

第五届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2013年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 15 分) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周(无滑动)滚动一周, 这时, C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以 P 的初始位置(切点)为圆心的圆, 其半径为 R . 记 $\gamma: \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换, 它将 $Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q' , 满足 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$. 求证: $\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

证明 以 C_1 的圆心 O 为原点建立直角坐标系, 使得初始切点 $P = (0, r)$. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周(无滑动)滚动到 Q 点, 记角 $\angle POQ = \theta$, 则 $Q = (r \sin \theta, r \cos \theta)$. 令 l_Q 为 C_1 在 Q 点的切线, 它的单位法向为 $\vec{n} = (\sin \theta, \cos \theta)$. 这时, P 点运动到 P 关于直线 l_Q 的对称点 $P' = P(\theta)$ 处. 于是, 有

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n})\vec{n}. \quad (5\text{分})$$

故 P 点的运动轨迹曲线(心脏线)为

$$P(\theta) = P' = (2r(1 - \cos \theta) \sin \theta, r + 2r(1 - \cos \theta) \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (8\text{分})$$

容易得到, 圆 C 的反演变换的坐标表示为

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, r) + \frac{R^2}{x^2 + (y - r)^2} (x, y - r). \quad (11\text{分})$$

将 $(x, y) = P(\theta)$ 代人, 得到

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{R^2 \sin \theta}{2r(1 - \cos \theta)}, \frac{R^2 \cos \theta}{2r(1 - \cos \theta)} + r \right). \quad (13\text{分})$$

直接计算, 得到抛物线方程

$$\tilde{y} = \frac{r}{R^2} \tilde{x}^2 + \left(r - \frac{R^2}{4r} \right). \quad (15\text{分})$$

二、(本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n \times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t) = (b_{ij}(t))$ 和 $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, 其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X = b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组, 试证明: $d(t), d_1(t), \dots, d_n(t)$ 必有次数 ≥ 1 的公因式.

证明 设 $B(t)$ 的第 i 列为 $B_i(t), i = 1, 2, \dots, n$. 断言: $t - t_0$ 是 $d(t), d_1(t), \dots, d_n(t)$ 的公因式. 反证. 不失一般性, 设 $d_1(t_0) \neq 0$, 于是

$$\text{秩}[B(t_0), b(t_0)] = n, \text{ 因为 } d_1(t_0) \neq 0. \quad (5 \text{ 分})$$

注意到秩 $B(t_0) \leq n - 1$, 结果

$$\text{增广阵}[B(t_0), b(t_0)] \text{ 的秩} \neq B(t_0) \text{ 的秩}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{从而 } B(t_0)X = b(t_0) \text{ 不相容. 矛盾. 证毕.} \quad (10 \text{ 分})$$

六、(本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 为 n 阶实方阵全体, E_{ij} 为 (i, j) 位置元素为 1 其余位置元素为 0 的 n 阶方阵, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 让 Γ_r 为秩等于 r 的实 n 阶方阵全体, $r = 0, 1, 2, \dots, n$, 并让 $\phi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 为可乘映照, 即满足: $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B), \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 试证明:

$$(1) \forall A, B \in \Gamma_r, \text{秩}\phi(A) = \text{秩}\phi(B).$$

(2) 若 $\phi(0) = 0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 W 使得 $\phi(W) \neq 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$ 对一切 E_{ij} 皆成立, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{证明: (1) } A, B \in \Gamma_r \text{ 表明 } A \text{ 可表为 } A = PBQ, \text{ 其中 } P, Q \text{ 可逆.} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{结果 } \phi(A) = \phi(P)\phi(B)\phi(Q), \text{ 从而 } \text{秩}\phi(A) \leq \text{秩}\phi(B). \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{对称地有 } \text{秩}\phi(B) \leq \text{秩}\phi(A). \text{ 即有, } \text{秩}\phi(A) = \text{秩}\phi(B). \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 考察矩阵集合 $\{\phi(E_{ij}) | i, j = 1, 2, \dots, n\}$. 先考察 $\phi(E_{11}), \dots, \phi(E_{nn})$. 由 (1) 知 $\phi(E_{ij})$ 为非零阵, 特别地, $\phi(E_{ii})$ 为非零幂等阵, 故存在单位特征向量 w_i 使得

$$\phi(E_{ii})w_i = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{从而得向量组: } w_1, w_2, \dots, w_n. \quad (7 \text{ 分})$$

此向量组有如下性质:

$$\text{a) } \phi(E_{ii})w_k = \begin{cases} \phi(E_{ii})\phi(E_{kk})w_k = \phi(E_{ii}E_{kk})w_k = 0, & k \neq i \text{ 时} \\ w_i, & k = i \text{ 时.} \end{cases}$$

b) $w_1, w_2, \dots, w_n$ 线性无关, 从而构成 $\mathbb{R}^n$ 的基, 矩阵 $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ 为可逆阵. 事实上, 若 $x_1w_1 + \dots + x_nw_n = 0$, 则在两边用 $\phi(E_{ii})$ 作用之, 得 $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. (11 分)

$$\text{c) 当 } k \neq j \text{ 时, } \phi(E_{ij})w_k = \phi(E_{ij})\phi(E_{kk})w_k = \phi(E_{ij}E_{kk})w_k = 0;$$

$$\text{当 } k = j \text{ 时, 令 } \phi(E_{ij})w_k = b_{1j}w_1 + \dots + b_{ij}w_i + \dots + b_{nj}w_n. \text{ 两边分别用}$$

$\phi(E_{11}), \dots, \phi(E_{i-1 \ i-1}), \phi(E_{i+1 \ i+1}), \dots, \phi(E_{nn})$ 作用之, 得

$$0 = \phi(E_{11}E_{ij})w_j = \phi(E_{11})\phi(E_{ij})w_k = b_{1j}w_1, \dots,$$

$$0 = \phi(E_{nn}E_{ij})w_j = \phi(E_{nn})(b_{1j}w_1 + \dots + b_{ij}w_i + \dots + b_{nj}w_n) = b_{nj}w_n,$$

即有

$$b_{1j} = \dots = b_{i-1 \ j} = b_{i+1 \ j} = \dots = b_{nj} = 0.$$

从而 $\phi(E_{ij})w_j = b_{ij}w_i$, 进一步, $b_{ij} \neq 0$, 否则有 $\phi(E_{ij})[w_1, \dots, w_n] = 0$, 导致 $\phi(E_{ij})$ 为零阵, 不可能. (15 分)

这样通过计算 $\phi(E_{ij})w_j \ i, j = 1, 2, \dots, n$, 我们得到 n^2 个非零的实数:

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

注意到 $E_{mr}E_{rs} = E_{ms}$, 从而

$$b_{ms}w_m = \phi(E_{ms})w_s = \phi(E_{mr})\phi(E_{rs})w_s = \phi(E_{mr})b_{rs}w_r = b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有 $b_{mr}b_{rs} = b_{ms}$. (17 分)

最后, 令 $v_i = b_{i1}w_i, \ i = 1, 2, \dots, n$. 则有

$$\phi(E_{ij})v_k = \begin{cases} 0, & k \neq j \text{ 时} \\ \phi(E_{ij})b_{j1}w_j = b_{j1}b_{ij}w_i = b_{i1}w_i = v_i, & k = j \text{ 时.} \end{cases} \quad (21 \text{ 分})$$

令 $R = [v_1, \dots, v_n]$, 则 $R = [w_1, \dots, w_n] \begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n1} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 且

$$\phi(E_{ij})R = \phi(E_{ij})[v_1, \dots, v_n] = [0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0] = [v_1, \dots, v_n]E_{ij}$$

即, $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$. 证毕. (25 分)

三、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$, 且 $0 < f(x) < x, x \in (0, a)$. 令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in (0, a).$$

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

证明 (1) 由条件 $0 < x_2 = f(x_1) < x_1$, 归纳地可证得 $0 < x_{n+1} < x_n$, 于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 x_0 . 由 f 的连续性, 及 $x_{n+1} = f(x_n)$ 得 $x_0 = f(x_0)$. 又因为当 $x > 0$ 时, $f(x) < x$, 所以只有 $x_0 = 0$. 即, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. (5 分)

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} && (8 \text{分}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{-f''(x)} \\ &= -\frac{2}{f''(0)} && (15 \text{分}) \end{aligned}$$

四、(本题 15 分) 设 $a > 1$, 函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

证明 若结论不对, 则存在 $x_0 > 0$ 使得当 $x \geq x_0$ 时, 有 $f'(x) \geq f(ax) > 0$. (5 分)
于是当 $x > x_0$ 时, $f(x)$ 严格递增, 且由微分中值定理

$$\begin{aligned} f(ax) - f(x) &= f'(\xi)(a-1)x \geq f(a\xi)(a-1)x \\ &> f(ax)(a-1)x. \end{aligned}$$

但这对于 $x > \frac{1}{a-1}$ 是不能成立的. (10 分)

五、(本题 20 分) 设 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为偶函数, f 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1, 1]$ 上的凸函数, 即对任意 $x, y \in [-1, 1]$ 及 $t \in (0, 1)$ 有

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

求证: $2 \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \geq \int_{-1}^1 f(x) dx \int_{-1}^1 g(x) dx.$

证明 由于 f 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x) dx. \quad (2\text{分})$$

因而

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x)(g(x) + g(-x)) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x)(g(x) + g(-x)) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

(7分)

因为 $g(x)$ 为凸函数, 所以函数 $h(x) = g(x) + g(-x)$ 在 $[0, 1]$ 上递增. (10分)

故对任意 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$(f(x) - f(y))(h(x) - h(y)) \geq 0.$$

因而

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))(h(x) - h(y)) dx dy \geq 0. \quad (15\text{分})$$

由此可得

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 f(x)h(x) dx &\geq 2 \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx \cdot \int_{-1}^1 h(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx \cdot \int_{-1}^1 g(x) dx. \end{aligned} \quad (20\text{分})$$

结合 (1) 即得结论.