平面和空间的等距变换

林　磊

(华东师范大学数学科学学院，上海　200241)

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》[1] 将我国高中数学课程的结构设计为：必修课程、选择性必修课程、选修课程三种. 而选修课程又根据学生未来专业兴趣的不同，分为 A、B、C、D、E 五类，其中 A 类课程供有志于学习数理类(如数学、物理、计算机、精密仪器等)专业的学生所选择. A 类课程包括微积分、空间向量与代数、概率与统计三个专题，共 6 学分. 其中空间向量与代数占 2 学分，内容包括：空间向量代数、三阶矩阵与行列式、三元一次方程组、空间中的平面与直线和等距变换五个部分. 由于前四个部分的内容在目前的高中教学中多少有所涉及，而等距变换的内容则极少提及，因此有必要对这部分内容的基础知识作一简要介绍.

1　等距变换

等距变换这部分的内容，主要介绍平面或空间的一种特殊变换——等距变换. 所谓集合 A 的变换 f，就是集合 A 到 A 的映射，也即 A 到其自身的映射. 所以，平面变换就是平面到平面自身的一个映射，而空间变换就是空间到其自身的一个映射. 因此，泛泛来讲平面变换或空间变换，范围相当广泛. 那我们为什么要来特别介绍等距变换呢？它是怎样的变换？为什么说直线反射、平移、旋转是三种基本的平面等距变换？下面，我们先来讨论这些问题.

回忆初中数学课程中有关平面几何的内容，其中全等是平面几何中的基本概念. 那么我们如何来向学生介绍两个平面图形 A 与 B 全等呢？通常我们会说，如果能将图形 A 通过若干“适当的变换”变为与图形 B 重合，那么图形 A 与图形 B 是全等的. 那这些“适当的变换”是些什么变换呢？其实就是上面提到的直线反射、平移、旋转这三种基本的变换，以及由基本变换的乘积构成的变换(参见文献[2]). 可见，直线反射、平移、旋转这三种变换在平面几何中占有重要的作用. 可是，我们为什么要选用这三种变换，而不用其他的变换呢？它们有什么共同点？是不是还有可能再减少基本变换的种数，比如：用两种？甚至更少，只用一种？估计学生们大多没有思考过，甚至我们的教师们思考过的也不多. 其实，上述这三种变换的共性，就是保持变换前后两点间的距离不变，即所谓的等距变换. 确切地说，设 f 是平面 π 的变换，如果对平面 π 中的任意两个(位置)向量 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$，有

$$|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|,$$

则称变换 f 是平面 π 的等距变换. 而如果存在一个等距变换 f，使得图形 A 经变换 f 后与图形 B 重合，就称图形 A 与 B 全等. 可以证明，一个变换如果保持变换前后两点间的距离不变，那么它必定将直线变为直线，且保持变换前后两直线间的夹角不变，因此，这样的变换一定既保持图形的大小不变，也保持图形的形状不变，这就是说，变换前后的两图形是全等的.

我们先来介绍一下等距变换的简单性质[3].

(i) 恒等变换 Id 是等距变换；

(ii) 两个等距变换的乘积仍是等距变换；

(iii) 等距变换是可逆变换，且其逆变换也是等距变换；

(iv) 平移变换是等距变换.

性质(i)、(ii)的证明比较简单，略过. 现在来考虑性质(iii). 设 f 是平面 π 的任意等距变换. 如果 $f(\vec{\alpha})=f(\vec{\beta})$，那么

$$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|=|\vec{0}|=0,$$

于是，$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$，从而f是单射. 满射的证明略微困难一点. 对于 π 上的任意向量 $\vec{\gamma}'$，任取两不同向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\pi$，设 $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=c$，则 $|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=c$. 设 $|f(\vec{\beta})-\vec{\gamma}'|=a$，$|f(\vec{\alpha})-\vec{\gamma}'|=b$. 若 a 或 b 等于 0，那么 $\vec{\gamma}'=f(\vec{\beta})$，或 $\vec{\gamma}'=f(\vec{\alpha})$，满射性得证. 不然，在平面 π 中取向量 $\vec{\gamma}_i$，使得 $|\vec{\beta}-\vec{\gamma}_i|=a$，$|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}_i|=b$，$i=1,2$. 那么 $|f(\vec{\beta})-f(\vec{\gamma}_i)|=a$，$|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\gamma}_i)|=b$，$i=1,2$. 故 $\vec{\gamma}'=f(\vec{\gamma}'_1)$，或 $\vec{\gamma}'=f(\vec{\gamma}_2)$. 于是 f 是满射，从而 f 是可逆映射. 设 f^{-1} 是f的逆映射. 那么对于任意的$\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\pi$，有

$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|&=|f(f^{-1}(\vec{\alpha}))-f(f^{-1}(\vec{\beta}))|\\&=|f^{-1}(\vec{\alpha})-f^{-1}(\vec{\beta})|,\end{aligned}$$

于是，f^{-1} 也是等距变换.

对于性质(iv)，假设 $\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}$ 是平移 $\vec{\gamma}$ 方向的平移变换，那么对于任意的 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\pi$，有 $\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$，$\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}(\vec{\beta})=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$，于是

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}(\vec{\alpha})-\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}(\vec{\beta})|&=|(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})-(\vec{\beta}+\vec{\gamma})|\\&=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|,\end{aligned}$$

从而 $\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}$ 是等距变换.

注 1：性质(i)-(iii)是重要的，因为有了这 3 个性质，我们就可以证明全等关系是平面图形间的一个等价关系(参见文献[2]).

上面我们已经知道平移变换是等距变换. 那么等距变换还有哪些种类呢？假设f是平面 π 的等距变换，且 $f(\vec{0})=\vec{\gamma}$，那么

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_{-\vec{\gamma}}f)(\vec{0})&=\mathcal{T}_{-\vec{\gamma}}(f(\vec{0}))=\mathcal{T}_{-\vec{\gamma}}(\vec{\gamma})\\&=\vec{\gamma}+(-\vec{\gamma})=\vec{0}.\end{aligned}$$

令 $g=\mathcal{T}_{-\vec{\gamma}}f$，则由性质(ii)与性质(iv)，$g$ 也是个等距变换，且 $g(\vec{0})=\vec{0}$，而 $f=\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}g$，即任何等距变换$f$都是一个将零向量变为零向量的等距变换 g 与一个平移变换 $\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}$ 的乘积. 因此，我们只需要来讨论将零向量变为零向量的等距变换.

注 2：在上述关于等距变换的讨论中，若将平面替换为空间，则结论也是正确的. 但是，有关等距变换是满射的证明需略作调整(请读者思考).

2　正交变换

下面我们来证明，如果 f 是等距变换，且 $f(\vec{0})=\vec{0}$，那么f是正交变换.

回忆一下，$\mathbf{R}$ 上的向量空间 V 上的一个变换f称为是线性变换，如果它满足如下两个条件：

(L1) 对任意 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，有 $f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=f(\vec{\alpha})+f(\vec{\beta})$；

(L2) 对任意 $\vec{\alpha}\in V$，$k\in\mathbf{R}$，有 $f(k\vec{\alpha})=kf(\vec{\alpha})$.

而对于 $\mathbf{R}$ 上定义了数量积的向量空间(即欧几里得空间)V，如果f是 V 上的线性变换，且对任意向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，有 $f(\vec{\alpha})\cdot f(\vec{\beta})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$，那么称$f$是$V$上的正交变换，即正交变换是保持数量积不变的线性变换.

我们先来证明正交变换是等距变换. 设f是 V 上的正交变换，那么对任意的向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，有

$$\begin{aligned}|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|^2&=|f(\vec{\alpha}-\vec{\beta})|^2\\&=f(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot f(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\\&=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\\&=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2,\end{aligned}$$

于是，$|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$. 从而，$f$是等距变换.

如果f是 V 的等距变换，且 $f(\vec{0})=\vec{0}$，那么对 $\vec{\alpha}\in V$，有 $|f(\vec{\alpha})|=|f(\vec{\alpha})-f(\vec{0})|=|\vec{\alpha}-\vec{0}|=|\vec{\alpha}|$，即，此时 f 是保持向量的长度不变的. 现任取 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，有 $|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$，于是，

$$\begin{aligned}&|f(\vec{\alpha})|^2+|f(\vec{\beta})|^2-2f(\vec{\alpha})\cdot f(\vec{\beta})\\=&|f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|^2=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2\\=&|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta},\end{aligned}$$

从而，$f(\vec{\alpha})\cdot f(\vec{\beta})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$，即$f$也保持数量积不变. 于是，

$$
\begin{aligned}
&|f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})|^2\\
=&(f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta}))\cdot(f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\\
&-f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta}))\\
=&|f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})|^2+|f(\vec{\alpha})|^2+|f(\vec{\beta})|^2-\\
&2f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot f(\vec{\alpha})-2f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot f(\vec{\beta})+\\
&2f(\vec{\alpha})\cdot f(\vec{\beta})\\
=&|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\\
&\vec{\alpha}-2(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\\
=&0.
\end{aligned}
$$

因此，$f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-f(\vec{\alpha})-f(\vec{\beta})=0$，所以，$f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=f(\vec{\alpha})+f(\vec{\beta})$.

用类似的方法还可以证明：对任意 $k\in\mathbf{R}$，$\vec{\alpha}\in V$，有 $f(k\vec{\alpha})=kf(\vec{\alpha})$. 于是，$f$ 是线性变换. 又 f 还保持数量积，所以 f 是正交变换.

3　平面上正交变换的类型

那么，在平面上，有哪些类型的正交变换呢？实际上，这一问题在高等代数课程中已经做出了回答，详见文献[3]. 这里我们只做简单的介绍.

假设 f 是直角坐标平面 xOy 上的正交变换，$\vec{e}_1=(1,0)$，$\vec{e}_2=(0,1)$，那么以 $f(\vec{e}_1)$，$f(\vec{e}_2)$ 的坐标为列构成的矩阵 A 是一个正交矩阵，即满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$ 的实方阵. 因此，$|A|=\pm1$. 如果 $|A|=1$，称 f 为第一类正交变换；如果 $|A|=-1$，则称 f 为第二类正交变换. 当 $|A|=1$ 时，A 具有形式

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

此时，f 就是绕原点旋转 θ 角的旋转变换，记作 $\mathcal{R}_\theta$. 而当 $|A|=-1$ 时，A 具有形式

$$\begin{pmatrix}-\cos(2\theta) & -\sin(2\theta)\\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta)\end{pmatrix},\quad\cdots\cdots ①$$

它对应的是什么变换呢？我们来介绍由非零向量 $\vec{\gamma}$ 所确定的反射变换 $\mathcal{S}_{\vec{\gamma}}$（上海市的高考试题中曾经出现过这样的变换，参见文献[4]）：

$$\mathcal{S}_{\vec{\gamma}}(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}-\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}{|\vec{\gamma}|^2}\vec{\gamma}.\quad\cdots\cdots ②$$

可以证明，反射变换 $\mathcal{S}_{\vec{\gamma}}$ 是正交变换，且它具有如下一些简单性质：

（S1）对任意非零实数 k，有 $\mathcal{S}_{k\vec{\gamma}}=\mathcal{S}_{\vec{\gamma}}$；

（S2）$\mathcal{S}_{\vec{\gamma}}(\vec{\gamma})=-\vec{\gamma}$，且 $\mathcal{S}_{\vec{\gamma}}(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}$，对任意 $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ 成立；

（S3）$\mathcal{S}_{\vec{\gamma}}^2=\mathrm{Id}$.

根据性质（S1），我们只需要考虑由单位向量 $\vec{n}$ 所确定的反射 $\mathcal{S}_{\vec{n}}$. 因此，不妨设单位向量 $\vec{n}=(\cos\theta,\sin\theta)$，此时，记 $\mathcal{S}_\theta=\mathcal{S}_{\vec{n}}$. 而变换 $\mathcal{S}_\theta$ 对应的矩阵就是式 ①. 实际上，可以验证：如果过原点的直线 l 的法向量（即，与直线 l 垂直的向量）是 $\vec{n}=(\cos\theta,\sin\theta)$，那么 $\mathcal{S}_\theta$ 就是关于直线 l 的反射！

通过正交变换与正交矩阵的对应关系，可以验证旋转与反射变换满足如下的运算规则：

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_\theta\mathcal{R}_\phi=\mathcal{R}_{\theta+\phi},\ \mathcal{S}_\theta\mathcal{S}_\phi=\mathcal{R}_{2(\theta-\phi)},\\&\mathcal{S}_\theta\mathcal{R}_\phi=\mathcal{S}_{\theta-\phi/2},\ \mathcal{R}_\phi\mathcal{S}_\theta=\mathcal{S}_{\theta+\phi/2}.\end{aligned}\quad\cdots ③$$

4　平面上的基本等距变换

从上面的讨论我们知道，平面上的任何等距变换都是正交变换与平移变换的乘积（复合），而平面上的正交变换只有（绕原点的）旋转变换与（过原点的）直线反射. 因此，平移变换、反射变换、旋转变换是基本的等距变换，平面上的任何等距变换都可以通过施行几次这三种变换而实现.

再通过仔细考察式③，我们发现，每个旋转变换 $\mathcal{R}_\theta$ 都是两个反射变换的乘积. 因此，平面上的等距变换都可以通过施行几次平移变换和反射变换而得到，也就是说，平移变换、反射变换、旋转变换并不是最基本的，我们可以删除其中的旋转变换！这可能是很多人之前没有想到的吧？

下面，我们再来做进一步的讨论. 设 $\mathcal{S}_{x=a}$ 是平面上关于直线 $l:x=a$ 的反射，$P(x,y)$ 是平面上的任意一点，那么 $\mathcal{S}_{x=a}$ 把点 P 变为点 $P'(2a-x,y)$，$\mathcal{S}_{x=b}$ 把点 P' 变为点 $P''(2(b-a)+x,y)$，于是，$\mathcal{S}_{x=b}\mathcal{S}_{x=a}=\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}$，这里 $\vec{\gamma}=(2(b-a),0)$. 这就是说，平移变换可由连续实施两条平行直线对应的反射变换来实现. 因此，平移也不是最基本的等距变换！平面上的任何等距变换都可以通过实施若干次的直线反射而得到！当然，这里的对称轴就不再是限

于过原点的直线了.

进一步思考后我们还发现,平移变换及旋转变换都不是最基本的等距变换. 也就是说,等距变换不可能都由连续实施多次平移变换来获得,也不可能都由连续实施多次旋转变换来获得(想一想,为什么?).

5　空间中的第一类正交变换

前面我们介绍了平面上的正交变换. 现在我们来讨论空间中的正交变换. 设 f 是空间中的正交变换,那么以它在基向量 $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ 下的像的坐标为列构成的矩阵 A 也是正交矩阵. 根据 $|A|=1$ 或 -1,分别称 f 为第一类正交变换或第二类正交变换.

平面上正交变换中的旋转变换是绕原点的旋转. 那么空间的正交变换中的旋转变换是怎样的? 它是绕过原点的直线的旋转变换,即以过原点的直线为旋转轴的旋转变换.

假设 f 是空间中以过原点的直线 l 为旋转轴的旋转变换,那么不妨以 l 为 z 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 此时可发现 f 限制在 xOy 平面上就是该平面上的一个旋转,于是 f 对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad \cdots\cdots ④$$

显然,$|A|=1$,所以 f 是第一类正交变换.

假设 f 是第一类正交变换,则它对应的矩阵 A 是正交矩阵,且 $|A|=1$. 此时 1 是 A 的特征值(想一想,为什么?),于是存在非零向量 $\vec{\alpha}$,使得 $f(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}$. 记 $\vec{k}$ 为 $\vec{\alpha}$ 的单位化向量,则 $f(\vec{k})=\vec{k}$. 将 $\vec{k}$ 扩充为空间的一组规范正交基 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$(还可要求它构成右手系). 记 π 是由 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 所张成的平面,则将 f 限制到 π 上时,它也是 π 上的正交变换,且仍是第一类的,记这一变换为 f'. 于是,f' 是个旋转变换. 假设其旋转角为 θ,则它在 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 下对应的矩阵是

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

从而,f 在基 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 下的矩阵 A 由式④给出. 因此,f 是以由 $\vec{k}$ 方向所确定的过原点的直线为旋转轴的旋转变换.

6　镜面反射

假设 $\vec{\gamma}$ 是空间中的任意非零向量,则可以验证,空间中由式②定义的变换 $S_{\vec{\gamma}}$ 仍是一正交变换,且仍满足性质(S1)-(S3). 还可以验证,空间向量 $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ 当且仅当 $S_{\vec{\gamma}}(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}$. 与向量 $\vec{\gamma}$ 垂直的全体向量构成一个以 $\vec{\gamma}$ 为法向量的过原点的平面 π. 正交变换 $S_{\vec{\gamma}}$ 将平面 π 上的每个向量保持不变,而将与法向量共线的向量变为其负向量. 这样的变换就是以平面 π 为镜面的镜面反射. 若在平面 π 上取两正交的单位向量 $\vec{i}$, $\vec{j}$,再取一个与 $\vec{\gamma}$ 平行的单位向量 $\vec{k}$,那么 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 就构成了空间中的一组规范正交基,镜面反射 $S_{\vec{\gamma}}$ 在此基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

显然,$|A|=-1$,因此,镜面反射 $S_{\vec{\gamma}}$ 是第二类正交变换.

但是,与平面上的正交变换的结论不同的是,空间中的第二类正交变换并非都是镜面反射! 请看下列例子:设 f 是空间 V 上这样的变换:$f(\vec{\alpha})=-\vec{\alpha}$,任意 $\vec{\alpha}\in V$. 即,f 把空间 V 中每个向量都变为它的负向量. 可以验证,f 是正交变换,但因为不存在非零向量 $\vec{\gamma}$,使得 $f(\vec{\gamma})=\vec{\gamma}$,所以 f 不是镜面反射. 又由于 f 在任何一组规范正交基下的矩阵都是

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

而 $|A|=-1$,所以 f 是第二类正交变换.

那么我们该如何来刻画空间的第二类正交变换呢? 假设 f 是空间中任意一个第二类正交变换,它在某组取定的规范正交基下的矩阵为 A,则 $|A|=-1$. 现任取一个镜面反射 $S_{\vec{\gamma}}$,设它在此组基下的矩阵是 B,则 $|B|=-1$. 由于 $S_{\vec{\gamma}}f$ 仍是正交变换,且它在此组基下的矩阵是 BA. 而 $|BA|=|B|\cdot|A|=1$,因此 $S_{\vec{\gamma}}f$ 是第一

类正交变换,记作 g. 则由上述讨论知 g 是一个旋转变换. 而由 $g = S_{\vec{\gamma}}f$ 得 $f = S_{\vec{\gamma}}g$,所以,f 是一个旋转正交变换与一个镜面反射的乘积. 即空间中的任何一个第二类正交变换都是旋转变换与镜面反射的乘积.

7　空间上的基本等距变换

由上一节可知,平移、镜面反射、旋转是空间中三种基本的等距变换. 空间中任何的等距变换都是这三种变换的乘积.

我们来证明,空间中的旋转正交变换一定是两个镜面反射的乘积. 设 f 是空间的任一旋转正交变换. 不妨设它在规范正交基 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 下的矩阵由式④给出. 那么 $f(\vec{k}) = \vec{k}$,且 f 在 xOy 平面上的限制 f' 是 xOy 平面上的旋转变换. 因此,f' 是 xOy 平面上两个反射 $S'_{\vec{\alpha}}$ 和 $S'_{\vec{\beta}}$ 的乘积,即 $f' = S'_{\vec{\alpha}}S'_{\vec{\beta}}$. 由于 $\vec{k} \perp \vec{\alpha}$, $\vec{k} \perp \vec{\beta}$,因此空间中的镜面反射 $S_{\vec{\alpha}}$, $S_{\vec{\beta}}$ 都把 $\vec{k}$ 变为 $\vec{k}$. 而 $S_{\vec{\alpha}}$ 限制在平面 xOy 上的作用效果与 $S'_{\vec{\alpha}}$ 的效果相同, $S_{\vec{\beta}}$ 限制在 xOy 平面上的效果与 $S'_{\vec{\alpha}}$ 的效果相同. 于是, $(S_{\vec{\alpha}}S_{\vec{\beta}})(\vec{k}) = \vec{k}$, $S_{\vec{\alpha}}S_{\vec{\beta}}$ 限制在 xOy 平面上的效果与 f' 相同,从而 $f = S_{\vec{\alpha}}S_{\vec{\beta}}$. 因此,空间中的每个旋转正交变换都是两个镜面反射的乘积. 所以,空间中的每个等距变换都是若干平移变换与镜面反射的乘积.

假设 $S_{x=a}$ 是由镜面 $x = a$ 确定的镜面反射(注意:$a \neq 0$ 时,$S_{x=a}$ 不是线性变换,从而不是正交变换),那么,对空间中的任意点 $P(x, y, z)$, $S_{x=a}$ 把点 P 变为点 $P'(2a - x, y, z)$. 若 $S_{x=b}$ 是另一镜面反射,那么 $S_{x=b}$ 把 P' 变为 $P''(2(b - a) + x, y, z)$. 因此,乘积 $S_{x=b}S_{x=a}$ 等同于平移变换 $\mathcal{T}_{\vec{\gamma}}$,其中 $\vec{\gamma} = 2(b - a)\vec{i}$. 于是,我们证明了,空间上的任意一个平移变换都可由连续实施两个由平行平面确定的镜面反射来实现. 因此,空间上的等距变换都是若干个镜面反射的乘积. 镜面反射是空间上最基本的等距变换.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京:人民教育出版社,2018.

[2] 林磊. 几何图形的相似[J]. 数学教学,2006(1):17 - 19+8.

[3] 陈志杰. 高等代数与解析几何(上、下册)[M]. 北京:高等教育出版社,2008.

[4] 刘芬,冯铮铮. 由 2010 年上海春季高考题所想到的[J]. 数学教学,2010(8):43 - 44.

(上接第 6 - 12 页)

探究到理论论证,再将所得结论加以应用的整个过程. 今后若让学生着手去研究新的课题,尽管他们可能还存在困难,但在其脑海中对于这类课题的研究或多或少会有了一些方向.

参考文献

[1] 章建跃. 高中数学教材落实核心素养的几点思考[J]. 课程 · 教材 · 教法,2016,36(7):44 - 49.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京:人民教育出版社,2017.

[3] 张惠良. 直角拐脖的接口问题——关于正弦函数图像和性质的一个应用[J]. 数学通报,2003(4):38 - 39.

[4] 陶文强. 椭圆可“展开”成余弦曲线吗?[J]. 中学生数学,2002(11):29.