

## 第五届全国大学生数学竞赛预赛试卷 评分细则

一、(共4小题,每小题6分,共24分) 解答下列各题.

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$ .

解  $\because \sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2} - 2n\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}}$  (2分)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}}\right)^n \\ &= \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (2 \text{分})$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}} \right) \\ &= \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}} \right) = e^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (2 \text{分})$$

2. 证明广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  不是绝对收敛的.

证. 记  $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$ , 只要证明  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散. (2分)

$$\text{因为 } a_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{(n+1)\pi}. \quad (3 \text{分})$$

而  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$  发散, 故  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散. (1分)

3. 设函数  $y = y(x)$  由  $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$  所确定. 求  $y(x)$  的极值.

解 方程两边对  $x$  求导, 得

$$3x^2 + 6xy + 3x^2y' - 6y^2y' = 0 \quad (1 \text{分})$$

故  $y' = \frac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$ , 令  $y' = 0$ , 得  $x(x+2y) = 0 \Rightarrow x = 0$  或  $x = -2y$ .

将  $x = 0$  和  $x = -2y$  代入所给方程, 得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} . \quad (2 \text{分})$$

又

$$y'' = \frac{(2y^2 - x^2)(2x + 2xy' + 2y) + (x^2 + 2xy)(4yy' - 2x)}{(2y^2 - x^2)^2} \Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=-1 \\ y'=0}} = -1 < 0,$$

$$y'' \Big|_{\substack{x=-2 \\ y=1 \\ y'=0}} = 1 > 0.$$

故  $y(0) = -1$  为极大值,  $y(-2) = 1$  为极小值. (3 分)

4. 过曲线  $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$  上的点  $A$  作切线, 使该切线与曲线及  $x$  轴所围成的平面图形的面积为  $\frac{3}{4}$ , 求点  $A$  的坐标.

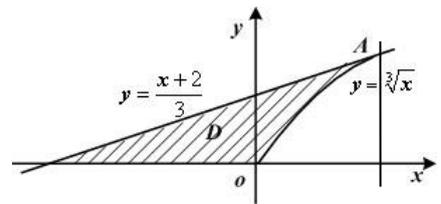
**解** 设切点  $A$  的坐标为  $(t, \sqrt[3]{t})$ , 曲线过  $A$  点的切线方程为

$$y - \sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x - t) \quad (2 \text{分})$$

令  $y = 0$ , 由上式可得切线与  $x$  轴交点的横坐标  $x_0 = -2t$

$\therefore$  平面图形的面积  $S = \Delta Ax_0t$  的面积 - 曲边梯形  $otA$  的面积

$$S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{t} \cdot 3t - \int_0^t \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} t \sqrt[3]{t} = \frac{3}{4} \Rightarrow t = 1, \quad \therefore A \text{ 的坐标为 } (1, 1). \quad (4 \text{分})$$



二、(12 分) 计算定积分  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

**解**

$$I = \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^{-x}}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (4 \text{分})$$

$$= \int_0^{\pi} (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (2 \text{分})$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (4 \text{分})$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{8} \quad (2 \text{分})$$

三、(12 分) 设  $f(x)$  在  $x=0$  处存在二阶导数  $f''(0)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . 证明: 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$  收敛.

证 由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,

$$\text{则 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0. \quad (2 \text{ 分})$$

应用罗比达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2(x-0)} = \frac{1}{2} f''(0). \quad (3 \text{ 分})$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} |f''(0)|. \quad (2 \text{ 分})$$

由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$  收敛. (3 分)

四、(10 分) 设  $|f(x)| \leq \pi, f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$ , 证明  $\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$ .

证 因为  $f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$ , 所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单增, 从而有反函数. (2 分)

设  $A = f(a), B = f(b)$ ,  $\varphi$  是  $f$  的反函数, 则

$$0 < \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \leq \frac{1}{m}, \quad (3 \text{ 分})$$

又  $|f(x)| \leq \pi$ , 则  $-\pi \leq A < B \leq \pi$ , 所以

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \stackrel{x=\varphi(y)}{=} \left| \int_A^B \varphi'(y) \sin y dy \right| \quad (3 \text{ 分})$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{1}{m} \sin y dy = \frac{2}{m} \quad (2 \text{ 分})$$

五、(14 分) 设  $\Sigma$  是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) dydz + (2y^3 - y) dzdx + (3z^3 - z) dxdy.$$

试确定曲面  $\Sigma$ , 使得积分  $I$  的值最小, 并求该最小值.

解. 记  $\Sigma$  围成的立体为  $V$ , 由高斯公式,

$$I = \iiint_V (3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3) dv = 3 \iiint_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) dxdydz. \quad (3 \text{ 分})$$

为了使得  $I$  达到最小, 就要求  $V$  是使得  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \leq 0$  的最大空间区域, 即

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}. \quad (3 \text{ 分})$$

所以  $V$  是一个椭球,  $\Sigma$  是椭球  $V$  的表面时, 积分  $I$  最小.

为求该最小值, 作变换 
$$\begin{cases} x = u \\ y = v/\sqrt{2} \\ z = w/\sqrt{3} \end{cases} . \text{ 则 } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ 有}$$

$$I = \frac{3}{\sqrt{6}} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} (u^2 + v^2 + w^2 - 1) dudvdw. \quad (4 \text{ 分})$$

使用球坐标变换, 我们有

$$I = \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r^2 \sin\theta dr = -\frac{4\sqrt{6}}{15} \pi. \quad (4 \text{ 分})$$

六、(14 分) 设  $I_a(r) = \int_C \frac{ydx - xdy}{(x^2 + y^2)^a}$ , 其中  $a$  为常数, 曲线  $C$  为椭圆  $x^2 + xy + y^2 = r^2$ , 取正向.

求极限  $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r)$ .

解. 作变换 
$$\begin{cases} x = (u - v)/\sqrt{2} \\ y = (u + v)/\sqrt{2} \end{cases},$$

曲线  $C$  变为  $uov$  平面上的  $\Gamma: \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 = r^2$ , 也是取正向 (2 分)

且有  $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ ,  $ydx - xdy = vdu - udv$ ,

$$I_a(r) = \int_\Gamma \frac{vdu - udv}{(u^2 + v^2)^a}. \quad (2 \text{ 分})$$

作变换 
$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{2}{3}}r \cos\theta \\ v = \sqrt{2}r \sin\theta \end{cases}, \text{ 则有 } vdu - udv = -\frac{2}{\sqrt{3}}r^2 d\theta$$

$$I_a(r) = -\frac{2}{\sqrt{3}} r^{2-2a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3 + 2\sin^2\theta)^a} = -\frac{2}{\sqrt{3}} r^{-2a} J_a,$$

其中  $J_a = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3 + 2\sin^2\theta)^a}$ ,  $0 < J_a < +\infty$ . (3 分)

因此当  $a > 1$  和  $a < 1$ , 所求极限分别为 0 和  $-\infty$ . (2 分)

而当  $a=1$ ,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + 3 \cos^2 \theta} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d \tan \theta}{2 + 3 \tan^2 \theta} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2 + t^2} = \sqrt{3} \pi. \quad (3 \text{分})$$

故所求极限为

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r) = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ -\infty, & a < 1 \\ -2\pi, & a = 1 \end{cases} \quad (2 \text{分})$$

七、(14分) 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$  的敛散性, 若收敛, 求其和.

解: (1) 记  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  $u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ .

因为  $n$  充分大时

$$0 < a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n < \sqrt{n}, \quad (3 \text{分})$$

所以  $u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^{3/2}}$  而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛. (2分)

$$(2) a_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{k+1} - \frac{a_k}{k+2} \right) \\ &= \left( \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{3} \right) + \left( \frac{a_2}{3} - \frac{a_2}{4} \right) + \dots + \left( \frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-1}}{n+1} \right) + \left( \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \right) \end{aligned} \quad (2 \text{分})$$

$$= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} (a_2 - a_1) + \frac{1}{4} (a_3 - a_2) + \dots + \frac{1}{n+1} (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{n+2} a_n \quad (2 \text{分})$$

$$= \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} \right) - \frac{1}{n+2} a_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} a_n. \quad (2 \text{分})$$

因为  $0 < a_n < 1 + \ln n$

所以  $0 < \frac{a_n}{n+2} < \frac{1 + \ln n}{n+2}$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln n}{n+2} = 0$ . 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+2} = 0$ .

于是  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - 0 - 0 = 1$ . 证毕. (3分)