

第五届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷解答
(数学类, 2014年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

- 注意: 1. 前 4 题是必答题, 再从 5–11 题中任选两题, 题号要填如上面的表中.
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $P = (a, b, c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2 + b^2 > 2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

证明 设 ℓ 是过 P 点的抛物面 S 的一条切线, 它的方向向量为 $V = (u, v, w)$. 则切点可表成 $Q = P + tV = (a + tu, b + tv, c + tw)$, 其中 t 是二次方程

$$2(c + tw) = (a + tu)^2 + (b + tv)^2,$$

也就是

$$(u^2 + v^2)t^2 + 2(au + bv - w)t + (a^2 + b^2 - 2c) = 0$$

的唯一重根. (5分)

这时,

$$(au + bv - w)^2 = (u^2 + v^2)(a^2 + b^2 - 2c),$$

$$t = \frac{w - au - bv}{u^2 + v^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2c}{w - au - bv}.$$

(10分)

于是切点 $Q = (X, Y, Z) = (a + tu, b + tv, c + tw)$ 满足

$$aX + bY - Z = (a^2 + b^2 - c) + t(au + bv - w) = c.$$

(15分)

于是所有切点 Q 落在平面 $ax + by - z = c$ 上.

二、(本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$, 其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & a_0 & 2 & -2 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix},$$

$a_0, a, b, c, d, e, f, g, h, k$ 皆为实数. 已知 $\lambda_1 = 2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(i) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.

(ii) 当 $a_0 = 2$ 时, 试求 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换下的标准型.

证明 (i) 由于 $\text{tr}(A)$ 是 A 的特征值之和, 得 λ_1 的代数重数也是 3, 而 A 的另一个特征值 $\lambda_2 = 0$, 且 $\lambda_2 = 0$ 的代数重数为 1. 结果 A 有四个线性无关的特征向量. 故 A 可对角化. (5分)

(ii) 由于 $\lambda_1 = 2$ 的重数为 3, 故有

$$\text{rank}(A - 2E) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ a & -2 & b & c \\ d & e & -2 & f \\ g & h & k & 2 \end{pmatrix} = 1. \quad (7\text{分})$$

进而 $a/0 = -2/2 = b/2 = c/-2$, 得 $a = 0, b = -2, c = 2$; $d/0 = e/2 = -2/2 = f/-2$, 得 $d = 0, e = -2, f = 2$; $g/0 = h/2 = k/2 = 2/-2$, 得 $g = 0, h = -2, k = -2$. 于是,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (10\text{分})$$

注意到 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x = x^T B x$, 其中

$$B = \frac{A + A^T}{2}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 $\lambda_1 = 2$ (二重), $\lambda_2 = 1 + 2\sqrt{3}$ (一重), $\lambda_3 = 1 - 2\sqrt{3}$ (一重). 故 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换下的标准型为

$$2y_1^2 + 2y_2^2 + (1 + 2\sqrt{3})y_3^2 + (1 - 2\sqrt{3})y_4^2. \quad (15\text{分})$$

三、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可导函数, $f(0) = 0$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha > 1$, $\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx$ 也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx \leq \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^\beta, \quad \beta = \frac{\alpha + 1}{2}.$$

证明 令

$$g(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^\beta - \int_0^t f^\alpha(x) dx, \quad (5\text{分})$$

则 $g(t)$ 可导, 且

$$g'(t) = f(t) \left[\beta \left(\int_0^t f(x) dx \right)^{\beta-1} - f^{\alpha-1}(t) \right].$$

令

$$h(t) = \beta^{\frac{1}{\beta-1}} \int_0^t f(x) dx - f^2(t). \quad (10\text{分})$$

则有

$$h'(t) = f(t) \left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}} - 2f'(t) \right].$$

由于 $\beta > 1$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$, 我们有 $h'(t) \geq 0$. 这说明 $h(t)$ 单调递增, (15分)

从 $h(0) = 0$, 得 $h(t) \geq 0$. 因而 $g'(t) \geq 0$. 再从 $g(0) = 0$, 可得 $g(t) \geq 0$, 即

$$\int_0^t f^\alpha(x) dx \leq \left(\int_0^t f(x) dx \right)^\beta.$$

令 $t \rightarrow +\infty$, 即得所证. (20分)

四、(本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 记 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geq 2$ 为自然数. 求最大实数 C , 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有 $d(f') \geq Cd(f)$.

证明 $C_{\max} = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$. (2分)

不妨 $f(x)$ 的最小实根为 0, 最大实根为 a . 设

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad 0 = x_1 \leq x_2, \cdots, x_{n-1} \leq x_n = a.$$

先证以下

引理: 若存在 $2 \leq k, m \leq n-1$ 使得 $x_k < x_m$, 令 $x_k < x'_k \leq x'_m < x_m$ 满足 $x_k + x_m = x'_k + x'_m$, 令

$$f_1(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \cdots (x - x'_n), \quad x'_i = x_i, \quad i \neq k, m.$$

则有 $d(f'_1) \leq d(f')$. (5分)

证明: 注意到 $f(x) = f_1(x) - \delta F(x)$, 其中

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{(x - x'_k)(x - x'_m)}, \quad \delta = x'_k x'_m - x_k x_m > 0.$$

设 α 和 β 分别为 $f'_1(x)$ 的最大和最小实根, 则有 $f_1(\alpha) \leq 0$, $f_1(\beta)(-1)^n \leq 0$. 由罗尔定理 $\alpha \geq x_m, \beta \leq x_k$, 并且

$$f'(\alpha) = \delta \frac{(2\alpha - x'_k - x'_m)}{(\alpha - x'_k)^2(\alpha - x'_m)^2} f_1(\alpha).$$

则 $f'(\alpha)f_1(\alpha) \geq 0$. 故 $f'(\alpha) \leq 0$. 这表明 $f'(x) = 0$ 的最大实根大于或等于 α . 同理, $f'(x) = 0$ 最小实根小于或等于 β . 引理证毕. (12分)

令

$$g(x) = x(x - a)(x - b)^{n-2}, \quad b = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到 $d(f') \geq d(g')$. (15分)

由于

$$g'(x) = (x - b)^{n-3}(nx^2 - ((n-1)a + 2b)x + ab),$$

$$d(g') = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{n} + \left(\frac{a-2b}{n}\right)^2} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}} a.$$

于是 C 的最大值 $C_{\max} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$, 且当 $f(x) = x(x - a)(x - a/2)^{n-2}$ 时, $d(f') = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}d(f)$. (20分)

五、(常微分方程 15 分) 设 $f(x, y)$ 为 $[a, b] \times R$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 是可微函数, 且满足:

$$y' = f(x, y), \quad z' \leq f(x, z), \quad x \in [a, b].$$

已知 $z(a) \leq y(a)$. 求证: $z(x) \leq y(x), x \in [a, b]$.

证明: 用反证法. 设存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $z(x_0) > y(x_0)$. 令 $M = \{x \in [a, b] \mid z(x) > y(x)\}$, 则 M 为 $[a, b]$ 的非空开子集. (5分)

故存在开区间 $(\alpha, \beta) \subset M$ 满足

$$y(\alpha) = z(\alpha), \quad z(x) > y(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

这推出 $z(x) - y(x)$ 单调不增. 故 $z(x) - y(x) \leq z(\alpha) - y(\alpha) = 0$. 矛盾. (15分)

六、(复变函数 15 分) 设 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 是单位圆盘, 非常数函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 且当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 1$. 求证 $f(D) = D$.

证明 因为当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 1$, 所以根据极大模原理, 在 D 上有 $|f(z)| < 1$, 即, $f(D) \subset D$. (5分)

若存在 $a \in D$, 使得 $a \notin f(D)$, 则函数

$$g(z) = \frac{1 - \bar{a}f(z)}{f(z) - a}$$

以及 $1/g(z)$ 在 D 上解析, 并且容易验证当 $|z| = 1$ 时, $|g(z)| = 1$. (10分)

因此根据极大模原理, 在 D 上有 $|g(z)| \leq 1$, $|1/g(z)| \leq 1$. 这说明在 D 上有 $|g(z)| = 1$. 因为模为常数的解析函数是常数, 所以 $g(z)$ 在 D 上为常数, 从而 $f(z)$ 在 D 上为常数, 这与题设矛盾. 这就证明了 $f(D) = D$. (15分)

七、(实变函数 15 分) 设 E_k 是一列可测集, $f \in L(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)$.

1) 令 $A = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$, 证明 $\int_A f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k} f(x) dm$.

2) 令 $B = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$, 证明 $\int_B f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k} f(x) dm$.

3) 如果 $\{E_k\}$ 是单调的, 求证: $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = E$ 存在, 且有

$$\int_E f(x) dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dm.$$

证明 1) $A = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$,

其中 $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, 则 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$, (2分)

$\because f \in L_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} \Rightarrow f \in L_{F_n}, \forall n \geq 1 \Rightarrow f \in L_A$.

令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F_n \\ 0, & x \notin F_n. \end{cases}$$

i) $f_n(x)$ 可测, $\forall n \geq 1$;

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\chi_A(x), x \in \mathbb{R}$;

$\forall x \in \mathbb{R}$, 若 $x \in A$, 则 $f(x)\chi_A(x) = f(x)$, 又 $x \in A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n, \forall n \geq 1, f_n(x) = f(x)$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\chi_A(x)$. 若 $x \notin A, f(x)\chi_A(x) = 0$, 而 $x \notin A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n, \exists n_0, x \notin F_{n_0}, \{F_n\} \downarrow, \forall n \geq n_0, x \notin F_n, f_n(x) = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\chi_A(x)$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\chi_A(x)$.

iii) $|f_n(x)| \leq |f(x)|\chi_{F_1}(x), \forall n \geq 1$, 且 $|f(x)|\chi_{F_1}(x) \in L_{\mathbb{R}}$. (6分)

由控制收敛定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dm = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dm$.

即

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k} f(x) dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f(x) dm \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_A(x) dm \\ &= \int_A f(x) dm. \end{aligned} \quad (7分)$$

2) $B = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 这里

$$F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{n+1} \subset \cdots,$$

$f \in L_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} \Rightarrow f \in L_{F_n}, \forall n \geq 1 \Rightarrow f \in L_B$. (2分)

令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F_n \\ 0, & x \notin F_n. \end{cases}$$

- i) $f_n(x)$ 可测, $\forall n \geq 1$;
 ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in B$;
 iii) $|f_n(x)| \leq |f(x)|, x \in B$.

由控制收敛定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) dm = \int_B f(x) dm$.

即

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k} f(x) dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f(x) dm \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) dm \\ &= \int_B f(x) dm. \end{aligned} \quad (6分)$$

- 3) 若 $\{E_k\} \uparrow \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$.
 由 2) $F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = E_n$,

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dm. \quad (1分)$$

- 若 $\{E_k\} \downarrow \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E$.
 由 1) $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = E_n$,

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dm. \quad (2分)$$

八、(微分几何 15 分) 设 Γ 是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线, ℓ 是 Γ 的准线. 将 Γ 绕其准线 ℓ 旋转一周, 得到旋转面 S . 求 S 的两个主曲率的比值.

证明: 在空间选取坐标系, 使得准线 ℓ 为 z -轴, 抛物线 Γ 落在 Oxz 平面上, 且抛物线顶点为 $P = (p, 0, 0)$, 焦点为 $F = (2p, 0, 0)$. 由于抛物线上的任意点 $X = (x, 0, z)$ 满足 $|XF| = x$, 我们得到 $(x - 2p)^2 + z^2 = x^2$. 故抛物线方程为

$$x = p + \frac{1}{4p} z^2. \quad (5\text{分})$$

我们记 $f(z) = p + \frac{1}{4p} z^2$, 这时旋转面 S 的方程可表成

$$\gamma = \gamma(z, \theta) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma_\theta = (-f(z) \sin \theta, f(z) \cos \theta, 0);$$

$$\gamma_z = (f'(z) \cos \theta, f'(z) \sin \theta, 1);$$

则 S 的单位法向量为

$$n = \frac{1}{\sqrt{f'(z)^2 + 1}} (\cos \theta, \sin \theta, -f'(z));$$

$$\gamma_{\theta\theta} = (-f(z) \cos \theta, -f(z) \sin \theta, 0);$$

$$\gamma_{\theta z} = (-f'(z) \sin \theta, f'(z) \cos \theta, 0);$$

$$\gamma_{zz} = (f''(z) \cos \theta, f''(z) \sin \theta, 0).$$

于是, 旋转面的第一基本形式 $I = E d\theta^2 + 2F d\theta dz + G dz^2$ 和第二基本形式 $II = L d\theta^2 + 2M d\theta dz + N dz^2$ 为:

$$E = f(z)^2, \quad F = 0, \quad G = f'(z)^2 + 1;$$

$$L = -\frac{f(z)}{\sqrt{f'(z)^2 + 1}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f''(z)}{\sqrt{f'(z)^2 + 1}}. \quad (10\text{分})$$

因为 $k_1 = L/E, k_2 = N/G$, 我们得到

$$k_1/k_2 = LG/EN = -\frac{f'(z)^2 + 1}{f(z)f''(z)} = -2. \quad (15\text{分})$$

注: 根据 k_1 和 k_2 的不同排序, 也可以 $k_1/k_2 = -1/2$.

九、(概率统计 15 分) 一只盒子中装有标上 1 至 N 的 N 张票券, 有放回地一张一张地抽取, 若我们想收集 r 张不同的票券, 则要期望抽多少次才能得到它们? 当然假设取得每张票券是等可能的, 各次抽取是独立的.

解 这个问题可以看作是一种等待时间问题. 我们等待第 r 张新票券出现. 以 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 依次表示对一张新票券的等待时间. 因为第一次抽到的总是新的, 所以 $\xi_1 = 1$. 于是 ξ_2 就是抽到任一张不同于第一次抽出的那张票券的等待时间. 由于这次抽时仍有 N 张票券, 但新的只有 $N - 1$ 张, 因此成功的概率为 $p = \frac{N-1}{N}$. 于是, ξ_2 的分布列为

$$P(\xi_2 = n) = \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

从而

$$E\xi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2} = \frac{N}{N-1}. \quad (4\text{分}).$$

在收集到这两张不同的票券之后, 对第三张新票券的等待时间其成功的概率为 $p = \frac{N-2}{N}$. 因此

$$E\xi_3 = \frac{N}{N-2}.$$

依此类推. 对 $1 \leq r \leq N$, 我们得到

$$\begin{aligned} E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r) &= \frac{N}{N} + \frac{N}{N-1} + \dots + \frac{N}{N-r+1} \\ &= N \left(\frac{1}{N-r+1} + \dots + \frac{1}{N} \right). \end{aligned} \quad (8\text{分})$$

特别, 若 $r = N$ 时, 则

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = N \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right).$$

若 N 是偶数, $r = \frac{N}{2}$ 时, 则

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\frac{N}{2}}) = N \left(\frac{1}{\frac{N}{2}+1} + \dots + \frac{1}{N} \right). \quad (12\text{分})$$

由欧拉公式 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + C + \varepsilon_N$, 其中 C 是欧拉常数, ε_N 为 N 趋于无穷时的无穷小量. 由于

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln N} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right) = 1.$$

于是, 当 N 充分大时, 我们可得近似公式 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \approx \ln N$. 因而

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = N \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right) \approx N \ln N.$$

$$\begin{aligned}
E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\frac{N}{2}}) &= N \left(\frac{1}{\frac{N}{2} + 1} + \cdots + \frac{1}{N} \right) \\
&= 2r \left(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{2r} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} \right) \\
&\quad - 2r \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} \right) \\
&\approx 2r \ln 2r - 2r \ln r = N \ln 2,
\end{aligned}$$

即

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\frac{N}{2}}) \approx N \ln 2 \approx 0.69315N. \quad (15\text{分})$$

这说明如果只要收集一半票券, 或只要稍多于票半数的抽取次数即可.

十、(抽象代数 15 分) 设群 $G = AB$, 其中 A, B 均为 G 的 Abel 子群, 且 $AB = BA$. $\forall g_1, g_2 \in G$, 用 $[g_1, g_2]$ 表示换位子, 即, $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, G' 表示 G 的换位子群 (即由 G 的换位子所生成的子群). 证明:

(a) $\forall a, x \in A, \forall b, y \in B$ 有下式成立:

$$[x^{-1}, y^{-1}][a, b][x^{-1}, y^{-1}]^{-1} = [a, b].$$

(b) G' 为 Abel 群.

证明: (a). 在 (a) 的条件下, 要证明 $[x^{-1}, y^{-1}][a, b][x^{-1}, y^{-1}]^{-1} = [a, b]$, 即要证明 $x^{-1}y^{-1}xyaba^{-1}b^{-1}y^{-1}x^{-1}yx = aba^{-1}b^{-1}$.

由已知 $AB = BA$ 可得: 存在 A 中的元素 a^*, x^*, B 中的元素 b^*, y^* 使得

$$ya = a^*y^*, \quad xb = b^*x^*.$$

于是有

$$\begin{aligned} (1) \quad & yaba^{-1}b^{-1}y^{-1} = a^*y^*ba^{-1}b^{-1}y^{-1} \quad (\text{由 } ya = a^*y^*) \\ & = a^*by^*a^{-1}b^{-1}y^{-1} \\ & = a^*ba^{*-1}yb^{-1}y^{-1} \quad (\text{由 } y^*a^{-1} = a^{*-1}y) \\ & = a^*ba^{*-1}b^{-1} = [a^*, b]. \end{aligned} \quad (5\text{分})$$

(2) 类似可证:

$$\begin{aligned} x[a^*, b]x^{-1} &= [a^*, b^*], \\ y^{-1}[a^*, b^*]y &= [a, b^*], \\ x^{-1}[a, b^*]x &= [a, b]. \end{aligned}$$

如所需. (a) 获证. (10分)

(b). 任取 G 的一个换位子 $[a_1b_1, b_2a_2]$, $a_i \in A, b_i \in B, i = 1, 2$. 有

$$\begin{aligned} [a_1b_1, b_2a_2] &= a_1b_1b_2a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1} \\ &= a_1b_1\underbrace{a_1^{-1}b_1^{-1}}_{[a_1, b_1]^{-1}}\underbrace{b_1a_1}_{[a_1, b_1]}b_2a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1} \\ &= [a_1, b_1]b_1a_1b_2\underbrace{a_1^{-1}b_2^{-1}b_2a_1}_{[a_1, b_2]^{-1}}a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1} \\ &= [a_1, b_1]b_1a_1b_2a_1^{-1}b_2^{-1}\underbrace{b_1^{-1}b_1}_{[a_1, b_2]}b_2a_1a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1} \\ &= [a_1, b_1][a_1^*, b_2]\underbrace{b_1b_2a_1a_2b_1^{-1}}_{[a_1^*, b_2]^{-1}}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1} \\ &= [a_1, b_1][a_1^*, b_2]\underbrace{b_1b_2a_1a_2b_1^{-1}a_2^{-1}a_1^{-1}b_1b_1^{-1}b_2^{-1}}_{[(a_1a_2)^*]^{-1}} \\ &= [a_1, b_1][a_1^*, b_2][(a_1a_2)^*, b_1^{-1}], \text{ 其中 } (a_1a_2)^* \text{ 为 } A \text{ 中的某元.} \end{aligned}$$

这样, $G' = \langle \{[a, b] : a \in A, b \in B\} \rangle$, 从而由 (a) 可知, G' 为 Abel 群.

(15分)

十一、(数值分析 15 分) 给定多项式序列

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots$$

求证: (1) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

(2) 设 $C[-1, 1]$ 是区间 $[-1, 1]$ 上连续函数构成的内积空间, 其中内积定义为

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

则 $T_n(x)$ 是该内积空间的正交多项式, 即当 $n \neq m$ 时 $\langle T_n(x), T_m(x) \rangle = 0$.

(3) 设 $P(x)$ 是次数为 n 的首项系数为 1 的多项式. 求证:

$$\|P(x)\|_{\infty} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

且等号成立当且仅当 $P(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, 这里 $\|P(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$.

证明

(1) 用归纳法. 当 $n = 0, 1$ 时, 结论显然. 设 $n \leq k$ 时, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

当 $n = k + 1$ 时, 令 $x = \cos(\theta)$, 则

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) = 2\cos(\theta)\cos(k\theta) - \cos((k-1)\theta) \\ &= \cos((k+1)\theta) = \cos((k+1)\arccos(x)) \end{aligned}$$

(4 分)

(2)

$$\langle T_n(x), T_m(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

令 $x = \cos(\theta)$, 上述积分化为

$$\int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{\sin(\theta)} d(\cos(\theta)) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta) d\theta$$

当 $n \neq m$ 时, 上述积分为零. (8 分)

(3) 注意以下事实: $T_n(x)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的 n 次多项式, $\|T_n(x)\|_{\infty} = 1$, 且 $T_n(x)$ 在 $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ 处达到极值, 即 $T_n(x_k) = (-1)^k$, $k = 0, 1, \dots, n$. 现假设 $\|p(x)\|_{\infty} < \frac{1}{2^{n-1}}$. 考虑函数 $q(x) = p(x) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$. 则 $q(x)$ 在 x_k 处的符号与 $T_n(x)$ 在 x_k 处的符号相反, 即为 $(-1)^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$. 于是 $q(x)$ 至少有 n 个零点. 但是 $q(x)$ 次数小于 n , 这是不过能的! 因此, $\|p(x)\|_{\infty} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. (13 分)

当 $\|p(x)\|_{\infty} = \frac{1}{2^{n-1}}$ 时, 可证 $q(z)$ 至少有 n 个零点, 从而 $q(x) \equiv 0$, 即 $p(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_{n-1}(x)$. (15 分)