

第五届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷解答
(数学类, 2014年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $P = (a, b, c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2 + b^2 > 2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

证明 设 ℓ 是过 P 点的抛物面 S 的一条切线, 它的方向向量为 $V = (u, v, w)$. 则切点可表成 $Q = P + tV = (a + tu, b + tv, c + tw)$, 其中 t 是二次方程

$$2(c + tw) = (a + tu)^2 + (b + tv)^2,$$

也就是

$$(u^2 + v^2)t^2 + 2(au + bv - w)t + (a^2 + b^2 - 2c) = 0$$

的唯一重根. (5分)

这时,

$$(au + bv - w)^2 = (u^2 + v^2)(a^2 + b^2 - 2c),$$

$$t = \frac{w - au - bv}{u^2 + v^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2c}{w - au - bv}. \quad (10分)$$

于是切点 $Q = (X, Y, Z) = (a + tu, b + tv, c + tw)$ 满足

$$aX + bY - Z = (a^2 + b^2 - c) + t(au + bv - w) = c. \quad (15分)$$

于是所有切点 Q 落在平面 $ax + by - z = c$ 上.

二、(本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$, 其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & a_0 & 2 & -2 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix},$$

$a_0, a, b, c, d, e, f, g, h, k$ 皆为实数. 已知 $\lambda_1 = 2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(i) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.

(ii) 当 $a_0 = 2$ 时, 试求 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换下的标准型.

证明 (i) 由于 $\text{tr}(A)$ 是 A 的特征值之和, 得 λ_1 的代数重数也是 3, 而 A 的另一个特征值 $\lambda_2 = 0$, 且 $\lambda_2 = 0$ 的代数重数为 1. 结果 A 有四个线性无关的特征向量. 故 A 可对角化. (5分)

(ii) 由于 $\lambda_1 = 2$ 的重数为 3, 故有

$$\text{rank}(A - 2E) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ a & -2 & b & c \\ d & e & -2 & f \\ g & h & k & 2 \end{pmatrix} = 1. \quad (7\text{分})$$

进而 $a/0 = -2/2 = b/2 = c/-2$, 得 $a = 0, b = -2, c = 2$; $d/0 = e/2 = -2/2 = f/-2$, 得 $d = 0, e = -2, f = 2$; $g/0 = h/2 = k/2 = 2/-2$, 得 $g = 0, h = -2, k = -2$. 于是,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (10\text{分})$$

注意到 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x = x^T B x$, 其中

$$B = \frac{A + A^T}{2}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 $\lambda_1 = 2$ (二重), $\lambda_2 = 1 + 2\sqrt{3}$ (一重), $\lambda_3 = 1 - 2\sqrt{3}$ (一重). 故 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换下的标准型为

$$2y_1^2 + 2y_2^2 + (1 + 2\sqrt{3})y_3^2 + (1 - 2\sqrt{3})y_4^2. \quad (15\text{分})$$

三、(本题 15 分) 设 n 阶实方阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 有 n 个线性

性无关的特征向量, $b_1, \dots, b_{n-1}$ 均不为 0. 记 $W = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid XA = AX\}$.

证明: W 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 且 $I, A, \dots, A^{n-1}$ 为其一组基, 其中 I 为 n 阶单位阵.

证明 (1). A 有 n 个线性无关的特征向量, 故 A 可对角化. 设 λ_0 是 A 的一个特征值, 考察 $A - \lambda_0 I$, 它有一个 $n - 1$ 阶子式不为 0, 结果, $\text{rank}(A - \lambda_0 I) = n - 1$. 故 λ_0 的重数为 1, 从而 A 有 n 个各不相同的特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. (2分)

(2) $\forall X_1, X_2 \in W, \forall \mu \in \mathbb{R}$, 显见 $X_1 + \mu X_2 \in W$, 故 W 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.

$$\begin{aligned} \text{让 } A &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ 于是方程} \\ XA &= AX \Leftrightarrow XP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}X \\ \Leftrightarrow P^{-1}XP &\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}XP. \end{aligned} \quad (8\text{分}).$$

故若记

$$V = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Y \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} Y \right\},$$

则 W 与 V 有线性同构 $\sigma: X \rightarrow P^{-1}XP$, 从而 $\dim V = \dim W$. 注意到

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \mid d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R} \right\}, \text{ 故 } \dim V = \dim W = n. \quad (12\text{分})$$

(3) 显然, $I, A, \dots, A^{n-1} \in W$. 下证 $I, A, \dots, A^{n-1}$ 线性无关. 事实上, 若 $x_0 I + x_1 A + \cdots + x_{n-1} A^{n-1} = 0$, 则得

$$x_0 + x_1 \lambda_1 + \cdots + x_{n-1} \lambda_1^{n-1} = 0$$

.....

$$x_0 + x_1 \lambda_n + \cdots + x_{n-1} \lambda_n^{n-1} = 0$$

其系数行列式为范德蒙行列式. 由 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 各不相同, 故 $I, A, \dots, A^{n-1}$ 线性无关, 即 $I, A, \dots, A^{n-1}$ 为其一组基. 证毕. (15分)

四、(本题 15 分) 设 $f(x, y)$ 为 $[a, b] \times R$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 是可微函数, 且满足:

$$y' = f(x, y), \quad z' \leq f(x, z), \quad x \in [a, b].$$

已知 $z(a) \leq y(a)$. 求证: $z(x) \leq y(x), x \in [a, b]$.

证明: 用反证法. 设存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $z(x_0) > y(x_0)$. 令 $M = \{x \in [a, b] \mid z(x) > y(x)\}$, 则 M 为 $[a, b]$ 的非空开子集. (5分)

故存在开区间 $(\alpha, \beta) \subset M$ 满足

$$y(\alpha) = z(\alpha), \quad z(x) > y(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

这推出 $z(x) - y(x)$ 单调不增. 故 $z(x) - y(x) \leq z(\alpha) - y(\alpha) = 0$. 矛盾. (15分)

五、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可导函数, $f(0) = 0$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha > 1$, $\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx$ 也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx \leq \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^\beta, \quad \beta = \frac{\alpha + 1}{2}.$$

证明 令

$$g(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^\beta - \int_0^t f^\alpha(x) dx, \quad (5\text{分})$$

则 $g(t)$ 可导, 且

$$g'(t) = f(t) \left[\beta \left(\int_0^t f(x) dx \right)^{\beta-1} - f^{\alpha-1}(t) \right].$$

令

$$h(t) = \beta^{\frac{1}{\beta-1}} \int_0^t f(x) dx - f^2(t). \quad (10\text{分})$$

则有

$$h'(t) = f(t) \left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}} - 2f'(t) \right].$$

由于 $\beta > 1$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$, 我们有 $h'(t) \geq 0$. 这说明 $h(t)$ 单调递增, (15分)

从 $h(0) = 0$, 得 $h(t) \geq 0$. 因而 $g'(t) \geq 0$. 再从 $g(0) = 0$, 可得 $g(t) \geq 0$, 即

$$\int_0^t f^\alpha(x) dx \leq \left(\int_0^t f(x) dx \right)^\beta.$$

令 $t \rightarrow +\infty$, 即得所证. (20分)

六、(本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 记 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geq 2$ 为自然数. 求最大实数 C , 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有 $d(f') \geq Cd(f)$.

证明 $C_{\max} = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$. (2分)

不妨 $f(x)$ 的最小实根为 0, 最大实根为 a . 设

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad 0 = x_1 \leq x_2, \cdots, x_{n-1} \leq x_n = a.$$

先证以下

引理: 若存在 $2 \leq k, m \leq n-1$ 使得 $x_k < x_m$, 令 $x_k < x'_k \leq x'_m < x_m$ 满足 $x_k + x_m = x'_k + x'_m$, 令

$$f_1(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \cdots (x - x'_n), \quad x'_i = x_i, \quad i \neq k, m.$$

则有 $d(f'_1) \leq d(f')$. (5分)

证明: 注意到 $f(x) = f_1(x) - \delta F(x)$, 其中

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{(x - x'_k)(x - x'_m)}, \quad \delta = x'_k x'_m - x_k x_m > 0.$$

设 α 和 β 分别为 $f'_1(x)$ 的最大和最小实根, 则有 $f_1(\alpha) \leq 0$, $f_1(\beta)(-1)^n \leq 0$. 由罗尔定理 $\alpha \geq x_m, \beta \leq x_k$, 并且

$$f'(\alpha) = \delta \frac{(2\alpha - x'_k - x'_m)}{(\alpha - x'_k)^2(\alpha - x'_m)^2} f_1(\alpha).$$

则 $f'(\alpha)f_1(\alpha) \geq 0$. 故 $f'(\alpha) \leq 0$. 这表明 $f'(x) = 0$ 的最大实根大于或等于 α . 同理, $f'(x) = 0$ 最小实根小于或等于 β . 引理证毕. (12分)

令

$$g(x) = x(x - a)(x - b)^{n-2}, \quad b = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到 $d(f') \geq d(g')$. (15分)

由于

$$g'(x) = (x - b)^{n-3}(nx^2 - ((n-1)a + 2b)x + ab),$$

$$d(g') = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{n} + \left(\frac{a-2b}{n}\right)^2} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}} a.$$

于是 C 的最大值 $C_{\max} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$, 且当 $f(x) = x(x - a)(x - a/2)^{n-2}$ 时, $d(f') = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}d(f)$. (20分)