

姓名：____ 身份证号：____ 所在院校：____ 年级：____ 专业：____

线
—
封
—
密

第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷
(非数学类, 2011)

考试形式： 闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
满 分	24	16	15	15	15	15	100
得 分							

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效。
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。
3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号。

得 分	
评阅人	

一、(本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤)。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1-\ln(1+x))}{x}.$

(2) 设 $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(3) 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

(4) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

得 分	
评阅人	

二、(本题共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a, λ 为有限数, 求证:

- (1) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.
- (2) 如果存在正整数 p , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$.

得 分	
评阅人	

三、(本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. 求证: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f'''(x_0)=3$.

得 分	
评阅人	

四、（本题共 15 分）在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，其线密度为 ρ ．在点 $(0,h)$ 处（其中 $h > 0$ ）有一质量为 m 的质点．求射线对该质点的引力．

得 分	
评阅人	

五、（ 本 题 共 15 分 ） 设 $z = z(x,y)$ 是 由 方 程 $F(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}) = 0$ 确定的隐函数，其中 F 具有连续的二阶

偏 导 数 ， 且 $F_u(u,v) = F_v(u,v) \neq 0$. 求 证 ： $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 和

$$x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

得 分	
评阅人	

六、(本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, a, b, c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 记第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS. \text{ 求证: } I = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u) du.$$