

第三届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷
(数学类, 2011)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分 满分: 100 分

题 目	1	2	3	4	5	6	7	总分
满 分	15	10	15	10	15	20	15	100
得 分								

- 注意: 1. 所有答题都必须写在此试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标记题号.

得 分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 已知四点 $A(1, 2, 7)$, $B(4, 3, 3)$, $(5, -1, 6)$, $(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$. 试求过这四点的球面方程.

得 分	
评阅人	

二、 (本题 10 分) 设 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 为 $[0, 1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0, 1]$ 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

密

封

线

得 分	
评阅人	

三、 (本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma : F^n \rightarrow F^n$ 是一个线性变换. 若对 F 上的任何 n 阶方阵 A , $\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha)$, $(\forall \alpha \in F^n)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示 F^n 上的恒等变换.

得 分	
评阅人	

四、(本题 10 分) 对于 $\triangle ABC$, 求 $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$ 的最大值.

密 封 线

得 分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 对于任何实数 α , 求证: 存在取值于 $\{-1, 1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

得 分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

密 封 线

得 分	
评阅人	

七、(本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0$.
证明: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$,
(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt = 0$.