第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

（非数学类，2011）

一、（本题共 4 小题，每题 6 分，共 24 分）计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

解：因为 $\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$, ……………………………………………………3 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2$, ………………5 分

所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$. ……………………………………6 分

2. 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：若 $\theta=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. ……………………………1 分

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $2^n>|k|$ 时，

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$. ………………………4 分

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

这时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$. ……………………………6 分

3. 求$\iint\limits_{D}\mathrm{sgn}(xy-1)dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

解：设 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \frac{1}{2},0\le y\le 2\}$

$D_2=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le \frac{1}{x}\}$

$D_3=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2\}$. ……………………………2 分

$\iint\limits_{D_1\cup D_2}dxdy=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x}=1+2\ln 2$，$\iint\limits_{D_3}dxdy=3-2\ln 2$. ……………………………4 分

$\iint\limits_{D}\mathrm{sgn}(xy-1)dxdy=\iint\limits_{D_3}dxdy-\iint\limits_{D_2\cup D_3}dxdy=2-4\ln 2$. ……………………………6 分

4. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

解：令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，则其的定义区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}.$$ ……………………2 分

于是，$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. ……………………………4 分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$$ ……………………………6 分

二、（本题 2 两问，每问 8 分，共 16 分）设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a,λ为有限数，求证：

1. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$；

2. 如果存在正整数 p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

证明：1. 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$使得$|a_n|\le M$，且$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$ ……………………………………4 分

因为$\exists N_2>N_1$，当 $n>N_2$ 时，$\frac{N_1(M+|a|)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是，$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{N_1(M+|a|)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，

所以， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$. ……………………………………………………8 分

2. 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$，令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$， 易知 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{a_{n+p}-a_n\}$ 的子列.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$.

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$. 所以， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$. ……………………………………………12 分

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)p+i}\cdot\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

$\forall m\in\mathbb{N},\exists n,p,i\in\mathbb{N}$，$(0\le i\le p-1)$，使得 $m=np+i$，且当 $m\to\infty$ 时， $n\to\infty$.

所以， $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$. ……………………………………………………………16 分

三、（15 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$， $f(1)=1$， $f'(0)=0$.

求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$

证. 由马克劳林公式，得

$f(x)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$，$\eta$ 介于 0 与 x 之间， $x\in[-1,\ 1]$ …3 分

在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$， 得

$1=f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta_1)$， $0<\eta_1<1$. ………………………5 分

$0=f(-1)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)-\dfrac{1}{3!}f'''(\eta_2)$， $-1<\eta_2<0$. ………………………7 分

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$. ………………………10 分

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2,\eta_1]$ 上有最大值 M 最小值 m，从而

$m\le\dfrac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))\le M$ ……………………………………13 分

再由连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$，使得

$f'''(x_0)=\dfrac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))=3$. ………………………15 分

四、（15 分）在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，线密度为ρ．在点$(0,h)$处（其中 $\boldsymbol{h>0}$）有一质量为m的质点．求射线对该质点的引力.

解：在x轴的x处取一小段dx，其质量是ρdx，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是$dF=\dfrac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$（其中 G 为引力常数）.　　　　…………………5 分

这个引力在水平方向的分量为$dF_x=\dfrac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}$．从而

$$F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{d(x^2)}{(h^2+x^2)^{3/2}}=-Gm\rho(h^2+x^2)^{-1/2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

……10 分

而dF在竖直方向的分量为$dF_y=\dfrac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}$，故

$$F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 dt}{h^3\sec^3 t}=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\cos tdt=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为$\mathbf{F}=(F_x,F_y)$.　　　　…………………………15 分

五、（15 分）设$z=z(x,y)$是由方程$F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$确定的隐函数，其中$F$具有连续的二阶偏导数，且$F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$. 求证：$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$和$x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解：在方程$F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$两边分别关于$x$、$y$求偏导，得

$(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{x^2})F_u+\dfrac{\partial z}{\partial x}F_v=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}F_u+(\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{y^2})F_v=0$.　　…………………5 分

由此解得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_u}{x^2(F_u+F_v)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-F_v}{y^2(F_u+F_v)}$

所以，$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$　　　　…………………………10 分

对上式两边关于x和y分别求偏导，得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y\frac{\partial z}{\partial y}$$

上面第一式乘以 x 加上第二式乘以 y，并注意到 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得到

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$ ……………………………………………15 分

六、（15 分）设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$．记第一型曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$．求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du$

解：由 Σ 的面积为 4π 可见：当 a,b,c 都为零时，等式成立. ……………………2 分

当它们不全为零时，可知：原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是

$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. ……………………………5 分

设平面 $P_u: u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中 u 固定．则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而

$-1\le u\le 1$. ……………………………8 分

两平面 P_u 和 P_{u+du} 截单位球 Σ 的截下的部分上，被积函数取值为

$f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)$. ……………………………10 分

这部分摊开可以看成一个细长条．这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积是 $2\pi du$，故

我们得证. ……………………………15 分