# 柯西不等式的右边比左边少了什么?

林　磊

(华东师范大学数学科学学院,上海　200241)

柯西不等式是一个基本重要的不等式,它在数学的各个分支中都有很多的应用. 它也是中学数学的一个重要知识点,对于有志于参与数学竞赛的师生更是必须要掌握的内容. 我们先来看看它的基本形式:

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 是任意给定的两个向量(平面的或空间的,或更一般地,某个 $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的),则有

$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \geqslant |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|, \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

等号成立当且仅当 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 共线. 或等价地,有

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}) \geqslant (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2. \quad \cdots\cdots ②$$

或使用坐标的形式,设 $\vec{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\vec{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in\mathbb{R}^n$, 则有

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\\ \geqslant\ &(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$. 那么,我们有没有考虑过这样一个问题:不等式②或不等式③的右边比左边到底少了些什么? 少了的量有什么几何意义?

我们知道,根据两个向量的数量积(或内积)定义,有

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cos\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle.$$

那么,

$$\begin{aligned}&(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\\ =\ &|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cos\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle)^2\\ =\ &(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|)^2(1-\cos^2\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle)\\ =\ &(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sin\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle)^2\\ =\ &S^2,\end{aligned}$$

其中 $S$ 就是由向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 张成的平行四边形的面积. 于是柯西不等式等号成立的充分必要条件就是由 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 张成的平行四边形的面积为零,它等价于 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 共线.

如果我们考虑平面向量,假设 $\vec{\alpha}=(a_1, a_2)$, $\vec{\beta}=(b_1, b_2)\in\mathbb{R}^2$, 那么

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\\ =\ &(a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2. \quad \cdots ④\end{aligned}$$

公式④可以直接验证,也可利用复数模的性质获得,即令 $z_1=a_1-a_2\mathrm{i}$, $z_2=b_1+b_2\mathrm{i}$,则公式④与 $|z_1|^2|z_2|^2=|z_1z_2|^2$ 等价. 于是得

$$S^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2.$$

当然,这一面积公式也可利用向量积的几何意义直接得到.

回忆一下,对于向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$,它们的向量积(或外积) $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 是一个向量, 规定其模 $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sin\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$,它恰好等于由 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 张成的平行四边形的面积,而 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 的方向规定为与 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 都垂直,且 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 构成右手系.

设向量 $\vec{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\beta}=(b_1, b_2, b_3)$, 那么由向量积的定义可得 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$. 把平面向量 $\vec{\alpha}=(a_1, a_2)$, $\vec{\beta}=(b_1, b_2)$ 分别看成空间向量 $\vec{\alpha}'=(a_1, a_2, 0)$ 和 $\vec{\beta}'=(b_1, b_2, 0)$, 那么 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\alpha}'\times\vec{\beta}'=(0, 0, a_1b_2-a_2b_1)$,从而 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 张成的平行四边形的面积 $S=|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}'\times\vec{\beta}'|=|a_1b_2-a_2b_1|$, 于是, $S^2=$

$(a_1b_2-a_2b_1)^2$.

如果考虑空间向量,设 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\beta}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$,那么直接验证可得下列恒等式

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+[(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&\quad+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2].\quad\cdots ⑤\end{aligned}$$

由此可得,对于由向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 张成的空间中的平行四边形的面积 $S$,有

$$\begin{aligned}S^2&=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\\&\quad+(a_3b_1-a_1b_3)^2.\quad\cdots\cdots ⑥\end{aligned}$$

回想到两点间的距离公式

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},\quad\cdots\cdots ⑦$$

其中 $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中任意两点,那么,公式⑦等价于

$$|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.\quad\cdots\cdots ⑧$$

对公式⑧加以审视后,我们可这样加以解释:空间中的直线段 $PQ$ 的长度平方等于该直线段在各坐标轴上的投影线段长度的平方和. 这一结论当然对于平面情形也是正确的. 用同样的视角对公式⑥加以重新解释,就得到如下3维空间中关于平行四边形面积平方的投影定理:

由向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 张成的平行四边形的面积平方等于该平行四边形在各坐标平面的投影平行四边形面积的平方和.

由于两个全等的三角形可以拼接成一个平行四边形,所以上述关于平行四边形面积平方的投影定理,对于三角形也成立. 而任意一个平面多边形都可以分割成若干个三角形,所以面积平方的投影定理可推广为空间中任意的平面多边形. 再利用极限的思想,可知面积平方的投影定理对于空间中任意一个平面简单连通区域也是成立的. 即,我们有如下更一般的结论.

定理1　设 $S$ 是空间中某平面简单连通区域的面积,$S_{xy}$、$S_{yz}$、$S_{zx}$ 分别为该区域在坐标平面 $xOy$、$yOz$、$zOx$ 上的投影面积,那么有

$$S^2=S_{xy}^2+S_{yz}^2+S_{zx}^2.\quad\cdots\cdots ⑨$$

例　设有空间 $\triangle ABC$,其中点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$. 设 $S$ 为 $\triangle ABC$ 的面积,$S_{xy}$、$S_{yz}$、$S_{zx}$ 分别为 $\triangle ABC$ 在 $xOy$ 平面、$yOz$ 平面、$zOx$ 平面上的投影的面积,则有

$$\begin{aligned}S^2&=S_{xy}^2+S_{yz}^2+S_{zx}^2\\&=\frac{1}{4}(ab)^2+\frac{1}{4}(bc)^2+\frac{1}{4}(ca)^2\\&=\frac{1}{4}[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2].\end{aligned}$$

因此,$S=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}$.

公式⑨也可以利用通常的面积投影定理来证明. 设空间中的平面区域 $\Omega$ 所在平面的法向量为 $\vec{n}$,它与 $x$ 轴,$y$ 轴,$z$ 轴正向的夹角分别为 $\theta$、$\zeta$、$\phi$,则由投影定理,$S\cdot\cos\phi=S_{xy}$, $S\cdot\cos\theta=S_{yz}$, $S\cdot\cos\zeta=S_{zx}$. 那么因为 $\cos^2\phi+\cos^2\theta+\cos^2\zeta=1$,所以,$S^2=S^2\cdot(\cos^2\phi+\cos^2\theta+\cos^2\zeta)=(S\cdot\cos\phi)^2+(S\cdot\cos\theta)^2+(S\cdot\cos\zeta)^2=S_{xy}^2+S_{yz}^2+S_{zx}^2$.

如果我们在 $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中来考虑,则公式⑤就可推广为如下的一般形式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2+\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2.\quad\cdots\cdots ⑩$$

恒等式⑩告诉我们,$n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的由两个向量张成的平行四边形的面积平方,等于该平行四边形在各2维坐标平面上的投影面积的平方和. 与之前的讨论类似,上述结果不仅对平行四边形成立,对任意平面简单连通区域也是成立的.

接下来,我们来从另一个角度看看柯西不等式:对任意两个向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$,有 $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})\geqslant(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2$,或$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\geqslant 0$,即

$$\begin{vmatrix} \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} & \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} & \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} \end{vmatrix} \geqslant 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

令矩阵

$$G(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{pmatrix} \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} & \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} & \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} \end{pmatrix}.$$

则式⑪等价于行列式 $|G(\vec{\alpha},\vec{\beta})|\geqslant 0$.

更一般地,对于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意 $m$ 个向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$,定义由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 所确定的 Gram 矩阵 $G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m)=(\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\alpha}_j)_{m\times m}$,这是一个实系数的对称矩阵. 那么我们有以下结论.

定理 2　对任意 $m$ 个向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m\in\mathbb{R}^n$,我们有

$$|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m)|\geqslant 0,$$

且等号成立当且仅当 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 线性相关.

注意到当 $m=2$ 时,上述结果就是柯西不等式. 所以,此结果可以看成柯西不等式的某种推广,即,它相当于是 $m$ 个向量的柯西不等式.

下面我们来对 $m=3$ 时来证明定理 2. 对于一般的 $m$,证法是一样的.

证明:先证 $|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)|\geqslant 0$. 设 $\vec{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$, $\vec{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$, $\vec{\alpha}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})\in\mathbb{R}^3$. 那么,令 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 的坐标作为行构成的 3 阶方阵, 那么,$A$ 的转置矩阵

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)| \\
=&\begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_3 \\ \vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_3 \\ \vec{\alpha}_3\cdot\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_3\cdot\vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3\cdot\vec{\alpha}_3 \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} \sum_i a_{1i}^2 & \sum_i a_{1i}a_{2i} & \sum_i a_{1i}a_{3i} \\ \sum_i a_{2i}a_{1i} & \sum_i a_{2i}^2 & \sum_i a_{2i}a_{3i} \\ \sum_i a_{3i}a_{1i} & \sum_i a_{3i}a_{2i} & \sum_i a_{3i}^2 \end{vmatrix} \\
=&\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{32} \end{pmatrix}\right| \\
=&|A\cdot A^{\mathrm{T}}|=|A|\cdot|A^{\mathrm{T}}| \\
=&|A|\cdot|A|=|A|^2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

这里,我们利用了行列式的两个性质:(i)对于两个同阶的方阵 $A$、$B$,有 $|AB|=|A|\cdot|B|$;(ii)$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$. 而且,从上述讨论还可以看出 $|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)|$ 的几何意义:它是由 3 个向量 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 张成的平行六面体的"有向"体积(或,由这三个向量确定的混合积 $(\vec{\alpha}_1\times\vec{\alpha}_2)\cdot\vec{\alpha}_3$)$|A|$ 的平方.

其次,我们来证明:当 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性相关时,$|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)|=0$. 不妨设 $\vec{\alpha}_3=a\vec{\alpha}_1+b\vec{\alpha}_2$. 则利用数量积的性质知,$\vec{\alpha}_3\cdot\vec{\alpha}_1=a(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_1)+b(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_1)$, $\vec{\alpha}_3\cdot\vec{\alpha}_2=a(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2)+b(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_2)$, $\vec{\alpha}_3\cdot\vec{\alpha}_3=a(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_3)+b(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_3)$, 所以,行列式 $|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)|$ 的第 3 行是它的前两行的线性组合,于是,由行列式的性质知 $|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)|=0$.

最后,如果 $|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)|=0$,那么 $|A|^2=|G(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)|=0$,从而 $|A|=0$,于是矩阵 $A$ 的行向量组线性相关,即 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性相关.