

姓名: \_\_\_\_\_

准考证号: \_\_\_\_\_

所在院校: \_\_\_\_\_

考生座位号: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_

密封线 答题时不要超过此线

第五届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷  
(数学类, 2014年3月)

考试形式: 闭卷    考试时间: 180 分钟    满分: 100 分

|    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 题号 | 一  | 二  | 三  | 四  |    |    | 总分  |
| 满分 | 15 | 15 | 20 | 20 | 15 | 15 | 100 |
| 得分 |    |    |    |    |    |    |     |

- 注意: 1. 前 4 题是必答题, 再从 5-11 题中任选两题, 题号要填如上面的表中.  
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.  
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.  
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

一、(本题 15 分) 设  $S$  为  $\mathbb{R}^3$  中的抛物面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,  $P = (a, b, c)$  为  $S$  外一固定点, 满足  $a^2 + b^2 > 2c$ . 过  $P$  作  $S$  的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

二、(本题 15 分) 设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$ , 其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & a_0 & 2 & -2 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix},$$

$a_0, a, b, c, d, e, f, g, h, k$  皆为实数. 已知  $\lambda_1 = 2$  是  $A$  的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

- (i)  $A$  能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.
- (ii) 当  $a_0 = 2$  时, 试求  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  在正交变换下的标准型.

姓名: \_\_\_\_\_ 准考证号: \_\_\_\_\_ 所在院校: \_\_\_\_\_ 考生座位号: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

密封线 答题时不要超过此线

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

三、(本题 20 分) 设  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上非负可导函数,  $f(0) = 0, f'(x) \leq \frac{1}{2}$ . 假设  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 求证: 对任意  $\alpha > 1, \int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx$  也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx \leq \left( \int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^\beta, \quad \beta = \frac{\alpha+1}{2}.$$

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

四、(本题 20 分) 对多项式  $f(x)$ , 记  $d(f)$  为其最大和最小实根之间的距离. 设  $n \geq 2$  为自然数. 求最大实数  $C$ , 使得对任意所有根都是实数的  $n$  次多项式  $f(x)$ , 都有  $d(f') \geq Cd(f)$ .

密封线 答题时不要超过此线

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

五、(常微分方程 15 分) 设  $f(x, y)$  为  $[a, b] \times \mathbb{R}$  上关于  $y$  单调下降的二元函数. 设  $y = y(x)$  和  $z = z(x)$  是可微函数, 且满足:

$$y' = f(x, y), \quad z' \leq f(x, z), \quad x \in [a, b].$$

已知  $z(a) \leq y(a)$ . 求证:  $z(x) \leq y(x), x \in [a, b]$ .

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

六、(复变函数 15 分) 设  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  是单位圆盘, 非常数函数  $f(z)$  在  $\overline{D}$  上解析, 且当  $|z| = 1$  时,  $|f(z)| = 1$ . 求证  $f(D) = D$ .



|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

七、(实变函数 15 分) 设  $E_k, k = 1, 2, \dots$  是一列可测集,  $f \in L(\bigcup_{k=1}^\infty E_k)$ .

1) 令  $A = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$ , 证明  $\int_A f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{k=n}^\infty E_k} f(x)dm$ .

2) 令  $B = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$ , 证明  $\int_B f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcap_{k=n}^\infty E_k} f(x)dm$ .

3) 如果  $\{E_k\}$  是单调的, 求证:  $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = E$  存在, 且有

$$\int_E f(x)dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x)dm.$$

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

八、(微分几何 15 分) 设  $\Gamma$  是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线,  $\ell$  是  $\Gamma$  的准线. 将  $\Gamma$  绕其准线  $\ell$  旋转一周, 得到旋转面  $S$ . 求  $S$  的两个主曲率的比值.



|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

九、(概率统计 15 分) 一只盒子中装有标上 1 至  $N$  的  $N$  张票券, 有放回地一张一张地抽取, 若我们想收集  $r$  张不同的票券, 则要期望抽多少次才能得到它们? 当然假设取得每张票券是等可能的, 各次抽取是独立的.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

十、(抽象代数 15 分) 设群  $G = AB$ , 其中  $A, B$  均为  $G$  的 Abel 子群, 且  $AB = BA$ .  $\forall g_1, g_2 \in G$ , 用  $[g_1, g_2]$  表示换位子, 即,  $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ ,  $G'$  表示  $G$  的换位子群 (即由  $G$  的换位子所生成的子群). 证明:

(a)  $\forall a, x \in A, \forall b, y \in B$  有下式成立:

$$[x^{-1}, y^{-1}][a, b][x^{-1}, y^{-1}]^{-1} = [a, b].$$

(b)  $G'$  为 Abel 群.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

十一、(数值分析 15 分) 给定多项式序列

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

- 求证: (1) 当  $x \in [-1, 1]$  时,  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .  
 (2) 设  $C[-1, 1]$  是区间  $[-1, 1]$  上连续函数构成的内积空间, 其中内积定义为
- $$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
- 则  $T_n(x)$  是该内积空间的正交多项式, 即当  $n \neq m$  时  $\langle T_n(x), T_m(x) \rangle = 0$ .  
 (3) 设  $P(x)$  是次数为  $n$  的首项系数为 1 的多项式. 求证:

$$\|P(x)\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

且等号成立当且仅当  $P(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ , 这里  $\|P(x)\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$ .