专业：______ 考生座位号：______ 所在院校：______ 准考证号：______ 姓名：______

密 —— 封 —— 线

第五届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2014）

考试形式：闭卷　　考试时间：180 分钟　　满分：100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满　分	28	12	12	12	12	12	12	100
得　分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题共 28 分，每小题 7 分）计算下列各题

1. 计算积分 $\int_0^{2\pi} x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}dtdx.$

2 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $\int_0^1 f(x)dx=1$，求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 $I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$ 取得最小值.

3. 设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数，$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记 Γ 在 xoy 平面上的投影曲线为 S. 求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程.

4 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$，其中 a 为常数，矩阵 B 满足关系式 $AB=A-B+E$，其中 E 是单位矩阵且 $B\neq E$. 若秩 $rank(A+B)=3$，试求常数 a 的值.

得　分	
评阅人	

二、(12 分) 设 $f(x)\in C^4(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)$ 满足

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,$$

其中 θ 是与 x,h 无关的常数，证明 f 是不超过三次的多项式.

姓名：

准考证号：

所在院校：

考生座位号：

专业：

密　封　线

得　分	
评阅人	

三、（12 分）设当$x>-1$时，可微函数$f(x)$满足条件

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$，且$f(0)=1$，试证：

当$x\geq 0$时，有$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$成立.

.

得　分	
评阅人	

四、（12 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数.

若对任何 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$ 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明 $I\le\dfrac{A}{4}$.

姓名：　准考证号：　所在院校：　考生编号：　专业：

密　封　线

得　分	
评阅人	

五、（12 分）设函数 $f(x)$ 连续可导, $P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right)$，有向曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\le t^2$，$0\le z\le 1$ 的表面，方向朝外．记第二型的曲面积分 $I_t=\iint\limits_{\Sigma_t} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$．

专业:

考生编号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

线

封

密

得　分	
评阅人	

六、（12 分）设 A, B 为 n 阶正定矩阵，求证 AB 正定的充要条件是 $AB = BA$.

得　分	
评阅人	

七、(12 分) 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，且 $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证明：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.