明 设 H 过 $P_{\nu-1},P_\nu,\cdots,P_{mn}$. 我们等同曲线和定义它的多项式过 $P_i, i\leq\nu-2$. 作直线 L_i 使得

(1) L_i 不过其它交点;

(2) L_i 不过 $G=0$ 的奇点;

(3) L_i 与 $G=0$ 不在任何点相切.

即 $|(L_i\cap G)|=n$. 从而知 $L_1\cdots L_{\nu-2}H$ 过 $C\cap D$ 的所有点. 从而 Noether 条件满足. 因此, 存在齐次多项式 A,B 使得

$$L_1\cdots L_{\nu-2}H=AF+BG$$

设

$$L_i\cap\{G=0\}=\{p_i,q_{i1},\cdots,q_{i,n-1}\}$$

则知 $q_{i1},\cdots,q_{i,n-1}$ 不在 $F=0$ 上. 因此

$$A(q_{i1})=\cdots=A(q_{i,n-1})=0$$

另一方面,

$$\deg A=\deg H+(\nu-2)-\deg F=(m+n-\nu)+(\nu-2)-m=n-2$$

且

$$\{L_i=0\}\cap\{A=0\}\supset\{q_{i1},\cdots,q_{i,n-1}\}$$

由 Bezout 定理, $L_i|A$. 从而

$$L_1L_2\cdots L_{\nu-2}|A, \quad L_1L_2\cdots L_{\nu-2}|B$$

故知

$$A = L_1L_2\cdots L_{\nu-2}A', \quad B = L_1L_2\cdots L_{\nu-2}B'$$

所以 $H = A'F + B'G$, 即 H 过所有交点. ■

推论 4.4.1 (Chasles **定理**)　设 $m = n = \nu = 3$, $C \cap D = \{p_1, \cdots, p_9\}$. E 为 3 次曲线, 过 $p_1, \cdots, p_8$, 则 E 过 p_9.

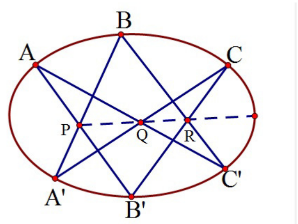
例 4.4.2　设 $m = n = 4, \deg H = 4$. 若 H 过正好 13 个交点, $p_1, p_2, \cdots, p_{13}$, 则 p_{14}, p_{15}, p_{16} 共线. ■

证明　设过 p_{14}, p_{15} 的某直线 L, 则 LH 是 5 次曲线,

$$\deg LH = 5 = m + n - \nu, \quad \nu = 3$$

从而知 LH 过 $mn - (\nu - 2) = 15$ 个点. 由 C-B 定理知, LH 过第 16 个点 p_{16}. 又 p_{16} 不在 H 上. 所以 p_{16} 在 L 上. 故 p_{14}, p_{15}, p_{16} 共线. ■

例 4.4.3 (Pascal **定理**)　如下图所示, 则 P, Q, R 共线.



■

证明　取 $C = AB' \cup BC' \cup CA'$, $D = A'B \cup B'C \cup C'A$. $H =$ 椭圆 $E \cup \overline{PQ}$.

$$C \cap D = \{A, B, C, A', B', C', P, Q, R\}$$

H 过其中 8 个点, $A, B, C, A', B', C', P, Q$. 所以 H 过第 9 个点 R. 又 R 不在二次曲线上, 从而在 L 上. 即 P, Q, R 共线. ■

注 4.4.1　Chasles 定理可推出平面几何中几十个关于共点, 共线的定理. ■

4.5　零点和极点重数的计算

4.5.1　曲线在光滑点处的计算

$p = (0, 0) \in C \subset \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0.$

定理 4.5.1　设 p 为 C 的光滑点. $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$. 则

(1) 存在 $a(x, y) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p}$, 使得

$$\langle f(x, y)\rangle = \langle y - a(x, y)x\rangle$$

(2) $\mathcal{O}_{C,p}$ 的极大理想由 $\overline{x}=x|_C$ 生成.

(3) $\varphi=\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\Big|_C\in Rat(C),\varphi\neq 0$, 则

$$\nu_p(\varphi)=I_p(v,f)-I_p(u,f)$$

(4) $\varphi=\overline{x}\nu_p(\varphi)\cdot\varphi_0,\quad \varphi_0\in\mathcal{O}_{C,p}$ 可逆.

证明 (1) 不妨设

$$\begin{aligned}f&=y-\alpha x+f_2(x,y)+\cdots\\&=y+b_2y^2+\cdots-(\alpha+\alpha_1(x,y)+\alpha_2(x,y)+\cdots)\\&=(1+b(y)y)y-\alpha(x,y)x\\&=(1+yb(y))(y-a(x,y)x)\end{aligned}$$

$a=\frac{\alpha(x,y)}{1+yb(y)}\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}$. 其中 $1+yb(y)$ 在 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}$ 中可逆, 故

$$\langle f\rangle=\langle y-a(x,y)x\rangle$$

(2) 设 $\mathcal{O}_{C,p}$ 是唯一分解整环. 在 $\mathcal{O}_{C,p}$ 中 $\bar{y}=\bar{a}\cdot\bar{x}$. 设

$$\varphi=\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\Big|_C\in\mathcal{O}_{C,p}$$

即 $u(0,0)\neq 0$. 若 $\varphi(p)=0$, 则 $v(0,0)=0$. 且 v 是 x,y 的多项式, 无常数项. 故

$$v(\bar{x},\bar{y})=v(\bar{x},\bar{a}\cdot\bar{x})=\bar{x}\cdot v_1$$

从而知 $\varphi\in\langle\bar{x}\rangle$, 因此 $\mathfrak{m}_{C,p}=\langle\bar{x}\rangle$. 又因为 $\mathfrak{m}_{C,p}$ 极大, 故 $\bar{x}$ 为不可约元.

(3) 已知 $\varphi=\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\Big|_C$,

$$v(x,y)|_C=v(\bar{x},\bar{y})=\bar{x}^{\nu_0}v_0(\bar{x},\bar{y})$$

设 $\bar{x}\nmid v_0(\bar{x},\bar{y})$, 则知 $v_0(0,0)\neq 0$. 所以 $v_0(\bar{x},\bar{y})$ 为可逆元. 由定义知 $\nu_0=\nu_p(v(\bar{x},\bar{y}))$. 同理, 设 $\nu_\infty=\nu_p(u(\bar{x},\bar{y}))$, 则

$$u(\bar{x},\bar{y})=\bar{x}^{\nu_\infty}u_0(\bar{x},\bar{y}),\quad u_0(0,0)\neq 0$$

因此, $\nu_p(\varphi)=\nu_0-\nu_\infty$. 下证: $\nu_0=I_p(f,v(x,y))$: 计算

$$\langle f(x,y),v(x,y)\rangle=\langle y-a(x,y)x,x^{\nu_0}v_0(x,y)\rangle=\langle y-a(x,y)x,x^{\nu_0}\rangle$$

所以,

$$I_p(f,v)=I_p(y-ax,x^{\nu_0})=\nu_0\cdot I_p(y-ax,x)=\nu_0 I_p(y,x)=\nu_0$$

同理, $\nu_\infty=I_p(f(x,y),u(x,y))$. 所以 $\nu_D(\varphi)=I_p(f,v)-I_p(f,u)$. ■

4.5.2 结点处的计算

必须在 $\mathcal{O}^{a_n}_{\mathbb{C}^2,p}$ 中计算.

例 4.5.1 $y^2=x^2-x^3$ 在 $\mathbb{C}[x,y]$ 中不可约定义了一条 α 型的曲线. 原点是唯一的奇点. 但在 $\mathcal{O}^{a_n}_{\mathbb{C}^2,p}$ 中, 有分解

$$y^2-x^2+x^3=(y-x\sqrt{1-x})(y+x\sqrt{1-x})$$

所以, 在原点附近, C 有两个解析分支, 且它们都是光滑的.

$$(C_1,p): y-x\sqrt{1-x}=0,\quad (C_2,p): y+x\sqrt{1-x}=0$$

可知, C 的正规化 $\sigma:\widetilde{C}\to C$, p 的原像有两个点. $p_1,p_2\in\widetilde{C}$.

$$\varnothing(C)=\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^2+X^3)=\mathbb{C}[x,y]=\mathbb{C}[x][y]$$

$y^2=x^2(1-x), y$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 上整.

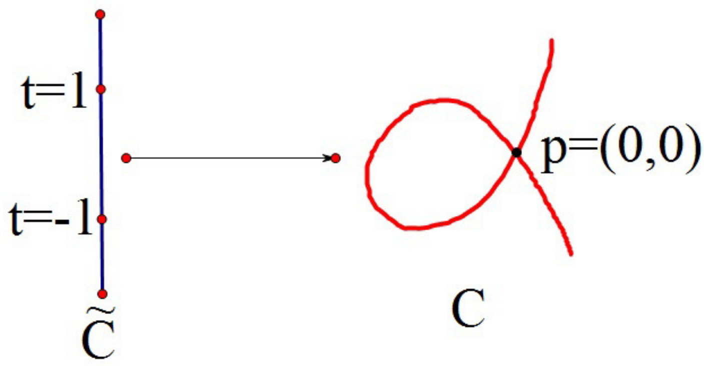
$$\varnothing(\widetilde{C})=\widetilde{\varnothing(C)}=\mathbb{C}[x][y][t]=\mathbb{C}[t],\quad t=\frac{y}{x},\quad t^2=1-x$$

所以,

$$\begin{cases} x=1-t^2\\ y=t(1-t^2)\end{cases}$$

其中, $\mathbb{C}[x,y]\subset\mathbb{C}[t]$, $\quad\widetilde{C}=\mathbb{C}$, 考虑映射

$$\begin{aligned}\sigma:\widetilde{C}=\mathbb{C}&\longrightarrow C\subset\mathbb{C}^2\\ t&\longmapsto(1-t^2,t(1-t^2))\end{aligned}$$



而 $(a,b)\in C$, $\quad(a,b)\neq(0,0)$, 这就推出 $a\neq0$, 因此 $\sigma^{-1}((a,b))=\{\frac{b}{a}\}$, $\quad\sigma^{-1}(0,0)=\{1,-1\}$.■

一般地, 结点的原像是两个不同点. $p=(0,0)\in C\subset\mathbb{C}^2: f(x,y)=0$. 原点 $p=(0,0)$ 为 C 的一个结点. 即

(1) $mult_p(C)=2$;

(2) C 在 p 点有两条不同的切线.

经过坐标的仿射变换, 可设

$$f=y^2-x^2+f_3(x,y)+\cdots+f_d(x,y)=y^2(1-b(x,y))-x^2(1-c(x,y))$$

$b(0,0)=c(0,0)=0$. 将该式变形可得

$$f=(1-b)(y+\sqrt{\frac{1-c}{1-b}}\cdot x)(y-\sqrt{\frac{1-c}{1-b}}\cdot x)$$

令

$$a(x,y)=\sqrt{\frac{1-c}{1-b}}\in\varnothing_{\mathbb{C}^2,p}^{a_n}=\mathbb{C}[[x,y]]$$

所以

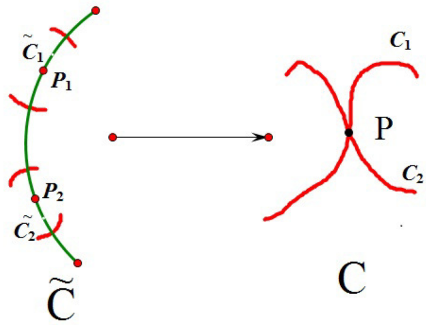
$$\langle\langle f\rangle\rangle = \langle\langle f_1\cdot f_2\rangle\rangle, \quad f_1 = y+ax, \quad f_2 = y-ax$$

在点 p 附近有

$$(C,p) = (C_1,p)\cup(C_2,p), \quad C_1: f_1(x,y)=0; \quad C_2: f_2(x,y)=0$$

局部解析曲线 $\sigma^{-1}(p)=\{p_1,p_2\}$.

$p_1\in\widetilde{C_1}, p_2\in\widetilde{C_2}, \widetilde{C_1}\cap\widetilde{C_2}=\emptyset$.



$$\sigma:\widetilde{C_1}\simeq C_1, \quad \sigma:\widetilde{C_2}\simeq C_2$$

$$\varnothing^{a_n}_{\widetilde{\mathbb{C}},p_1} = \varnothing^{a_n}_{\widetilde{C_1},p_1} = \varnothing^{a_n}_{C_1,p} = \mathbb{C}[[x,y]]/\langle\langle y+ax\rangle\rangle = \mathbb{C}[[x]]$$

由隐函数定理, $C_1: y=\varphi_1(x), C_2: y=-\varphi_1(x)$. 两局部解析曲线也可定义相交数.

$$I_p(f_1(x,y),g_1(x,y)) = \dim_{\mathbb{C}}\frac{\varnothing^{a_n}_{\mathbb{C}^2,p}}{\langle\langle f_1,g_1\rangle\rangle}$$

也满足计算公理. 设

$$\varphi = \left.\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\right|_{\widetilde{C}} \in Rat(\widetilde{C})$$

在 $\varnothing^{a_n}_{\widetilde{C},p}$ 中, $v=x^{\nu_0}v_0$, ν_0 极大. $v_0\in\varnothing_{\widetilde{C},p_1}$, 则 $v_0(0,0)\neq 0$, v_0 可逆. 从而可以证明: $\nu_0 = I_p(f_1,v)$ 对于 $u(x,y)$ 有相同的结论. 因此,

$$\nu_{p_1}(\varphi) = I_p(f_1,v) - I_p(f_1,u)$$

同理, $\nu_{p_2}(\varphi)$ 也可作类似计算.

定理 4.5.2 设 $\varphi\in Rat(\widetilde{C}), \varphi=\frac{v}{u}\big|_{\widetilde{C}}$. 则

$$\begin{cases}\nu_{p_1}(\varphi) = I_p(f_1,v)-I_p(f_1,u)\\ \nu_{p_2}(\varphi) = I_p(f_2,v)-I_p(f_2,u)\end{cases}$$

其中, $\varphi = x^{\nu_{p_1}(\varphi)}\varphi_1 = x^{\nu_{p_2}(\varphi)}\varphi_2$. $\varphi_i =\in \varnothing^{a_n}_{\widetilde{C},p_i}, i=1,2$ 都是可逆的.

4.5.3 Noether 条件的数值判别法

设 $C\subseteq\mathbb{C}^2: f(x,y)=0$; $D\subseteq\mathbb{C}^2: g(x,y)=0$. $f,g,h\in\mathbb{C}[x,y]$. $p=(0,0)\in C\cap D$.

定理 4.5.3 若 C 在 p 点光滑. 如果 $I_p(f,h)\geq I_p(f,g)$, 则 $h\in\langle f,g\rangle$, $N-$ 条件成立.

定理 4.5.4 设 C 在 p 点是一个结点. 在 $\mathcal{O}^{a_n}_{\mathbb{C}^2,p}$ 中有不可约分解 $f=f_1f_2$. 如果

$$\begin{cases} I_p(f_1,h)\geq I_p(f_1,g)+1 \\ I_p(f_2,h)\geq I_p(f_2,g)+1 \end{cases}$$

则 $h\in\langle f,g\rangle\subset\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}$.

证明 不妨设 $f_1=y+ax, f_2=y-ax, a(0,0)\neq 0$.

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}(p)=\begin{vmatrix} a(p) & 1 \\ -a(p) & 1 \end{vmatrix}=2a(p)\neq 0$$

令

$$\begin{cases} u=f_1(x,y)=y+ax \\ v=f_2(x,y)=y-ax \end{cases}$$

则 u,v 也可作为 $p=(0,0)$ 点的解析坐标. 即 $\mathbb{C}[[x,y]]=\mathbb{C}[[u,v]]$.

$$\begin{aligned} \langle\langle f,g\rangle\rangle &= \langle\langle f_1f_2,g(x,y)\rangle\rangle=\langle\langle uv,\widetilde{g}(u,v)\rangle\rangle \\ &= \langle\langle uv,u^sa_0(u)+v^tb_0(v)\rangle\rangle, \quad a_0(0)\neq 0, b_0(0)\neq 0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \langle\langle f_1,g\rangle\rangle &= \langle\langle u,g(x,y)\rangle\rangle=\langle\langle u,\widetilde{g}(u,v)\rangle\rangle \\ &= \langle\langle u,u^sa_0(u)+v^tb_0(v)\rangle\rangle=\langle\langle u,v^t\rangle\rangle \end{aligned}$$

所以 $t=I_p(f_1,g)$. 同理, $s=I_p(f_2,g)$. 由条件

$$\langle\langle f,h\rangle\rangle=\left\langle\left\langle uv,u^{s'}\overline{a}_0(u)+v^{t'}\overline{b}_0(v)\right\rangle\right\rangle$$

$s'=I_p(f_2,h), t'=I_p(f_1,h)$. $s'\geq s+1, t'\geq t+1$. 下证:

$$u^{s+1},v^{t+1}\in\langle\langle f,g\rangle\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle\langle f,g\rangle\rangle &= \langle\langle uv,u^sa_0(u)+v^tb_0(v)\rangle\rangle \\ &= \langle\langle uv,u^sa_0+v^tb_0,u(u^sa_0+v^tb_0),v(u^sa_0+v^tb_0)\rangle\rangle \\ &= \left\langle\left\langle uv,u^sa_0+v^tb_0,u^{s+1}a_0,v^{t+1}b_0\right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle uv,u^sa_0+v^tb_0,u^{s+1},v^{t+1}\right\rangle\right\rangle \end{aligned}$$

所以 $u^{s+1},v^{t+1}\in\langle\langle f,g\rangle\rangle$. 由于 $s'\geq s+1, t'\geq t+1$. 所以

$$u^{s'}\overline{a}_0+v^{t'}\overline{b}_0\in\langle\langle f,g\rangle\rangle$$

所以 $\langle\langle f,h\rangle\rangle\subseteq\langle\langle f,g\rangle\rangle$. 即 $h\in\langle\langle f,g\rangle\rangle$. 所以 $h\in\langle f,g\rangle$. ■

4.6 $L(D)$ 的定义和计算

设 $C\subset\mathbb{P}^2$ 是 d 次不可约代数曲线. 最多只有结点为奇点. 设曲线 C : 由方程 $F(X,Y,Z)=0$ 定义. $\sigma:\widetilde{C}\longrightarrow C$ 为正规化. $\widetilde{C}\subset\mathbb{P}^N$.

$$\Sigma=\{P,Q,R,\cdots\}\subset C$$

为 C 的奇点集. 则知 C 与 $\widetilde{C}$ 双有理等价. $\sigma^*: Rat(C) \cong Rat(\widetilde{C})$. 即

$$Rat(\widetilde{C}) = \sigma^* Rat(C) = \{\sigma^*\varphi \mid \varphi \in Rat(C)\}$$

$$E \triangleq \sigma^{-1}(\Sigma) = \{P_1, P_2; Q_1, Q_2; \cdots\}$$

记

$$\sigma^*\varphi = \varphi|_{\widetilde{C}} = \left.\frac{H(X,Y,Z)}{G(X,Y,Z)}\right|_{\widetilde{C}}$$

设 $p \in \widetilde{C}, \varphi \in Rat(\widetilde{C}), \varphi \neq 0$. 设 t 是 $\emptyset^{a_n}_{\widetilde{C},p}$ 的极大理想的生成元. 则知

命题 4.6.1 $\nu_p(\varphi) \in \mathbb{Z}$.

命题 4.6.2 设 $\varphi = t^{\nu_p(\varphi)} \cdot \varphi_0, \varphi_0 \in \emptyset^{a_n}_{\widetilde{C},p}$ 是可逆元, 那么

(1) $\nu_p(\varphi) \geq 0 \Longleftrightarrow \varphi$ 在 p 点正则;

(2) $\nu_p(\varphi) > 0$ 时, 称 p 为 φ 的 $\nu_p(\varphi)$ 重零点;

(3) $\nu_p(\varphi) < 0$ 时, 称 p 为 φ 的 $|\nu_p(\varphi)|$ 重极点.

命题 4.6.3 设 $\varphi_1, \varphi_2 \in Rat(\widetilde{C}), \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$. 且 $\varphi_1 \pm \varphi_2 \neq 0$. 则

(1) $\nu_p(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \nu_p(\varphi_1) + \nu_p(\varphi_2)$;

(2) $\nu_p(\varphi_1 \pm \varphi_2) \geq \min\{\nu_p(\varphi_1), \nu_p(\varphi_2)\}$.

命题 4.6.4 $\varphi \neq 0$, 则 φ 最多只有有限个零点和极点.

证明 设 $\varphi = \frac{H}{G}\big|_{\widetilde{C}} \neq 0$, 则 $p_0 = \sigma(p)$.

$$\nu_p(\varphi) = I_{p_0}(F,H) - I_{p_0}(F,G)$$

所以

$$\{p \in \widetilde{C} \mid \nu_p(\varphi) \neq 0\} \subseteq \sigma^{-1}(C \cap \{H=0\}) \cup \sigma^{-1}(C \cap \{G=0\})$$

即除有限个 $p \in \widetilde{C}$ 以外, 其它的 p 有 $\nu_p(\varphi) = 0$. ■

定义 4.6.1 设 $\varphi \in Rat(\widetilde{C}), \varphi \neq 0$. 则可定义

$$div(\varphi) = \sum_{p \in \widetilde{C}} \mu_p(\varphi) p$$

我们称上述的 $div(\varphi)$ 是 φ 的主除子.

定义 4.6.2 设 $D = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i p_i$ 是 $\widetilde{C}$ 上的除子, 则定义

$$\begin{aligned} L(D) &= \{\varphi \in Rat(\widetilde{C}) \mid \varphi = 0 \text{ 或者 } \varphi \neq 0, div(\varphi) + D \geq 0\} \\ &= \{\varphi \in Rat(\widetilde{C}) \mid \varphi = 0 \text{ 或者 } \varphi \neq 0, \nu_p(\varphi) \geq \begin{cases} 0, & p \neq p_i, \\ -n_i, & p = p_i \end{cases} \forall\, i\} \end{aligned}$$

引理 4.6.1 $L(D)$ 是复向量空间.

证明 $\varphi \in L(D), \varphi \neq 0 \Longleftrightarrow$

$$\nu_p(\varphi) \geq \begin{cases} 0, & p \neq p_1, \cdots, p_r \\ -n_i, & p = p_i \end{cases} \qquad (1)$$

显然, 对于 $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ 时, $\nu_p(c\varphi) = \nu_p(\varphi)$ 也满足上条件. 即对于任意的 $\varphi \in L(D)$, 都有 $c\varphi \in L(D)$. 设 $\varphi_1, \varphi_2 \in L(D), \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \varphi_1 + \varphi_2 \neq 0$. 则知

$$\nu_p(\varphi_1 + \varphi_2) \geq \min\{\nu_p(\varphi_1), \nu_p(\varphi_2)\}$$

所以, $\varphi_1 + \varphi_2$ 也满足 (1). 从而知 $\varphi_1 + \varphi_2 \in L(D)$. 所以 $L(D)$ 为向量空间. ■

定义 4.6.3 给定除子 $D = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i p_i$, 可定义 D 的次数 $\deg D$.

$$\deg D = \sum_{i=1}^{r} n_i$$

引理 4.6.2 设 $\varphi \in Rat(\widetilde{C})$, $\varphi \neq 0$. 则 $\deg div(\varphi) = 0$. 即 φ 的零点数与极点数相同. (重数计算在内)

证明 设 $\varphi = \frac{H}{G}\big|_{\widetilde{C}}$. 则知

$$\nu_p(\varphi) = I_{\sigma(p)}(F, H) - I_{\sigma(p)}(F, G)$$

上式对 $\sigma(p)$ 为 C 的光滑点时成立. 当 $\sigma(p) = Q$ 为 C 的奇点时, 则 $p \in \sigma^{-1}(Q) = \{Q_1, Q_2\}$. 则

$$\nu_{Q_i}(\varphi) = I_p(C_i, H) - I_p(C_i, G), \quad i = 1, 2$$

所以

$$\nu_{Q_1}(\varphi) + \nu_{Q_2}(\varphi) = I_p(C_1, H) + I_p(C_2, H) - I_p(C_1, G) - I_p(C_2, G) = I_p(C, H) - I_p(C, G)$$

因此

$$\sum_{p \in \widetilde{C}} \nu_p(\varphi) = \sum_{p \in C} I_p(F, H) - \sum_{p \in C} I_p(F, G) = \deg H \cdot \deg F - \deg G \cdot \deg F = 0$$

也就是说 $\deg div(\varphi) = \sum\limits_{p \in \widetilde{C}} \nu_p(\varphi) = 0$. ■

命题 4.6.5 无极点的有理函数为常值函数.

引理 4.6.3 $L(0) = \mathbb{C}$.

证明 设 $D = 0, \varphi \in L(0), \varphi \neq 0$. 则 $\nu_P(\varphi) \geq 0, \forall\, P \in \widetilde{C}$. 从而 φ 是处处正则的有理函数. 因为 $\widetilde{C}$ 是射影, 所以 $\varphi \in \mathcal{O}(\widetilde{C}) = \mathbb{C}$. ■

注 4.6.1 为了方便, 我们记

$$div(G|_C) = \sum_{P \in C \cap \{G=0\}} I_P(F, G) p$$

故

$$\deg div(G|_C) = \sum_{P \in \widetilde{C}} I_P(F, G) = \deg F \cdot \deg G$$

若 $\varphi = \frac{H}{G}\big|_C, \varphi \neq 0$. 则

$$div(\varphi) = div(H|_C) - div(G|_C)$$

$$I_P(\widetilde{C}, H) = \begin{cases} I_{\sigma(P)}(F, H), & \sigma(p) \text{ 光滑时} \\ I_Q(f_1, H), & \sigma(P) = Q \text{ 为奇点}, P = Q_1 \\ I_Q(f_2, H), & \sigma(P) = Q \text{ 为奇点}, P = Q_2 \end{cases}$$ ■

命题 4.6.6 ($L(D)$ 的公分母) 设 $C \subset \mathbb{P}^2$, Σ 为 C 的奇点集(结点集). 若 $\sigma : \widetilde{C} \longrightarrow C$ 为正规化, 且 $E = \sigma^{-1}(\Sigma)$. $D = D^+ - D^-, d = \deg C$.

定理 4.6.1 (1) 若 $div(G_0|_{\widetilde{C}}) \geq D^+ + E$, 则

$$L(D) \subseteq \{ \frac{H}{G_0}\bigg|_{\widetilde{C}} \mid \deg H = \deg G_0\}$$

(2) 若 $D^- \geq E, div(G_0|_{\widetilde{C}}) \geq D^+$, 则

$$L(D) \subseteq \{ \frac{H}{G_0}\bigg|_{\widetilde{C}} \mid \deg H = \deg G_0\}$$

(3) 在条件 (1) 或 (2) 下, 如果 $l := d - \deg G_0 \geq 3, R_1, \cdots, R_{l-2} \in \widetilde{C} - E$, 则

$$L(D + R_1 + \cdots + R_{l-2}) \subseteq \{ \frac{H}{G_0}\bigg|_{\widetilde{C}} \mid \deg H = \deg G_0\}$$

证明 (1)(2): 设 $\varphi \in L(D), \varphi \neq 0, \varphi = \frac{H}{G}\big|_{\widetilde{C}}$, $div(\varphi) + D \geq 0$, 即

$$div(H|_{\widetilde{C}}) - div(G|_{\widetilde{C}}) + D^+ - D^- \geq 0$$

又因为

$$div(G_oH|_{\widetilde{C}}) = div(H|_{\widetilde{C}}) + div(G_0|_{\widetilde{C}})$$

所以有

$$div(G_oH|_{\widetilde{C}}) \geq div(G|_{\widetilde{C}}) + div(G_0|_{\widetilde{C}}) - D^+ + D^- \geq div(G|_{\widetilde{C}}) + E$$

若 $p \notin E, p \in \widetilde{C}$: $I_p(\widetilde{C}, G_0H) \geq I_p(\widetilde{C}, G)$. 即

$$I_{\sigma(p)}(C, G_0H) \geq I_{\sigma(p)}(C, G)$$

若 $p \in E$: $I_p(\widetilde{C}, G_0H) \geq I_p(\widetilde{C}, G) + 1$, 即对于任何的 $Q \in \Sigma$, 有

$$\begin{cases} I_Q(f_1, G_0H) \geq I_Q(f_1, G) + 1 \\ I_Q(f_2, G_0H) \geq I_Q(f_2, G) + 1 \end{cases}$$

所以对于任何点 $p \in C \cap \{G = 0\}$. Noether 条件成立. 从而

$$G_0H = AF + BG, \quad \frac{H}{G} = \frac{B}{G_0} + \frac{AF}{G_0G}, \quad \varphi = \frac{H}{G}\bigg|_{\widetilde{C}} = \frac{B}{G_0}\bigg|_{\widetilde{C}}$$

(1)(2) 得证.

(3) 取 L_i 是过 R_i 的一般位置的直线. 即 L_i 不过 C 与 G 的交点.

$$L_i \cap C = \{R_i, q_1, \cdots, q_{d-1}\}$$

设 $\varphi = \frac{H}{G}|_{\widetilde{C}} \in L(D + R_1 + \cdots + R_{l-2})$. 则

$$div(H|_{\widetilde{C}}) - div(G|_{\widetilde{C}}) + D^+ - D^- + R_1 + \cdots + R_{l-2} \geq 0$$

故

$$div(H|_{\widetilde{C}}) \geq div(G|_{\widetilde{C}}) - D^+ + D^- - R_1 - \cdots - R_{l-2}$$

因此

$$\begin{aligned} div(HG_0L_1 \cdots L_{l-2}|_{\widetilde{C}}) &= div(H|_{\widetilde{C}}) + div(G_0|_{\widetilde{C}}) + \sum_{i=1}^{l-2} div(L_i|_{\widetilde{C}}) \\ &\geq div(G|_{\widetilde{C}}) + div(G_0|_{\widetilde{C}}) - D^+ + D^- + \sum_{i=1}^{l-2}(div(L_i|_{\widetilde{C}}) - R_i) \\ &\geq div(G|_{\widetilde{C}}) + E \end{aligned}$$

从而 Noether 条件满足, 故 $HG_0L_1 \cdots L_{l-2} = AF + BG$.

$$\deg B = \deg G_0 + l - 2 = (d - l) + (l - 2) = d - 2$$

L_i 与 C 的交点不在 $G = 0$ 上. 故

$$B(q_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, d - 1$$

从而, 由 Beazout 定理知

$$L_i \mid B \Longrightarrow L_1L_2 \cdots L_{l-2} \mid B \Longrightarrow L_1L_2 \cdots L_{l-2} \mid A$$

从而, $HG_0 = A'F + B'G$, 也就是说 $\varphi = \frac{H}{G}|_{\widetilde{C}} = \frac{A'}{G_0}\Big|_{\widetilde{C}}$. ■

推论 4.6.1 对 $\widetilde{C}$ 上的任何除子 D, $l(D) := \dim_{\mathbb{C}} L(D) < +\infty$.

推论 4.6.2 设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 光滑, $D = D^+ - D^-$. 如果 $div(G_0|_C) \geq D^+$. 则

$$L(D) \subset \{\frac{H}{G_0}\Big|_C \mid \deg H = \deg G_0\}$$

设 $D^+ = n_1P_1 + \cdots + n_rP_r$. 则条件

$$div(G_0|_C) \geq D^+ \Longleftrightarrow I_{p_i}(C, G_0) \geq n_i, i = 1, 2, \cdots, r$$

例 4.6.1 设 $C : y^2 = x^3 + ax + b, 4a^3 + 27b^2 \neq 0$. $C \subset \mathbb{P}^2$ 光滑.

$$F = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3$$

$p = [0, 1, 0] \in C$ 为 C 的拐点. 即 $I_P(C, Z) = 3, I_P(C, Z^2) = 6$. 为了计算 $L(P), L(2P), L(3P)$ 可以选 $G_0 = Z$.

(1) 考虑

$$L(P) = \{\frac{L}{Z}\Big|_C \mid \deg L = 1, div(\frac{L}{Z}\Big|_C) + P \geq 0\}$$

条件: $div(L|_C) - div(Z|_C) + P \geq 0, div(L|_C) \geq 2P$, 即 $I_P(L, C) \geq 2$. 从而 $L = 0$ 为 C 在 P 点的切线. 故 $L = \lambda Z, \lambda \in \mathbb{C}$. 所以 $L(P) = \mathbb{C}$.

(2) 考虑

$$
\begin{aligned}
L(2P) &= \{ \tfrac{L}{Z}\big|_C \mid \deg L = 1, div(L|_C) \geq P\} \\
&= \{ \tfrac{L}{Z}\big|_C \mid L \text{ 过 } P \text{ 点}\} \\
&= \{ \tfrac{aX+bY+cZ}{Z}\big|_C \mid b=0, a,c\in\mathbb{C}\} \\
&= \{ax+c \mid a,c\in\mathbb{C}, x=\tfrac{X}{Z}\big|_C\} \\
&= \mathbb{C}\langle 1,x\rangle
\end{aligned}
$$

类似地, $L(3P)=\mathbb{C}\langle 1,x,y\rangle, y=\frac{Y}{Z}\big|_C$.

$$
\begin{aligned}
L(6P) &= \{ \tfrac{Q}{Z^2}\Big|_C \mid \deg Q = 2, div(Q|_C) \geq 6P+6P \geq 0\} \\
&= \mathbb{C}\left\langle 1,x,y,x^2,xy,y^2\right\rangle
\end{aligned}
$$

$x^3\in L(6P)$, 但 $x^3=y^2-ax-b$.

$$
\begin{aligned}
div(x) &= div(\tfrac{X}{Z}\big|_C) = div(X|_C) - div(Z|_C) \\
&= P_1+P_2+P-3P \\
&= P_1+P_2-2P
\end{aligned}
$$

这里, $P_1=[0,\sqrt{6},1], P_2=[0,-\sqrt{6},1]$. $div(x^3)=3P_1+3P_2-6P$. ■

4.7 $L(D)$ 的基本性质

4.7.1 线性等价

定义 4.7.1 设 D_1,D_2 是 $\widetilde{C}$ 上的两除子. 如果 $D_1-D_2=div(\varphi)$, φ 是非零的有理函数. 则称 D_1 与 D_2 线性等价. 记为 $D_1\equiv D_2$.

引理 4.7.1 若 $D_1\equiv D_2$, 则 $\deg D_1=\deg D_2$.

证明 根据 $\deg(D_1+D_2)=\deg D_1+\deg D_2$, $D_1=D_2+div(\varphi)$. 则

$$\deg D_1 = \deg D_2 + \deg div(\varphi)$$

引理得证. ■

引理 4.7.2 设 $D_1\equiv D_2$, 则 $l(D_1)=l(D_2)$.

证明 设 $D_1=D_2+div(\varphi_0)$, $\varphi_0\neq 0$.从而

$$D_1+div(\varphi)\geq 0 \Longleftrightarrow D_2+div(\varphi\varphi_0)\geq 0$$

由此知

$$
\begin{aligned}
\pi_1: L(D_1) &\longrightarrow L(D_2) \\
\varphi &\longmapsto \varphi\varphi_0
\end{aligned}
$$

同理

$$D_2+div(\psi)\geq 0 \Longleftrightarrow D_1+div(\psi\varphi_0^{-1})\geq 0$$

由此知

$$\begin{aligned}\pi_2 : L(D_2) &\longrightarrow L(D_1)\\ \psi \quad &\longmapsto \varphi\varphi_0^{-1}\end{aligned}$$

π_1 与 π_2 互逆且线性. 故 $L(D_1) \cong L(D_2)$. 所以 $l(D_1) = l(D_2)$. ■

引理 4.7.3 设 $L(D) \neq 0$, 则存在有效除子 $E \geq 0$, 使得 $D \equiv E$.

证明 取 $\varphi \in L(D), \varphi \neq 0$. 则 $div(\varphi) + D \geq 0$. 令 $E = div(\varphi) + D$, 则 $E \equiv D$. ■

引理 4.7.4 $L(0) = \mathbb{C}$.

引理 4.7.5 设 $D \leq D'$, 则 $L(D) \subseteq L(D')$. 从而 $l(D) \leq l(D')$.

证明 显然 $D' = D + E, E \geq 0$. 若 $\varphi \in L(D), \varphi \neq 0$. 则

$$div(\varphi) + D \geq 0 \Longrightarrow div(\varphi) + D + E \geq 0$$

即 $div(\varphi) + D' \geq 0$, 所以 $\varphi \in L(D')$. ■

4.7.2 $L(D)$ 的简单性质

引理 4.7.6 对于任意的 $p \in \widetilde{C}$, 有 $0 \leq l(D+p) - l(D) \leq 1$.

证明 根据引理 4.7.5, $L(D) \subseteq L(D+P)$. 取 $\varphi_1, \varphi_2 \in L(D+P) - L(D)$. 设 $D = n_pP + D'$, D' 不含 P.

$$\begin{cases} div(\varphi_i) + D + P \geq 0, & i = 1,2 \\ div(\varphi_i) + D \ngeq 0, & i = 1,2 \end{cases} \quad \begin{cases} div(\varphi_i) + D' + (n_p+1)P \geq 0, & i = 1,2 \\ div(\varphi_i) + D' + n_pP \ngeq 0, & i = 1,2 \end{cases}$$

这说明 $\nu_P(\varphi_i) = -n_p - 1, i = 1, 2$. 设 $\psi = \varphi_1/\varphi_2$, 则 $\nu_P(\psi) = 0$. 设 $\lambda = \psi(P) \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$. 令

$$\varphi_0 = \varphi_1 - \lambda\varphi_2 = (\psi - \lambda)\varphi_2$$

则有

$$\nu_P(\varphi_0) = \nu_P(\psi - \lambda) + \nu_P(\varphi_2) \geq 1 + (-n_p - 1) = -n_p, \quad \varphi_0 \in L(D+P)$$

若 $\varphi_0 \in L(D+P) - L(D)$, 则 $\nu_P(\varphi_0) = -n_p - 1$. 这是矛盾的. 所以 $\varphi_0 \in L(D)$. 从而

$$L(D+P) \subseteq L(D) + \mathbb{C}\varphi_2$$

故 $l(D+p) \leq l(D) + 1$. ■

引理 4.7.7 若 $D \leq D'$, 则 $0 \leq l(D') - l(D) \leq \deg D' - \deg D$.

证明 设 $D' = D + E$, $E = P_1 + \cdots + P_k$. 则

$$\begin{aligned} l(D') &\leq l(D + P_1 + \cdots + P_{k-1}) + 1 \\ &\leq l(D + P_1 + \cdots + P_{k-2}) + 2 \\ &\vdots \\ &\leq l(D) + K \end{aligned}$$

因此, $k = \deg E = \deg D' - \deg D$. ■

令 $S(D)=\deg D+1-l(D)$.

引理 4.7.8 设 $D\leq D'$, 则 $S(D)\leq S(D')$.

引理 4.7.9 若 $l(D)>0$, 则 $|\{P\in\widetilde{C}\mid l(D-P)=l(D)\}|<\infty$.

证明 取 $\varphi\in L(D),\varphi\neq 0$. 则 $E=div(\varphi)+D\geq 0$. 设 $E=n_1P_1+n_2P_2+\cdots+n_rP_r$. 如果 $L(D)=L(D-P)$, 则 $\varphi\in L(D-P)$, 从而

$$div(\varphi)+D-P\geq 0,\quad E-P\geq 0$$

所以 $P\in\{P_1,\cdots,P_r\}$. 故 $|\{P\in\widetilde{C}\mid l(D-P)=l(D)\}|\leq r$. ■

引理 4.7.10 若 $\deg D>0$, 则 $l(D)\leq\deg D+1$. 即 $S(D)\geq 0$.

证明 设 $l(D)>0$, 否则是平凡的. 所以 $D\equiv E\geq 0,\quad \deg D=\deg E,\quad l(D)=l(E)$. 所以可以用 E 代替 D, 即可设 $D=P_1+P_2+\cdots+P_k\geq 0$. $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 可能相同. 从而

$$l(D)\leq l(P_1+P_2+\cdots+P_{k-1})+1\leq l(0)+k=k+1=\deg D+1$$

证毕. ■

因此 $S(D)$ 性质更好.

4.7.3 例子

设 $L_\infty\cap C=\{P_1,P_2,\cdots,P_d\}$, d 个不同的点, 令 $P=P_1+P_2+\cdots+P_d,E=\sum\limits_{i=1}^{r}(E_i+E_i')$, 定义

$$E_m\overset{\triangle}{=}mp-E,\deg E_m=md-2r$$

$L(E_m)$ 有公分母 $G_0=Z^m$, $div|\,G_0|_{\widetilde{C}}\,|=mP$

$$L(E_m)=\{\left.\frac{H}{Z^m}\right|_{\widetilde{C}}\mid div(H|_{\widetilde{C}})\geq E\}=\{\left.\frac{H}{Z^m}\right|_{\widetilde{C}}\mid H(Q_i)=0,i=1,2,\cdots,r\}$$

$\sigma^{-1}(Q_i)=\{E_i,E_i'\}$. 令

$$V_m=\{H\mid H\text{ 齐次},\deg H=m,H(Q_i)=0,i=1,2,\cdots,r\},\quad \dim V_m\geq\frac{(m+2)(m+1)}{2}-r$$

考虑映射

$$\begin{array}{ccccccc}0\longrightarrow\ker\rho\longrightarrow & V_m & \xrightarrow{\rho} & L(E_m)\longrightarrow 0\\ & H & \longmapsto & \left.\frac{H}{G_0}\right|_{\widetilde{C}}\end{array}$$

$H\in\ker\rho\Longleftrightarrow F\mid H$. 所以

$$\ker\rho=\begin{cases}0, & m<d\\ W_{m-d}F, & m\geq d\end{cases}$$

W_{m-d} 是次数为 $m-d$ 的齐次多项式. 所以

$$\dim\ker\rho=\begin{cases}0, & m<d\\ \frac{(m-d+2)(m-d+1)}{2}, & m\geq d\end{cases}$$

引理 4.7.11 如果 $m \geq r-1$, 则 r 个条件 $H(Q_i)=0, i=1,2,\cdots,r$. 关于 W_m 是线性独立的. 即

$$\dim V_m = \dim W_m - r$$

证明 只要证明 $H(Q_i)=0, i=1,2\cdots,r$ 去掉任何一个方程, 解空间增大. 即对于任意的 i, 存在 H_i 使得 $H_i(Q_i)\neq 0$. $H_i(Q_j)=0, j\neq i$. 设 L_i 是过 Q_i 的直线, 不过其它的 Q_j.

设 G_{m-r+1} 是任意一般的 $m-r+1$ 次齐次多项式, 不过任何 Q_i. 则

$$H_i = L_1\cdots L_{i-1}L_iL_{i+1}\cdots L_rQ_{m-r+1}$$

满足条件. 所以上线性条件线性独立. ∎

推论 4.7.1 令 $g=\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}-r$, 则当 $m\geq d, m\geq r-1$ 时, $l(E_m)=\deg E_m - g+1$, 即 $S(E_m)=g$.

证明 我们考虑以下等式,

$$\begin{aligned} l(E_m) &= \dim V_m - \dim W_{m-d} \\ &= \tfrac{(m+2)(m+1)}{2} - r - \tfrac{(m-d+2)(m-d+1)}{2} \\ &= \deg E_m - g + 1 \end{aligned}$$

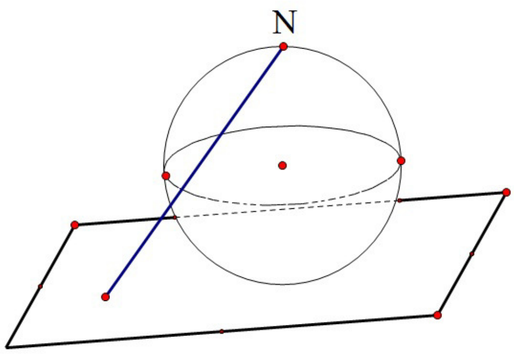
证毕. ∎

4.8 Riemann-Roch 定理

4.8.1 亏格公式

设 C 是 $\mathbb{P}^2$ 中带有 r 个结点的 d 次不可约曲线. $\sigma:\widetilde{C}\to C$ 为正规化.

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}\approx S^2 \text{ 球面}$$



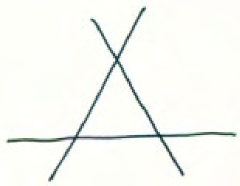
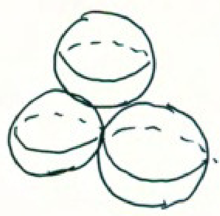
当 C 是光滑曲线时, 利用原理: C 可退化成 d 条一般位置的直线.

例 4.8.1

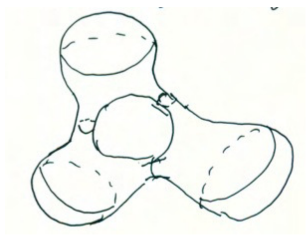
$$C_\lambda : X^3+Y^3+Z^3-3\lambda XYZ=0$$

(1) $\lambda^3\neq 1,\infty$ 时, C_λ 光滑;

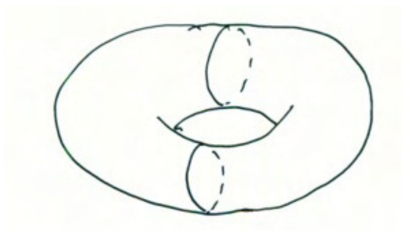
(2) $\lambda^3 = 1,\infty$ 时, C_λ 为三条直线. ∎

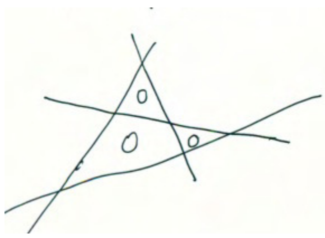
$\lambda = \lambda_0, \lambda_0^3 = 1, \infty$. $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$. C_λ 的图形与 C_{λ_0} 的图形连续形变. C_λ 如下图所示:



C_λ 为一个洞的环面.



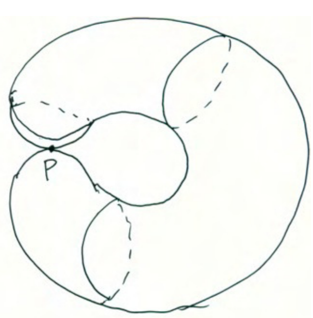
当 $d = 4$ 时:

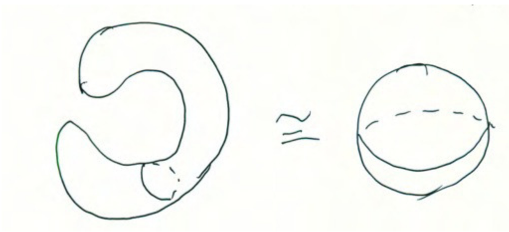
d 次光滑的复图形是有

$$g = 1 + 2 + \cdots + (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

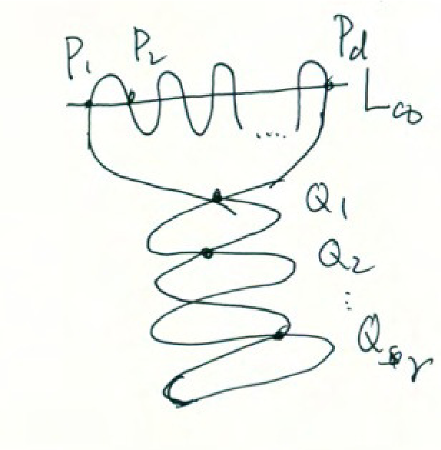
个洞的闭曲面. 若 C_λ 有 r 个奇点. 以 $d = 3, r = 1$ 举例:



正规化 $\widetilde{C_\lambda}$ 就是将 P 点拉开.



一个奇点减少了一个洞.



$$P+P_1+\cdots+P_d,\quad E=\sigma^{-1}\{Q_1,\cdots,Q_r\},\quad E_m=mP-E,\quad K=E_{d-3}$$

$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-r$. 上图即为几何亏格. $\deg K=(d-3)d-2r=2g-2$.

$$\begin{aligned} l(K)&=\dim V_{d-3}\\ &=\dim\{H\in W_{d-3}\mid H(Q_i)=0,i=1,2,\cdots,r\}\\ &\geq \dim W_{d-3}-r\\ &=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-r=g\end{aligned}$$

引理 4.8.1　(1) $\deg K=2g-2$; (2) $l(k)\geq g$.

4.8.2　Riemann-Roch **定理**

以下令 $S(D):=\deg D+1-l(D)$.

定理 4.8.1　对 $\widetilde{C}$ 上的任何除子 D,

$$l(D)=\deg D+1-g+l(K_D)\qquad(*)_D$$

或

$$S(D)+l(K-D)=g\qquad(**)_D$$

这里, $S(D):=\deg D+1-l(D)$.

证明步骤:

(1) $\deg D\geq 0\Longrightarrow S(D)\geq 0$. 已证.

(2) $D \leq D' \Longrightarrow S(D) \leq S(D')$. 已证.

(3) $m \geq d, m \geq r-1 \Longrightarrow S(E_m) = g$. 已证.

(4) 对于任意的 D, 存在 $m \gg 0$ 以及 $D_m \equiv E_m$ 使得 $D_m \geq D$, 从而

$$S(D) \leq S(D_m) = g$$

(5) 存在 N, 使得对于任意的 D, $\deg D \geq N$, 有 $S(D) = g$.

(6) Noether 归纳法

$$(*)_D \text{ 成立} \Longleftrightarrow (*)_{D-P} \text{ 成立}$$

我们首先证明 (4).

证明　再分 5 步证明 (4).

第 1 步: 只要证明 $m \gg 0$ 时, $l(E_m - D) > 0$. 取 $\varphi \in L(E_m - D)$, 则

$$D_m = div(\varphi) + E_m - D \geq 0$$

即 $D_m \geq D$, 所以 $S(D) \leq S(D_m)$. 即 $S(D) \leq S(D_m) = S(E_m) = g$.

第 2 步: 归结为 $D \geq 0$ 的情形. 设 $D = D^+ - D^-$, 则

$$L(E_m - D) = L(mP - E - D^+ + D^-) \supseteq L(mP - E - D^+)$$

第 3 步: 归结为 $E + D$ 是既约除子. 既任何点前面的系数都为 1. 存在 n 和既约除子 D' 使 $E + D \leq nD'$. 如果 $L(mP - D') \neq 0$, 则取 $0 \neq \varphi \in L(mP - D')$. 从而

$$L(E_{mn} - D) = L(mnP - E - D) \supseteq L(mnP - nD') \ni \varphi^n \neq 0$$

此时, $D' \geq E$.

第 4 步: 设 $E + D$ 是既约的.

$$\begin{aligned} L(E_m - D) &= L(mP - E - D) \\ &= \{ \tfrac{H}{Z^m}\big|_{\widetilde{C}} \mid div(H) \geq E + D\} \\ &= \{ \tfrac{H}{Z^m}\big|_{\widetilde{C}} \mid H \text{ 在 } r \text{ 个奇点 } Q_1, \cdots, Q_r \text{ 和 } D \text{ 上为 } 0\} \end{aligned}$$

$m > r + \deg D$ 时, 显然存在 m 次齐次多项式 $H \neq 0$ 在 $Q_1, \cdots, Q_r$ 和 D 上为零. 即

$$0 \neq \varphi \in L(E_m - D) \neq 0$$

第 5 步: $div(\varphi) + E_m - D \geq 0, \varphi \neq 0$. 定义

$$D_m \stackrel{\triangle}{=} div(\varphi) + E_m \geq D, \quad D_m \equiv E_m$$

因此 $S(D) \leq S(D_m) = S(E_m) = g$. ■

(5) 的证明.

证明　选取 D_0, 使得 $S(D_0) = g$. (如 $D_0 = E_m, m \gg 0$). 令

$$N = \deg D_0 + g$$

设 $\deg D \geq N$, 则 $\deg(D-D_0)+1-g \geq 1$.

$$S(D-D_0)=\deg(D-D_0)+1-l(D-D_0)\leq g$$

所以

$$l(D-D_0)\geq \deg(D-D_0)+1-g\geq 1$$

即存在 $\varphi \in L(D-D_0)$, $\varphi \neq 0$. $D-D_0+div(\varphi)\geq 0$. $D'=D+div(\varphi)\geq D_0$, $D'\equiv D$. 所以

$$S(D)=S(D')\geq S(D_0)=g$$

又因为 $S(D)\leq g$, 所以 $S(D)=g$. 即对于任意的 $D:\deg D\geq N$, 有 $S(D)=g$. ■

我们在证明 (6) 之前, 我们给出如下引理.

引理 4.8.2 设 $p\in \widetilde{C}-E$, $l(D)>0$, $l(K-D-P)=l(K-D)-1$. 则 $l(D+P)=l(D)$.

(6) 的证明:

证明 涉及到 4 个向量空间.

$$L(K-D)\supset L(K-D-P),\quad L(D)\subset L(D+P)$$

条件: 存在 $\varphi\in L(K-D)-L(K-D-P)$, 使得

$$K-D=E_{d-3}-D=(d-3)P-E-D$$

引理的条件中,

$$l(D)>0 \Longrightarrow D\equiv E\geq 0$$

又条件和结论只与 D 的线性等价类有关. 故可设 $D\geq 0$. $\varphi\in L(K-D)-L(K-D-P)$. $l(K-D)>0$, 所以 $K\equiv E\geq 0$. $2g-2\geq 0, d\geq 3$. 因此 Z^{d-3} 可作为 $L(K-D)$ 的公分母.

$$\varphi=\left.\frac{H}{Z^{d-3}}\right|_C\in L(K-D)\Longleftrightarrow div(H|_{\widetilde{C}})\geq E+D \qquad (1)$$

若另外, $\varphi\notin L(K-D-P)$. 则

$$div(H|_{\widetilde{C}})\not\geq E+D+P \qquad (2)$$

记:

$$div(H|_{\widetilde{C}})=E+D+A,\quad A\geq 0$$

但 $p\notin A$, 下说明: 上述 H 可作为 $L(D+P)$ 的公分母. $l=d-\deg H=3\geq 3$.

$$R_1=P\notin E,\quad R_1\in\widetilde{C}-E,\quad div(G|_{\widetilde{C}})\geq E+D^+,\quad D^+=D$$

从而 H 可作为 $L(D+P)$ 的公分母. 若 $f\in L(D+P)-L(D)$, 则 $f=\left.\frac{H'}{H}\right|_{\widetilde{C}}$.

$$div(H'|_{\widetilde{C}})\geq div(H|_{\widetilde{C}})-D-P=E+A-P \qquad (3)$$

$P\notin E, P\notin A$. 由于 $div(H'|_C)$ 是有效除子. 故自动有

$$div(H'|_{\widetilde{C}})\geq E+A$$

这说明 $f\in L(D)$. 矛盾. 所以这样的 f 不存在. 故 $L(D+P)=L(D)$. ■

推论 4.8.1 $(*)_D$ 成立 $\Longleftrightarrow$ $(**)_{D+P}$ 成立.

证明　在 $(*)_D$ 公式中, 用下替换.

$$l(D) = l(D+P), \quad l(K-D) = l(K-D-P)+1$$

则得 $(*)_{D+P}$. 反之亦然. ■

注 4.8.1 推论 4.8.1 的条件: $P \notin E, l(D) > 0, l(K-D-P) = l(K-D) - 1$. ■

引理 4.8.3 $(*)_D$ 与 $(*)_{K-D}$ 等价.

证明　因为 $\deg K = 2g-2$.

$$l(D) = \deg D + 1 - g + l(K-D) \qquad (*)_D$$

$$l(K-D) = \deg(K-D) + 1 - g + l(D) \qquad (*)_{K-D}$$

$(*)_D$ 与 $(*)_{K-D}$ 是同一等式. ■

现在我们来证明定理 4.8.1

证明　情形 1: $l(K-D) = 0$ 时, 归纳法无效. 对 $l(D)$ 作归纳.

(1) 若 $l(D) = 0$: $S(D) = \deg D + 1 - l(D) \leq g$, $\deg D \geq g-1$. 又

$$S(K-D) = \deg K - \deg D + 1 - l(K-D) = 2g-2-\deg D + 1 \leq g$$

且 $\deg D \geq g-1$, 故 $\deg D = g-1$. 所以 $(*)_D$ 成立.

(2) 若 $l(D) = 1$: 可设 $D \geq 0$.

$$\deg D = \deg D + 1 - l(D) = S(D) \leq g$$

另一方面,由

$$g \leq l(K) = l(K-D+D) \leq l(K-D) + \deg D = \deg D$$

所以 $\deg D = g, (*)$ 成立.

(3) 若 $l(D) = 2$: 只有有限个点使得 $l(D-P) = l(D)$. 故可设 $P \in \widetilde{C} - E$ 使得

$$l(D-P) = l(D) - 1, \qquad l(D-P) = l((D-P)+D) - 1$$

根据引理 4.8.2, 此时, 由 $D-P$ 代替 D. 则知 $l(K-D) = l(K-D+P)$. 由于 $l(D-P) < l(D)$, 则可设 $(*)_{D-P}$ 成立. 即

$$l(D-P) = \deg(D-P) + 1 - g + l(K-D+P)$$

所以 $l(D) - 1 = \deg D - g + l(K-D)$, $l(D) = \deg D + 1 - g + l(K-D)$. $(*)_D$ 成立.

情形 2: $l(K-D) > 0$. 此时

$$\deg(K-D) = 2g-2-\deg D \geq 0, \quad \deg D \leq 2g-2$$

如果 $\deg D > 2g-2$, 则 $l(K-D)$ 归结为情形 1. 除子关于"$\leq$" 的偏序集

$$\{D \mid (*)_D \text{ 不成立}\}$$

是有界的. 这是因为 $\deg D \leq 2g-2$. 现在选取 D 为偏序集中的极大元. $P \in \widetilde{C} - E$, 充分一般, 使得

$$l(K-D-P) = l(K-D) - 1$$

则由引理 4.8.2, $l(D+P) = l(D)$. 又知 $(*)_{D+P}$ 成立. 因此

$$l(D+P) = \deg D + 1 + 1 - g + l(K-D-P)$$

$$l(D) = \deg D + 2 - g + l(K-D) - 1 = \deg D + 1 - g + l(K-D)$$

所以 $(*)_D$ 也成立, 矛盾. 所以上集合为空集. 至此定理证毕. ■

推论 4.8.2 $\deg K = 2g-2 \Longrightarrow l(K) = g$.

推论 4.8.3 若 $\deg D \geq 2g-1 (> \deg K)$, 则 $l(K-D) = 0$. 从而 $l(D) = \deg D + 1 - g$.

推论 4.8.4 $\deg D \geq 2g \Longrightarrow \forall\, p \in \widetilde{C}$, 有 $l(D-P) = l(D) - 1$.

推论 4.8.5 $\deg D \geq 2g+1 \Longrightarrow \forall\, P, Q \in \widetilde{C}$, 则 $l(D-P-q) = l(D) - 2$.

4.9 线性系与有限映射

1. 设 C 是任何亏格 g 的射影曲线.

定义 4.9.1 D 是 C 上的除子, $n = l(D) > 0$. $L(D) = \mathbb{C}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_n \rangle$. 则可定义线性系

$$|D| = \{D + div(\varphi) \geq 0 \mid \varphi \in L(D) - (0) = L(D)^*\}$$

命题 4.9.1 (1) $|D|$ 中的元都是有效除子.

(2) $E \in |D|$, 则 $E \equiv D$. 且 $|D| = \{E \geq 0 \mid E \equiv D\} = \mathbb{C}(L(0)) = \mathbb{P}^{n-1}$.

证明　若 $E \geq 0, E \equiv D$, 则存在 φ 使得

$$E = D + div(\varphi)$$

对于任何除子 $D' \equiv D$, 有 $|D'| = |D|$. 考虑映射

$$\begin{aligned} L(D)^* &\longrightarrow |D| \\ \varphi &\longmapsto D + div(\varphi) \end{aligned}$$

这是满射, 若 $D + div(\varphi_1) = D + div(\varphi_2)$. 则

$$\Longleftrightarrow div(\varphi_1) = div(\varphi_2) \Longleftrightarrow div(\varphi_1 \varphi^{-1}) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_1 = \lambda \varphi_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

所以 $|D| = \mathbb{P}(L(0)) = \mathbb{P}^{n-1}$ ■

2. 设 $\varphi \in L(D), \varphi \neq 0$. 记 $D_\varphi = D + div(\varphi) \geq 0$. 则

$$L(D_\varphi) = L(D)\varphi^{-1} \supseteq \mathbb{C}$$

固定 $L(D)$ 的基 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$. 则可定义一个有理映射

$$\begin{aligned} \Phi: \quad & C \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ & p \longmapsto [\varphi_1(p), \cdots, \varphi_n(p)] \end{aligned}$$

由于 C 光滑, $\mathbb{P}^{n-1}$ 射影. 则知 φ 可唯一地扩充为态射. 但 Φ 无定义的点是 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 的极点和公共零点. 这只有有限个点. 若 $D' \equiv D$, 则 $D' = D + div(\varphi)$. 从而$L(D') = L(D)\varphi^{-1}$. 故 $\Phi_{D'}$ 由 $\varphi_1\varphi^{-1}, \cdots, \varphi_n\varphi^{-1}$ 定义. 从而知除有限个点外 $\Phi_D(D) = \Phi_{D'}(D)$. 因此扩充为 $C \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ 的态射之后, 是同一态射.

当 $D \geq 0$ 时, $C \subset L(D)$, 故 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 无公共零点. 从而无定义的点只有它们的极点. 从而全落在 D 之上.

引理 4.9.1 当 $D \geq 0$ 时, Φ_D 无定义的点都落在 D 上.

定义 4.9.2 如果对于任意的 $E \in |D|, p \leq E$, 则称 $p \in C$ 称为是 $|D|$ 的基点.

定义 4.9.3 若 $|D|$ 有基点, 则存在最大的有效除子 $Z > 0$ 使得对于任意的 $E \in |D|$, 都有 $E \geq Z$, 把 Z 称为 $|D|$ 的固定部分.

$D \geq 0$, $D = D' + Z, E = E' + Z$, $|D| = |D'| + Z$. $|D'|$ 无基点. 因为 $L(D') \subset L(D)$, $\dim|D| = \dim|D'|$. 所以 $L(D') = L(D)$. 因此考虑集合

$$\Phi_{|D|} = \{\Phi_E \mid E \in |D|\}$$

则知当 $|D|$ 无基点时, 对于任意的 $p \in C$, 都存在 $E \in |D|$ 使得 Φ_E 在 P 点有定义.

我们把 $\Phi_{|D|}$ 看成 $C \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ 的一个映射. 它是所有 Φ_E 有定义的点的并集, 即 $\Phi_{|D|}$ 是 Φ_E 粘合成的一个映射. 当 $|D|$ 无基点时, $\Phi_{|D|}$ 处处有定义, 为态射.

定理 4.9.1 设 $|D| \neq \emptyset$, 即 $l(D) > 0$. 则 $|D|$ 无基点 $\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $P \in C, h^\circ(D-P) = h^\circ(D) - 1$.

证明 若 $|D|$ 有基点 p, 则显然 $|D| = |D-p| + p$, 所以 $h^\circ(D) = h^\circ(D-p)$. 反之, 若 $|D|$ 无基点, 则 $|D-p| + p \subsetneq |D|$. ■

3. $\Phi_{|D|}$ 为单射的判别

定理 4.9.2 设 $|D|$ 无基点, 对于任意的 $p, q \in C$, 有 $h^\circ(D-p-q) = h^\circ(D) - 2$. 则 $\Phi_{|D|}$ 为单射.

证明 因为 $|D|$ 无基点, 因此存在 $E \in |D|.p \notin E, q \notin E$. Φ_E 在 p, q 点有定义.

$$L(E-p-q) \subsetneq L(E-p) \subsetneq L(E)$$

故取 $\varphi_n = 1, \varphi_{n-1} \in L(E-p) - L(E-p-q)$,

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2} \in L(E-p-q), \quad div(\varphi_i) + E - p - q \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n-2$$

知 $\varphi_i(p)=\varphi_i(q)=0, i=1,2,\cdots,n-2$. 同理, $\varphi_{n-1}=0$, $\varphi_{n-1}(q)\neq 0$. 故

$$\Phi_{|D|}(p)=\Phi_E(p)=[0,\cdots,0,0,1],\quad \Phi_{|D|}(q)=\Phi_E(q)=[0,\cdots,0,\Phi_{n-1}(q),1]\neq 0$$

所以 $\Phi_{|D|}(p)\neq\Phi_{|D|}(q)$, 所以 $\Phi_{|D|}:C\longrightarrow\mathbb{P}^{n-1}$ 为单射. ■

4. $\Phi_{|D|}$ 为到像的同构的判别.

定理 4.9.3 设 $|D|$ 无基点, 且满足:

(1) 对于任意的 $p,q\in C, p\neq q$, 有 $h^\circ(D-p-q)=h^\circ(D)-2$;

(2) 对于任意的 $p\in C$, $h^\circ(D-2p)=h^\circ(D)-2$.

则 $\Phi_{|D|}:C\hookrightarrow\mathbb{P}^{n-1}$ 是到像的同构.

证明 已知 $\Phi_{|D|}$ 是单的态射. 只要证明 $\Phi_{|D|}$ 在任何点 p 处的微分是非零即可. 由条件, 取 $E\in|D|, p\notin E$. 则知 $\Phi_{|D|}(p)=\Phi_E(p)$.

$$L(D-2p)\subsetneq L(D-p)\subsetneq L(E)$$

又因为

$$\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2}\in L(E-2p),\quad \varphi_{n-1}\in L(E-p)-L(E-2p),\quad \varphi_n=1\in L(E)$$

则 $\Phi_E(p)=[0,\cdots,0,1]\in\mathbb{P}^{n-1}$ 为在通常空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的原点.

$$\nu_p(\varphi_i)=\begin{cases}\geq 2,\ i=1,2,\cdots,n-2\\ 1,\quad i=n-1\\ 0,\quad i=n\end{cases}\qquad n_i\triangleq\nu_p(\varphi_i)$$

设 $z\in\mathcal{O}_{C,p}^{a_n}$ 为极大理想的生成元, z 可作为 p 点附近的解析坐标. 从而 $z(p)=0$.

$$\varphi_i=z^{n_i}\varphi_i',\quad \varphi_i'(p)\neq 0$$

考虑 $\varphi_n=1,\varphi_n'=1$.

$$\frac{\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}{\partial(z)}(p)=(0,\cdots,0,\varphi_{n-1}'(0))\neq 0$$

故知 $\Phi_{|D|}$ 在 p 附近是到像的解析同构. 从而 $\Phi_{|D|}$ 是到像的同构映射. ■

定义 4.9.4 (1) 若对于任意的 $p\in C$, 有 $h^\circ(D-p)=h^\circ(D)-1$. 则称 D 或 $|D|$ 无基点.

(2) 若对于任意的 $p,q\in C$ 都有 $h^\circ(D-p-q)=h^\circ(D)-2$. 则称 D 或者 $|D|$ 非常丰富 (very much).

命题 4.9.2 D 非常丰富 $\Longleftrightarrow\Phi_{|D|}$ 是到像的同构映射. $|D|$ 中的元都是超平面截口.

定理 4.9.4 C 为亏格 g 的光滑射影曲线.

(1) 当 $\deg D\geq 2g-1$ 时, $l(K-D)=0, l(D)=\deg D+1-g$;

(2) 当 $\deg D\geq 2g$ 时, $|D|$ 无基点;

(3) 当 $\deg D \geq 2g+1$ 时, $|D|$ 非常丰富.

证明 (1) $\deg D \geq 2g-1$ 时, $\deg(K-D) < 0$. 从而 $h^{\circ}(K-D) = 0$. (2)(3) 可由 (1) 的公式证明. ■

定理 4.9.5 若 $g=0$, 则 $C \cong \mathbb{P}^1$.

证明 取 $D = p \in C$, 则 $\deg D \geq 2g+1$. 所以 $|D|$ 是非常丰富的.

$$h^{\circ}(D) = \deg D + 1 - g = 2$$

故 $\Phi_{|D|} : C \simeq \mathbb{P}^1$. ■

定理 4.9.6 若 $g=1$, 则 C 同构于平面 3 次光滑曲线.

证明 取 $D = 3p, p \in C$. 则 $\deg D = 3 \geq 2g+1$. 从而 $|D|$ 非常丰富. 又因为

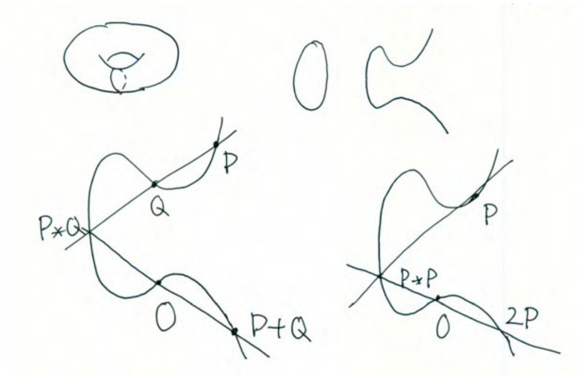
$$h^{\circ}(D) = \deg D + 1 - g = 3$$

因此, 映射 $\Phi_{|D|} : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$, $\deg \Phi_{|D|}(C) = \deg D = 3$. ■

4.10 椭圆曲线的分类

4.10.1 椭圆曲线上的群结构

设 $g = 1 : C : y^2 = x^3 + ax + b, 4a^3 + 27b^2 \neq 0$. 固定 $O \in C$, 定义 $P + Q := (P * Q) * O$.



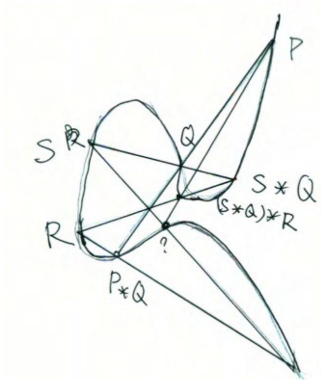
定理 4.10.1 $(C, +)$ 构成一个交换群.

引理 4.10.1 (1) $P * Q = Q * P$;

(2) $(P * Q) * P = (Q * P) * P = Q$;

(3) $((P * Q) * R) * S = ((S * Q) * R) * P$;

证明 (1)(2) 直接由定义可知:



$$C_1 = L_1 + L_2 + L_3, \quad C_2 = L_1' + L_2' + L_3'$$

$C_1 \cap C_2$ 交于 9 个点. $C_3 = C$ 过 8 个点. 所以 C 过第 9 个点. 即

$$((P * Q) * R) * S = ((S * Q) * R) * P$$

证毕. ■

现在我们给出定理 4.10.1 的证明.

证明 (1) O 为零元: $P + O = (P * O) * O = P$;

(2) 交换性的证明是平凡的;

(3) 负元的存在性: $-P = P * (O * O)$,

$$P + P * (O * O) = (P * (P * (O * O))) * O = (O * O) * O = O \text{ 零元}$$

(4) 结合性: $(P + Q) + R = (P * Q) * O + R = (((P * Q) * O) *) * O$, 因此

$$\begin{aligned} P + (Q + R) &= P + (Q * R) * O \\ &= (P * ((Q * R) * O)) * O \\ &= (((Q * R) * O) * P) * O \\ &= (((R * Q) * O) * P) * O \\ &= (((P * Q) * O) * R) * O \\ &= (P + Q) + R \end{aligned}$$

至此, 证毕. ■

4.10.2 三次曲线的几何

定理 4.10.2 设 $\emptyset \in C$ 为一个拐点. $\emptyset * \emptyset = \emptyset$. 则有:

(1) $P, Q, R \in C$ 共线 $\Longleftrightarrow P + Q + R = 0$;

(2) P 为拐点 $\Longleftrightarrow 3P = 0$;

(3) P, Q, R 共线. 若 P, Q 为拐点, 则 R 也为拐点;

(4) $P \neq \emptyset$, 则 $2P = 0 \Longleftrightarrow \overline{PQ}$ 是 C 在 P 点的切线.

证明 (1) $P+Q+R=0 \Longleftrightarrow P=-(Q+R)$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow P &= (Q+R)*(\varnothing*\varnothing)\\ &= (Q+R)*\varnothing\\ &= ((Q*R)*\varnothing)*\varnothing\\ &= Q*R\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow P,Q,R$ 共线.

(2) $3P=0 \Longleftrightarrow P=P*P \Longleftrightarrow P$ 为拐点.

(3) P,Q,R 共线 $\Longrightarrow P+Q+R=0$. $R=-P-Q$. 因为 $3P=0$, $3Q=0$, 所以

$$3R=-3P-3Q=-\varnothing-\varnothing=0$$

所以 R 为拐点.

(4) $P+P=0 \Longleftrightarrow P=-P \Longleftrightarrow P=P*(\varnothing*\varnothing)=P*\varnothing \Longleftrightarrow T_p(C)=\overline{PQ}$ ■

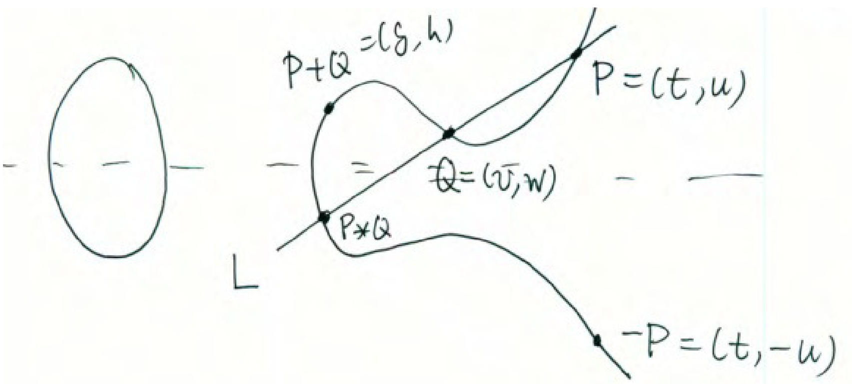
定理 4.10.3 设 $C: y^2=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$. $\varnothing=[0,1,0]$ 为 C 的拐点.

(1) $P=(t,u) \Longrightarrow -P=(t,-u)$;

(2) $P=(t,0) \Longrightarrow 2P=0$;

(3) $Q=(v,w), P=(t,u), Q\neq -P$, 则 $P+Q=(g,h)$ 的坐标为

$$\begin{cases} g=m^2-a_1-t\\ h=m(t-g)-u\end{cases}\qquad 其中, m=\begin{cases}\frac{u-w}{t-v}, & P\neq Q\\ \frac{3t^2+2a_1t+a_2}{2u}, & P=Q\end{cases}$$



证明

先求 L 的斜率 m, 再解方程

$$\begin{cases} y-u=m(x-t), & (1)\\ y^2=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & (2)\end{cases}$$

(1) 代入 (2) 化为 x 的一个三次方程. 已知方程的两个解

$$x_1=t,\quad x_2=v$$

求出第 3 个解. 得 $P*Q$ 的坐标 $(g,-h)$. 所以可得 $P+Q$ 的坐标 (g,h). ■

推论 4.10.1 若 $a_i\in\mathbb{Q}$, 则 C 上的有理点集 $C(\mathbb{Q})$ 组成一个有限生成的子群.

注 4.10.1 (1) C 中 n 阶元组成的子群同构于 $\mathbb{Z}_n \oplus 2$. 所以 3 阶元的子群同构于 $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. 故 C 上有 9 个拐点.

(2) 固定 Q 点, 则

$$\begin{aligned} \tau_Q : C &\longrightarrow C \\ P &\longmapsto P+Q \end{aligned}$$

这是一个同构映射.

(3) 费尔马问题是通过椭圆曲线解决的: $a^p+b^p=c^p, abc\neq 0$. 则 $y^2=x(x-a)(x+b)$.

(4) BSD 猜想是关于群 $C(\mathbb{Q})$ 的自由部分秩的刻画.

(5) 同余数问题可归结为 BSD 猜想. ■

例 4.10.1 设 $y^2=x^3+2x$, $P=(1,2)$, $2P=(\frac{1}{4},-\frac{1}{8})$, $3P=(\frac{121}{9},-\frac{1342}{27})$. ■

4.10.3 椭圆曲线的分类

命题 4.10.1 任何亏格为 1 的曲线同构于平面 3 次曲线.

$$C_{a,b}: y^2=x^3+ax+b, 4a^3+27b^2\neq 0$$

定义 4.10.1 称 $j=j(a,b)=\frac{4a^3}{4a^3+27b^2}$ 为 $C_{a,b}$ 的 $J-$不变量.

定理 4.10.4 下列条件等价:

(1) $C_{a,b}\cong C_{\bar{a},\bar{b}}$;

(2) $j(a,b)=j(\bar{a},\bar{b})$;

(3) 存在射影变换 $T:\mathbb{P}^2\simeq\bar{\mathbb{P}}^2$ 使得 $T(C_{a,b})=C_{\bar{a},\bar{b}}$;

(4) $Rat(C_{a,b})\cong Rat(C_{\bar{a},\bar{b}})$;

证明 (1) $\Longleftrightarrow$ (4) 证明是显然的, 因为光滑曲线双有理等价就是同构. (3) $\Longrightarrow$ (1) 证明是平凡的. 现在我们考虑

(1) $\Longrightarrow$ (2) : 设 $C_{a,b}\subset\mathbb{P}^n, C_{\bar{a},\bar{b}}\subset\overline{\mathbb{P}}^2$.

$$\varphi: C_{a,b}\cong C_{\bar{a},\bar{b}}$$

$P=[0,1,0], \bar{P}=[0,1,0]$ 为 $C_{a,b}, C_{\bar{a},\bar{b}}$ 的拐点. 令 $Q=\overline{P}-\varphi(P)$

$$\begin{array}{ccccc} C_{a,b} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & C_{\bar{a},\bar{b}} & \xrightarrow[\sim]{\tau_Q} & C_{\bar{a},\bar{b}} \\ P & \longmapsto & \varphi(P) & \longmapsto & \bar{P}=\varphi(P)+Q \end{array}$$

第一步: 可设 $\varphi(P)=\overline{P}$.

第二步: 考虑 $Rat(C_{\bar{a},\bar{b}})\xrightarrow[\sim]{\varphi^*} Rat(C_{a,b})$. 这里, $Rat(C_{\bar{a},\bar{b}})=\mathbb{C}(\bar{x},\bar{y}), Rat(C_{a.b})=\mathbb{C}(x,y)$.

$$L(2P)=\mathbb{C}\langle 1,x\rangle, L(3P)=\mathbb{C}\langle 1,x,y\rangle, L(6P)=\mathbb{C}\left\langle 1,x,y,x^2,xy,y^2\right\rangle$$

同构不改变零点和极点的重数,

$$L(2\bar{P})=\mathbb{C}\langle 1,\bar{x}\rangle, L(3\bar{P})=\mathbb{C}\langle 1,\bar{x},\bar{y}\rangle, L(6\bar{P})=\mathbb{C}\left\langle 1,\bar{x},\bar{y},\bar{x}^2,\bar{x}\bar{y},\bar{y}^2\right\rangle$$

显然, $\varphi^*: L(n\bar{P})\longrightarrow L(nP)$.

$$\varphi^*(\bar{x})\in L(2P)=\mathbb{C}\langle 1,x\rangle, \varphi^*(\bar{y})\in L(3P)=\mathbb{C}\langle 1,x,y\rangle$$

作为函数时:

$$\begin{cases}\varphi^*(\bar{x}) &= \alpha x+\beta \qquad (\alpha\neq 0)\\ \varphi^*(\bar{y}) &= \nu y+\delta x+\varepsilon \ (\nu\neq 0)\end{cases}$$

作为映射或是变换时:

$$\begin{cases}\bar{x} &= \alpha x+\beta\\ \bar{y} &= \nu y+\delta x+\varepsilon\end{cases} \qquad (1)$$

$C_{\bar{a},\bar{b}}$ 的方程: $\bar{y}^2=\bar{x}^3+\bar{a}x+\bar{b}$ 看成 $\mathbb{P}^2$ 上的方程, 则定义了 $C_{a,b}$.

$$y^2-x^3-ax-b=\lambda(\bar{y}^2-\bar{x}^3-\bar{a}\bar{x}-\bar{b}), \lambda\neq 0$$

上式理解为 $\bar{x},\bar{y}$. 用 (1) 代入之后.

$$y^2-x^3-ax-b=\lambda(\nu y+\delta x+\varepsilon)^2-\lambda(\alpha x+\beta)^3-\lambda\bar{a}(\alpha x+\beta)-\lambda\bar{b}$$

比较系数:

(1) $yx: 2\lambda\nu\delta=0\Longrightarrow\delta=0$. 这是因为 $\lambda\nu\neq 0$;

(2) $y: 2\lambda\nu\varepsilon=0\Longrightarrow\varepsilon=0$;

(3) $x^2: -3\lambda\alpha^2\beta=0\Longrightarrow\beta=0$.

$$\begin{cases}\bar{x} &= \alpha x,\\ \bar{y} &= \nu y\end{cases} \qquad \lambda=\frac{1}{\nu^2}$$

$$y^2-x^3-ax-b=\lambda(\nu^2y^2-\alpha^3x^3-\bar{a}\alpha x-\bar{b})$$

作替换 $\lambda=\frac{1}{\nu^2}$, 可得上式可化简为

$$y^2-\frac{\alpha^3}{\nu^2}x^2-\frac{\alpha}{\nu^2}\bar{a}x-\frac{\bar{b}}{\nu^2}$$

$$\begin{cases}\alpha^3 &= \nu^2\\ a &= \frac{\alpha}{\nu^2}\bar{a}\\ b &= \frac{1}{\nu^2}\bar{b}\end{cases}$$

易验证 $j(a,b)=j(\bar{a},\bar{b})$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $j(a,b)=j(\bar{a},\bar{b})$. 因此

$$\Longrightarrow\frac{b^2}{a^3}=\frac{\bar{b}^2}{\bar{a}^3}\Longrightarrow\frac{b^2}{\bar{b}^2}=\frac{a^3}{\bar{a}^3}$$

所以存在 $t\in\mathbb{C}^*$, 使得 $b=t^6\bar{b},\quad a=t^4\bar{a}$.

$$\overline{A}:\begin{cases} y=t^3\bar{y} \\ x=t^2\bar{x}\end{cases},\quad \text{则有 } T:\begin{cases} \bar{y}=\frac{y}{t^3} \\ \bar{x}=\frac{x}{t^2}\end{cases}$$

$$y^2-x^3-ax-b=t^6(\bar{y}^2-\bar{x}^3-\bar{a}\bar{x}-\bar{b})$$

从而 $T(C_{a,b})=C_{\bar{a},\bar{b}}$. 证毕. ■

定义 4.10.2 $\mathfrak{m}_1=\{$椭圆曲线$\}/\cong$. 则

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_1 &\simeq \quad \mathbb{C}\\ [C] &\longmapsto j(C)\end{aligned}$$

$[C_{a,b}]=[C]:j(C)=j(a,b)$. $\mathfrak{m}_1$ 称为椭圆曲线的模空间.

命题 4.10.2 已知 $\mathfrak{m}_g=\{C\mid g(C)=g\}/\cong$. 则 $\mathfrak{m}_g$ 是某射影代数簇的 Zariski 开集, 似射影簇. 它是不可约的, 且 $\dim\mathfrak{m}_g=3g-3,(g\geq 2)$.

4.11 典范映射

4.11.1 无基点的线性系定义的映射

设 C 是亏格 g 的光滑射影曲线. $D\geq 0$, $|D|$ 无基点. $n=l(D)\geq 2$. 考虑映射

$$\Phi_{|D|}:C\longrightarrow\Gamma\subset\mathbb{P}^{n-1}$$

设 $D=\sum\limits_{i=1}^{r}n_iP_i,\quad n_i>0$. 因 $|D|$ 无基点. 从而 $l(D-P_i)=l(D)-1$. 所以

$$L(D-P_i)\subsetneq L(D),\qquad i=1,2,\cdots,r$$

故 $\bigcup\limits_{i=1}^{r}L(D-P_i)\subsetneq L(D)$. 存在 $\varphi\in L(D)$ 使得

$$\varphi\notin L(D-P_i),\quad i=1,2,\cdots,r$$

即 $(\varphi)_0-(\varphi)_\infty+D\geq 0$. 但 $(\varphi)_0-(\varphi)_\infty+D-P_i\not\geq 0,\forall\, i$. $(\varphi)_\infty\leq 0$. 但对于任意的 $P_i,(\varphi)_\infty\not\leq D-P_i$. 即 $(\varphi)_\infty=D$.

引理 4.11.1 设 $|D|$ 无基点. 则充分一般的 $\varphi\in L(D),(\varphi)_\infty=D$.

设 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的齐次坐标为 $W_1,\cdots,W_n$ 且设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1},\varphi_n=1$ 为 $L(D)$ 的基. 则

$$\varphi_i=\Phi^*_{|D|}\Big(\frac{W_i}{W_n}\Big|_\Gamma\Big)=\frac{W_i}{W_n}\Big|_C$$

若 $\varphi=\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_n\varphi_n$, 则

$$\varphi_i=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iW_i}{W_n}\Bigg|_C$$

当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 充分一般时, 可设 $P:\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iW_i=0$ 不过 $P_\infty\cap\Gamma$. 且 $P\cap\Gamma$ 的个数达到极大, 记为 $\deg\Gamma$.

定义 4.11.1 $\Gamma \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 的次数定义为充分一般的超平面与 Γ 的相交点个数.

定义 4.11.2 $\Gamma \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 称为非退化, 如果 Γ 不含在任何超平面之中.

如果 Γ 非退化. 考虑相交重数, 则 $\deg \Gamma = \Gamma \cdot P$ 对任何超平面都成立.

引理 4.11.2 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in L(D)$ 为基. 则 $\Gamma = \Phi_{|D|}(C) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 非退化.

证明 若 Γ 退化, 含在超平面 $\lambda_1 W_1 + \cdots + \lambda_n W_n = 0$ 之中. 则对于任意的 $p \notin D$, 有

$$\lambda_1 \varphi_1(P) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(P) = 0$$

从而知 $\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_n \varphi_n$ 有无限多个零点, 它必为零函数. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 线性相关, 矛盾! ■

设 $|D|$ 无基点, $D \gg 0, n = l(D) \gg 2$. 因 $\Phi_{|D|}(C) = \Gamma$ 非退化. 故它必为曲线.

$$\Phi_{|D|} : C \xrightarrow{d:1} \Gamma \subset \mathbb{P}^{n-1}$$

已知 $\varphi_i = \Phi_{|D|}^*(\frac{W_i}{W_n}\Big|_\Gamma) = \frac{W_i}{W_n}\Big|_C$. 令

$$W = \{\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \cdots + \lambda_n W_n \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\}$$

则

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow L(D) \\ L &\longmapsto \frac{L}{W_n}\Big|_C \end{aligned}$$

设 $\Sigma \subset \Gamma$ 是如下点的集合:

(1) D 中的点;

(2) Γ 的奇点;

(3) $\Phi_{|D|}$ 的分歧轨迹中的点.

从而 Σ 为有限集.

取 $P : L = 0$ 为 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中充分一般的超平面. 则 P 不过 Σ 中的点, P 也不过 $P_\infty : W_n = 0$ 与 Γ 的交点. 从而 P 还与 Γ 相交于 $r = \deg \Gamma$ 个不同点 $Q_1, \cdots, Q_r$, 且

$$|\Phi_{|D|}^{-1}(Q_i)| = d = \deg \Phi_{|D|}, \quad \varphi = \frac{L}{W_n}\Big|_C = \Phi_{|D|}^*(\frac{L}{W_n}\Big|_\Gamma)$$

所以

$$(\varphi)_0 = \Phi_{|D|}^{-1}(\Gamma \cap P), \quad (\varphi)_\infty = \Phi_{|D|}^{-1}(\Gamma \cap P_\infty) = D$$

$$\deg D = \deg(\varphi)_\infty = \deg(\varphi)_0 = \deg(\Phi_{|D|}^{-1}(\Gamma \cap D)) = dr = \deg \Phi_{|D|} \cdot \deg \Gamma$$

定理 4.11.1 设 $|D|$ 无基点. $n = l(D) \geq 2, \Gamma = \Phi_{|D|}(C)$. 则 $\deg D = \deg \Phi_{|D|} \cdot \deg \Gamma$.

定理 4.11.2 设 $\Gamma \subset \mathbb{P}^m$ 为不可约非退化曲线. 则 $\deg \Gamma \geq m$.

证明　若 $\deg\Gamma \le m-1$, 则知充分一般的超平面

$$P:\lambda_0W_0+\lambda_1W_1+\cdots+\lambda_mW_m=0$$

与 Γ 相交于 $d=\deg\Gamma\le m-1$ 个不同点 $P_1,\cdots,P_d$. 另取一个点 P_{d+1} 不同于 $P_1,P_2,\cdots,P_d$. $P_{d+1}\in\Gamma$.

$$\begin{cases} x_0W_0(P_1)+x_1W_1(P_1)+\cdots+x_mW_m(P_m)=0 \\ \qquad\vdots \\ x_0W_0(P_{d+1})+x_1W_1(P_{d+1})+x_mW_m(P_{d+1})=0 \end{cases}$$

方程个数 $d+1\le m<$ 变量的个数. 因此, 方程组有非零解 $x_i=\mu_i$.

令 $L=\mu_0W_o+\cdots+\mu_mW_m$. 则 $P:L=0$ 过 $P_1,\cdots,P_{d+1}$. 从而 $\Gamma\subset P$. 矛盾. ■

4.11.2 典范映射

设 C 是亏格 $g\ge 2$ 的光滑曲线. K 为 C 的典范除子. $\deg K=2g-2,\quad l(K)=g$.

引理 4.11.3　$g(C)\ge 1, p\in C$, 则 $l(p)=1$.

证明　$l(p)\le l(0)+1=2$. 若 $l(p)\ne 1$. 则 $l(p)=2$. $L(p)=\mathbb{C}\langle 1,\varphi\rangle$. $|p|$ 无固定部分. 无基点. 显然任何两点 $Q_1,Q_2\in C$.

$$l(P-Q_1-Q_2)=0=l(P)-2$$

故 $|p|$ 是非常丰富的. 从而 $\Phi_{|p|}:C\cong\mathbb{P}^1$. ■

引理 4.11.4　$g=1$, 则 $K\equiv 0$.

证明　$h^\circ(K)=g=1\ne 0$. 所以 $K\equiv E\ge 0$, 又 $\deg E=\deg K=2g-2=0$. 从而 $E\equiv 0$. 故 $K\equiv 0$. ■

引理 4.11.5　若 $g(C)\ge 2$. 则 $|K|$ 无基点.

证明　$p\in C, l(p)=1$. 且

$$\begin{aligned} h^\circ(K-p) &= \deg(K-p)+1-g+l(p) \\ &= 2g-2-1+1-g+1 \\ &= g-1 \\ &= h^\circ(K)-1 \end{aligned}$$

所以 $|K|$ 无基点. ■

定义 4.11.3　$\Phi_{|K|}:C\longrightarrow\mathbb{P}^{g-1}$ 称为 C 的典范映射.

引理 4.11.6　若 $g=2$, 则 $\Phi_{|K|}:C\xrightarrow{2:1}\mathbb{P}^1$.

证明　$\deg\Phi_{|K|}=\deg K=2$. ■

定义 4.11.4　已知 $g(C)\ge 2$. 则称 C 为超椭圆的 $\Longleftrightarrow$ 存在 $2:1$ 的覆盖 $\pi:C\xrightarrow{2:1}\mathbb{P}^1$. 否则称 C 为非超椭圆的.

定理 4.11.3 设 $g(C) \geq 2$. 则 C 为超椭圆曲线 $\Longleftrightarrow$ 存在 $P, Q \in C$ 使得 $l(P+Q)=2$. 这里, P, Q 可以相同.

证明 $(\Longrightarrow)$ $\pi : C \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$, 取 $R \in \mathbb{P}^1$. 则知 $l(R) = 1+1-0 = 2$. 令 $\pi^{-1}(R) = \{P, Q\}$. 则

$$\begin{aligned} L(R) &\xrightarrow{\pi^*} L(P+Q) \\ \varphi &\longmapsto \pi^*(\varphi) \end{aligned}$$

这是单射. 所以 $l(P+Q) \geq 2$. 又因为

$$l(P+Q) \leq l(P) + 1 = 1 + 1 = 2$$

所以 $l(P+Q) = 2$.

$(\Longleftarrow)$ 若 $l(P+Q)$. 则 $|P+Q|$ 无基点. 否则, 要么 P 要么 Q 为基点. 但

$$l(P+Q-P) = l(P) = 1 = l(P+Q) - 1$$

所以 P 不可能为基点. 同理 Q 也不可能为基点. 故 $|P+Q|$ 无基点. 考虑映射 $\Phi_{|P+Q|} : C \xrightarrow{d:1} \mathbb{P}^1$. 因此, $\deg \Phi_{|P+Q|} = \deg(P+Q) = 2$. 证明完成. ■

注 4.11.1 C 有定义方程: $y^2 = f_{2g+1}(x)$.

$$Rat(C) = Rat(\mathbb{P}^1)[z] = \mathbb{C}(x)[z]$$

z 在 $\mathbb{C}[x]$ 上整. 可知 $z^2 - f(x) = 0$. 用覆盖的亏格公式可知 $\deg f(x) = 2g+1$ 或者 $2g+2$. ■

定理 4.11.4 设 $g(C) \geq 3$. 如果 $|K|$ 不是非常丰富的. 则 C 是超椭圆的.

证明 若 $|K|$ 不是非常丰富的, 则存在 $P, Q \in C$ 使得

$$l(K-P-Q) > l(K) - 2 = g - 2$$

又因为

$$l(K-P-Q) \leq l(K-P) = g-1$$

所以

$$l(K-P-Q) = l(K) - 1 = g-1, \quad l(P+Q) = 2+1-g+l(K-P-Q) = 3-g+g-1 = 2$$

从而 C 是超椭圆的. ■

4.11.3 超椭圆曲线的分类

C 由 $(\mathbb{P}^1, R_1, \cdots, R_{2g+2})$ 唯一决定. 通过 $\mathbb{P}^1$ 的射影变换, 可固定三个点.

$$R_{2g+2} = \infty, \quad R_{2g+1} = 1, \quad R_{2g} = 0$$

从而 C 由 $R_1, \cdots, R_{2g-1} \in \mathbb{C}$ 唯一决定. 故超椭圆亏格 g 的曲线的模空间 H_g 的维数 $\dim H_g = 2g-1$.

$$H_g = \{C \mid g(C) = g, C \text{ 超椭圆}\}/\cong \qquad M_g = \{C \mid g(C) = g\}/\cong$$

Mumford 证明: M_g 不可约; Riemann 证明: $\dim M_g = 3g-3$. 所以, $g \geq 3$ 时, 非超椭圆曲线更多. $H_g \subset M_g$.

定理 4.11.5 设 C 是亏格 $g=3$ 的非超椭圆曲线. 则 C 同构于平面 4 次光滑曲线.

证明 $\Phi_{|K|}: C \overset{1:1}{\cong} \Gamma \subset \mathbb{P}^2, l(K)=3.$

$$4=\deg K=\deg \Phi_{|K|}\cdot \deg\Gamma = 1\cdot \deg\Gamma$$

故 $\deg\Gamma=4$. ■

定理 4.11.6 设 $g(C)=g\geq 3$, C 非超椭圆. 则 C 同构于 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中的次数为 $2g-2$ 的曲线.

证明 $\Phi_{|K|}: C\cong \Gamma\subset \mathbb{P}^{g-1}$. $\deg\Gamma=\deg K=2g-2$. ■

定理 4.11.7 设 C 是平面光滑曲线, 且 $d=\deg C\geq 4$. 则 C 是非超椭圆的.

证明 设 $P,Q\in C$, $L=0$ 是过 P,Q 的直线. 如果 $P=Q$, 则 $L=0$ 为过 P 点的切线. 以下设 $P\neq Q$.

$$div(L|_C)=aP+bQ+n_1P_1+\cdots+n_kP_k$$

这里, $a\geq 1, b\geq 1, P_1,\cdots,P_k,P,Q$ 各不相同. $a+b+n_1+\cdots+n_k=d\geq 4$. 且

$$L(P+Q)=\{\frac{H}{L}\Big|_C \mid div(H|_C)\geq div(L|_C)-P-Q\}$$

考虑

$$div(L|_C)-P-Q=(a-1)P+(b-1)Q+\sum_{i=1}^k n_iP_i$$

的次数为 $d-2$. 故直线 $H=0$ 与 $L=0$ 要么都过两不相同点, 要么为某一点的切线. 从而 $H=\lambda L, \lambda\in\mathbb{C}$. 即 $L(P+Q)=\mathbb{C}$. 所以 C 为非超椭圆的. ■

定理 4.11.8 若 $C\subset\mathbb{P}^{g-1}$ 是次数为 $2g-2$ 的光滑非退化曲线. $H=C\cap P$ 为超平面截口. 则 $K\equiv H$.

证明 设 $W_1,W_2,\cdots,W_g$ 为 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的齐次坐标. $P: L=0, L=\lambda_1W_1+\cdots+\lambda_gW_g$. 则

$$div(L|_C)=H,\quad \deg H=2g-2,\quad L(H)=\{\frac{L'}{L}\Big|_C \mid \deg L'=1\}$$

因为 C 非退化, 故 $\varphi_i=\frac{W_i}{L}\big|_C\in L(H)$ 线性无关. 所以 $l(H)\geq g$.

$$\begin{aligned} l(H)&=\deg H+1-g+l(K-H)\\ &=2g-2+1-g+l(K-H)\\ &=g-1+l(K-H)\geq g\end{aligned}$$

所以 $l(K-H)\geq 1, K-H\equiv E\geq 0, \deg E=0$. 因此 $E=0$. 也就是说 $K\equiv H$. ■

注 4.11.2 下节我们将要证明: 超平面截口是非常丰富的. 因此, $\mathbb{P}^{g-1}$ 中次数为 $2g-2$ 的非退化曲线一定是非超椭圆曲线. 故非超椭圆曲线的分类可归结为 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中的 $2g-2$ 次非退化光滑曲线的研究. ■

以下设 C 是超椭圆的. $\pi: C\xrightarrow{2:1}\mathbb{P}^1$, R 是 $\mathbb{P}^1$ 的一个点. $D_0=(g-1)R$, 则知

$$l(D_0)=g-1+1=g,\quad \pi^{-1}(R)=\{P+Q\}$$

则证 $\pi^*(R) = P + Q$. 令 $D = (g-1)\pi^*(R) = \pi^*(D_0)$. $\deg D = 2g-2 = 2\cdot\deg D_0$. 映射 $L(D_0) \xrightarrow{\pi^*} L(D)$ 是单射. 所以 $l(D) \geq g$.

$$l(D) = 2g-2+1-g+l(K-D) = g-1+l(K-D) \geq g$$

且 $l(K-D) \geq 1, K-D \equiv E \geq 0$

$$\deg E = \deg K - \deg D = 2g-2-(2g-2) = 0$$

所以 $E = 0, K \equiv D$. 即 $K = \pi^*(D_0) = (g-1)\pi^*(R)$ 也是典范除子. $L(D_0) \xrightarrow[\sim]{\pi^*} L(K)$ 所以 $L(K) = \pi^*(L(D_0)), L(D_0) = \mathbb{C}\langle\psi_1, \cdots, \psi_g\rangle$, D_0 是非常丰富的. 故

$$L(K) = \mathbb{C}\langle\pi^*(\psi_1), \cdots, \pi^*(\psi_g)\rangle, \quad \Phi_{K_1}(P) = [\psi_1(\pi(P)), \cdots, \psi_g(\pi(P))]$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\Phi_{|K|}"] \arrow[dr, "\pi", "2:1"'] & & \mathbb{P}^{g-1} \\
& \mathbb{P}^1 \arrow[ur, hook, "1:1", "\Phi_{|D|}"'] &
\end{tikzcd}$$

故 $\Phi_{|K|}: C \xrightarrow{2:1} \Gamma \cong \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{g-1}$. $\deg\Gamma = \frac{1}{2}\deg K = g-1$.

推论 4.11.1 当 C 为超椭圆时, $\Phi_{|K|}: C \xrightarrow{2:1} \Gamma \subset \mathbb{P}^{g-1}, \Gamma \cong \mathbb{P}^1$. $\deg\Gamma = g-1$. (最低次数)

4.12 曲线上的有限微分形式

4.12.1 线性系的性质

定理 4.12.1 设 C 为亏格 g 的光滑射影曲线. D, D' 为两除子.

(1) $|D|$ 无基点 $\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $P \in C, l(D-P) = l(D) - 1$;

(2) $|D|$ 是非常丰富的 $\Longleftrightarrow$

  (a) $|D|$ 无基点;

  (b) 对于任意的 $P \in C$, $|D-P|$ 无基点.

(3) $|D|, |D'|$ 无基点, 则 $|D+D'|$ 也无基点. $|nD|$ 无基点;

(4) 若 $|D|$ 是非常丰富的且 $|D'|$ 无基点, 则 $|D+D'|$ 也是非常丰富的;

(5) 若 $|D|$ 是非常丰富的, 则当 $n \geq 2$ 时, $|nD|$ 也是非常丰富的.

证明 (1) 来自定义. (5) 可由 (4) 直接推出, 下证 (2)(3)(4).

(2) 由 (a). 可知, 对于任意的 $Q \in C$, 有 $l(D-Q) = l(D) - 1$; 由 (b). 可知, 对于任意的 $P \in C, l(D-Q-P) = l(D-Q) - 1 = l(D) - 2$. 所以 D 非常丰富, 反之亦然.

(3) $|D|, |D'|$ 无基点, 则对于任意的 $P \in C$, 存在 $E \in |D|, E' \in |D'|$, 且 E, E' 不含 P. 从而 $E + E' \in |D+D'|$ 不含 P. 所以 P 不为 $|D+D'|$ 的基点. 由 P 的任意性可知, $|D+D'|$ 无基点.

(4) 已知 $|D+D'|$ 无基点. 又对于任意的 $P \in C, |D-P|$ 无基点. 所以 $|D-P+D'|$ 无基点, $|D+D'-P|$ 无基点. 所以 $|D+D'|$ 非常丰富. ■

定理 4.12.2 设 $C \subset \mathbb{P}^m$ 是光滑非退化曲线. 则

(1) 任何两个超平面截口的除子线性等价. 即 $div(L|_C) = H, div(L'|_C) = H'$. 则 $H' \equiv H$;

(2) $|H|$ 无基点;

(3) $|H|$ 非常丰富.

证明 (1) $\varphi = \left.\frac{L'}{L}\right|_C$, 则 $div(\varphi) = H - H'$. 所以 $H \equiv H'$.

(2) 对于任意的 $P \in C$, 存在 L' 使得 $L'(P) \neq 0$. 所以 $P \notin H'$. 所以 P 不为 $|H|$ 的基点. 因此 $|H|$ 无基点.

(3) 若 $|H|$ 不是非常丰富的. 则存在 P, Q, 使得 Q 为 $|H - P|$ 的基点. 即 $|H - P|$ 的元都含有 Q 点. 从而过 P 的超平面一定过 Q. 当 $Q \neq P$ 时, 显然不可能. 所以 $Q = P$. 此时说明: 过 P 点超平面都与 C 在 P 点相切. 这也不可能. 于是存在超平面与 C 相交于不同点, 且含 P 点. ■

推论 4.12.1 非常丰富除子和超平面截口是等价的.

4.12.2 多重典范映射

设 $n \geq 2$, $g(C) \geq 2$, 则 $|nK|$ 无基点

$$\Phi_{|nK|} : C \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{P}^N$$

$$\begin{aligned} N &= l(nK) - 1 = \deg(nK) + 1 - g \\ &= n(2g-2) - (g-1) = (2n-1)(g-1) \end{aligned}$$

定理 4.12.3 (1) 当 $n \geq 3$ 时, $\Phi_{|nK|}: C \xrightarrow{\sim} \Gamma \subset \mathbb{P}^N$;

(2) 当 $n = 2, g \geq 3$ 时, $\Phi_{|2K|}: C \xrightarrow{\sim} \Gamma \subset \mathbb{P}^N$;

(3) 当 $g = 2$ 时, $\Phi_{|2K|} : C \xrightarrow{2:1} \Gamma \cong \mathbb{P}^1$.

证明 (1) 当 $n \geq 3$ 时, 根据 $\deg(nK) = 2n(g-1) \geq 2g+1$ 所以, $|nK|$ 是非常丰富的.

(2) $\deg(2K) = 4g - 4 \geq 2g + 1, (g \geq 3)$. 所以 $2K$ 非常丰富.

(3) $g = 2$ 时,

$$l(2K) = \deg(2K) + 1 - g = 4g - 4 + 1 - g = 3g - 3 = 3$$

考虑映射 $\Phi_{|2K|} : C \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{P}^2$. 又 $\deg\Gamma \geq 2$, 所以

$$4 = \deg 2K = \deg \Phi_{|2K|} \cdot \deg \Gamma, \quad \deg \Gamma \leq 2 \text{ 或 } 4$$

而

$$K = (g-1)\pi^*(R) = \pi^*(R), \quad 2K = \pi^*(2R), \quad l(2K) = 3$$

所以 $L(2K) = \pi^*(L(2R))$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\Phi_{|2K|}", "2:1"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \Gamma \subset \mathbb{P}^2 \\ & \mathbb{P}^1 \arrow[ur, hook, "\Phi_{|2K|}"'] & \end{tikzcd}$$

所以 $\deg\Gamma = 2, \Gamma \cong \mathbb{P}^1, \Phi_{|2K|}$ 为 2 次覆盖. ■

注 4.12.1 任何亏格 g 曲线可表示为 $\mathbb{P}^{N_3}(N_3 = 5g-6)$ 中的 $d = 6g-6$ 次光滑非退化曲线.

$$Hild(\mathbb{P}^N) = \{C \subset \mathbb{P}^N \mid \text{满足上条件}\}$$

为概型 (代数簇). $PGL(N+1, \mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{P}^N$ 的射影变换群. 则

$$M_g = Hild(\mathbb{P}^N)/PGL(N+1, \mathbb{C})$$

4.12.3 有理微分形式

设 C 是 $\mathbb{P}^2$ 中 d 次不可约曲线, 有 r 个结点. $Q_1, \cdots, Q_r$, $\quad F(X,Y,Z) = 0$. 形式地

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dX + \frac{\partial F}{\partial Y}dY + \frac{\partial F}{\partial Z}dZ\big|_C = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial Y}Y + \frac{\partial F}{\partial Z}Z\big|_C = dF|_C = 0 \end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial X} : \frac{\partial F}{\partial Y} : \frac{\partial F}{\partial Z} = (YdZ - ZdY) : (ZdX - XdZ) : (XdY - YdX)$$

等价地, C 上有

$$\frac{YdZ - ZdY}{\frac{\partial F}{\partial X}} = \frac{ZdX - XdZ}{\frac{\partial F}{\partial Y}} = \frac{XdY - YdX}{\frac{\partial F}{\partial Z}} := \text{“}dw\text{”}$$

形式计算

设 $R(X,Y,Z)$ 是齐次多项式. $\deg R = d-3$. 则 Rdw 有意义, 是 C 上的有理微分形式. 若在仿射开集上看其意义, 如

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}$$

$$R(X,Y,Z)dw = Z^{d-3}R(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, 1)\frac{Z^2 d(\frac{X}{Z})}{Z^{d-1}\frac{\partial F}{\partial Y}(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, 1)} = R(x,y,1)\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

这里 $r(x,y) = R(x,y,1), f(x,y) = F(x,y,1)$ 是 x, y 平面上的有理微分形式. 同理, 在其它开集上也是. 在两开集的相交部分所产生的微分形式相同. 从而知 Rdw 是0$\widetilde{C}$ 上的有理微分形式.

引理 4.12.1 Rdw 的极点 $\subseteq \{Q_1, \cdots, Q_r\}$, 且极点重数最多为 1, $\nu_{Q_i}(Rdw) \geq -1$.

证明 由 Q 为 Rdw 的极点可知

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) = \frac{\partial F}{\partial Y}(Q) = \frac{\partial F}{\partial Z}(Q) = 0$$

所以 $Q \in \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_r\}$. $\widetilde{C} \xrightarrow{\sigma} C$, $E_i, E_i' \longrightarrow Q_i$.

$$\begin{aligned} \nu_{E_i}(\sigma^*(Rdw)) &= \nu_{Q_i}(Rdw|_{C_1}), \quad f = f_1 f_2 \\ &= \nu_{Q_i}(r(x,y)|_{C_1}) - \nu_{Q_i}(\tfrac{\partial f_1}{\partial y}) \\ &= I_{Q_i}(R, C_1) - \nu_{Q_i}(\tfrac{\partial f_1}{\partial y}) \\ &= I_{Q_i}(R, C_1) - 1 \end{aligned}$$

故 $\alpha = \sigma^*(Rdw)$ 在 E_i 点正则 $\Longleftrightarrow R(Q_i) = 0$. ■

记 $\Omega_{\widetilde{C}} = \{\alpha \mid \alpha$ 是 $\widetilde{C}$ 上的正则微分1-形式$\}$, $\alpha_0 = Z^{d-3}dw$, 则

$$\alpha_0|_{\mathbb{C}^2} = \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

设 $Q_i \notin L_\infty$, $L_\infty \cap C = P$. 则

$$div(\alpha_\sigma) = div(Z^{d-3}|_{\widetilde{C}}) - E = (d-3)P - E = K$$

已证如下事实:

$$L(K) = L((d-3)P - E) = \{ \left.\frac{R}{Z^{d-3}}\right|_{\widetilde{C}} \mid R(Q_i) = 0, \forall\, i, \deg R = 3\}$$

所以, $L(K)\alpha_0 \subset \Omega_{\widetilde{C}}$.

反之, 若 $\alpha \in \Omega_{\widetilde{C}}$. 则存在 $\varphi \in Rat(\widetilde{C})$ 使得 $\alpha = \varphi\alpha_0$,

$$div(\alpha) = div(\varphi) + div(\alpha_0) = div(\varphi) + K \geq 0$$

所以 $\varphi \in L(K)$. 故 $\Omega_{\widetilde{C}} = L(K)\alpha_0$. 所以 $|K|$ 中的除子都是某全纯 1 形式 (正则 1 形式) 的除子.

定理 4.12.4 $\widetilde{C}$ 上的典范除子就是 $\widetilde{C}$ 上的某非零 1-有理形式的除子 $L(K) \cong \Omega_{\widetilde{C}}$.

推论 4.12.2 亏格 g 的光滑射影曲线上的有理 1−形式的除子的次数等于 $2g-2$.

证明 考虑 $C \overset{\pi}{\ } \mathbb{P}^1$, 取 α_0 为 $\mathbb{P}^1$ 上的非零有理 1 形式, 则 $\pi^*(\alpha_0)$ 是 C 上的有理 1 形式. 若 π 有 n 个分歧点在 $\mathbb{P}^1$ 中, 则通过计算可得

$$2g - 2 = \deg div(\pi^*(\alpha_0)) = 2(-2) + n$$

证毕. ■

注 4.12.2 一般地, $\pi : C \longrightarrow C'$ 是 d 次覆盖, $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r \in C$ 为 π 的分歧点. π 在 Q_i 附近的方程 $z^{e_i} = x$. 则

$$2g(C) - 2 = d(2g(C') - 2) + \sum_{i=1}^{r}(e_i - 1)$$

此公式被称为 Hurwitz 公式. Abel 和 Jacobi 利用 C 上的微分形式的积分理论建立了 Abel-Jacobi 理论. ■

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 4.1

参 考 文 献

索 引