从游戏中发现数学问题

林　磊　（华东师范大学数学系　200241）

我最近在回想俄罗斯方块游戏时，突然就想到了一个与此游戏有联系的数学问题.俄罗斯方块游戏的玩法就是用一些随机出现的几何图案去填充平面区域，消去一行就会有得分，如果一次能消去多行，则会得到很多额外的奖励分.但这会承担一定的风险，因为那些随机的图案是需要通过适当的平移或旋转后才可能被放置到合适的空位上去的，当剩余的内容太多时，就不容易做这些操作.我关心的是这些随机出现的图案.它们都是由四块小正方形拼接在一起构成的，要求相邻的两块必须有一条公共边相连.现在的问题是由四个小正方形按照这样的连接方式，在平面上一共能得到多少种不同的图案？当然，通过平移或旋转后能重合的图案被看成是同一种图案.玩过这款游戏的人应该会知道，答案是共有 7 种！图 1 展示的就是这所有 7 种不同的图案.

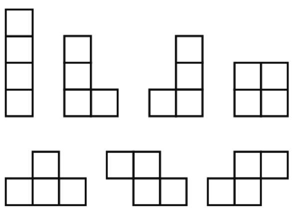

图 1

现在我们来思考，从这个游戏中我们可以提些什么数学问题？我首先想到的问题是：如果我们将小方块的个数从 4 块增加到 5 块，那么在平面上一共会有多少种不同的图案？也就是说，用 5 个同样大小的小正方形，按照相邻两个必须有一条边重合，且构成的图案不能有空洞出现的要求，在平移与旋转后能重合的图案被看成相同的情况下，一共会有多少种不同的连通图案？记此不同图案总数为 a_5，我们的问题就是求 a_5 的值.这个问题一旦被提出，我们马上就会想到能将此问题一般化，即：如果相同小方块的个数为 n，那么用它们能构成的不同图案总数 a_n 是多少？下面的事实是已知的：$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=7$.

理论上，只要 n 的值不太大，那么求一个具体的 a_n 值还是能办到的，难的是求出 a_n 的通项公式！例如，求 a_5 的值就可以作为一个数学实验活动，让中学生们通过探索后自己来获得.这里，探索的关键就是要做到不重不漏.不重的意思是你最后得到的图案中不能出现一个图案通过旋转及平移能与另一个图案重合的情况，而不漏当然就是指这些图案已经包含了 5 个小方块能拼成的所有图案，没有漏网的.经过探索，我们可求得 $a_5=18$.图 2 中展示的就是这所有的 18 种图案.

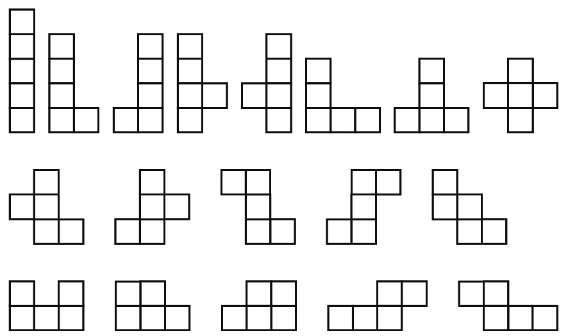

图 2

实际上，虽然探讨 5 块小方块组成的不同图案数可以用各种不同方法，但方法之间还是有优劣之分的.我们前面说过，要想求出 a_n 的通项公式还是一个较难的问题.但是，就算我们求不出一般的通项公式，我们还是可以对通项做点什么的.比如：退而求其次，找出通项的一个上界！实际上，在找不到通项的确切表达式时，作为替代，找出通项的一个合理上界也是数学家的一种普遍做法.可以想象，每个 $n+1$ 块小方块组成的图案当然都可看成是从某 n 个小方块图案（简记为 n-图案）通过添加一块小方块而构成的.因此，假设我们知道了 a_n，并估计出每个 n-图案添加一块小方块的最多可能数，那么我们就可估计出 a_{n+1} 的一个上界！因此，利用递推关系，我们就可得到 a_n 的一个上界 A_n，即 $a_n \leqslant A_n$，$n=5,6,\cdots$.所以，如果某人是通过从 4-图案添加一块小方块的方法来求 a_5 的，那么他就很可能较容易地找到求上界的方法.当然，还可以用其他的办法来列出所有不同的 5-图案.例如，先考虑 5 块小方块一块接一块地叠在一起的长棍（称为 5-长棍），当然它只有一种；再考虑包含一个 4-长棍的图案（它就不止 1 种了）；…… 如此下去，也可以获得所有不同的

图案.

问题提到这里是不是就终止了？还可不可以提些其他的问题？是的！我们假设每块小方块的边长为 1，那么每个 n- 图案就都有一个确定的周长.当 n 固定时，这 a_n 个周长（当然有些可能相同）中必定有一个最大值和一个最小值，分别记作 L_n 和 l_n，这两个值相对 a_n 而言，还是容易求的，特别是 L_n（中学生应该也能求）.还有就是每个图案都有一个直径，即该图案中任两点间直线距离的最大值.当 n 固定时，记这些直径的最大值与最小值分别为 D_n 和 d_n，求这两个值.

例如，容易得出 $L_1=4, L_2=6, L_3=8, L_4=10, L_5=12; l_1=4, l_2=6, l_3=8, l_4=8, l_5=10; D_1=\sqrt{2}, D_2=\sqrt{5}, D_3=\sqrt{10}, D_4=\sqrt{17}, D_5=\sqrt{26}; d_1=\sqrt{2}, d_2=\sqrt{5}, d_3=2\sqrt{2}, d_4=2\sqrt{2}, d_5=\sqrt{10}$.

实际上，通过对具体图案周长的计算你会发现一些规律.比如一个 n- 图案如果没有 4 块小方块拼成田字形的子图案，则该图案的周长就是 $2n-2$.那么如果图案包含了田字形作为其子图案，其周长该如何计算呢？

上面讲的是平面上的情况.我们还可以扩展思维，来考虑空间的情形.想象如果有 3 维的立体俄罗斯方块，那么用 4 块小正方体拼图，共可拼成多少种不同的图案（同样，能通过平移及旋转重合的图案看成是同一种）？当然我们这里要添加任意两个相邻的正方体必须有一个面重合，且图案不能有空洞的限制条件.容易看出，用 1，2，3，4 块小正方体拼出的不同图案总个数分别为 1，1，2，8.

图 3 展示的就是用 4 块小正方体拼图的所有可能图案.

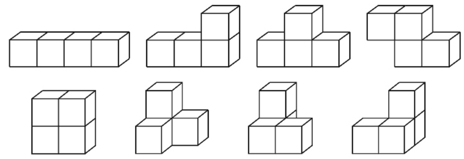

图 3

到了这里，我们自然还能问：一般地，用 n 块小正方体拼图，共能拼出多少种不同的图案？

让中学生来探究这类空间问题，一来可提高他们学习数学的兴趣，二来可以培养他们的空间想象能力，三来通过画出这些图案的三视图，还可有助于三视图的教学.

如果将思维再进行扩展，大学生或研究生还可以考虑 m 维欧几里得空间中由 n 个棱长为 1 的超立方体来拼图案，则不同图案的总个数有多少？这就是由平面上 5 块小方块问题引出的最一般情形的问题！当然也是最难的问题.

最后，通过思考，我们容易得到以下简单结果：在平面上由 n 个单位边长小正方形构成的所有图案中，其最大周长 $L_n=2n+2$.而对于最小周长，我们有

$$l_n=\begin{cases}4m, & n=m^2,\\ 4m+2, & n=m^2+t, 0<t\leqslant m,\\ 4m+4, & n=m^2+t, m<t\leqslant 2m.\end{cases}$$

中学数学月刊

1978 年 7 月创刊

2017 年第 8 期（总第 411 期）

2017 年 8 月 15 日出版

主办单位 苏州大学 协办单位 江苏省数学学会
主管单位 江苏省教育厅
出版单位 中学数学月刊编辑部（邮编：215006）
E-mail zxsxyk@suda.edu.cn
印刷单位 苏州文星印刷有限公司
主　　编 徐稼红 发　　行 江苏省邮政公司
责任编辑 葛　洵 订　　阅 全国各地邮局

ISSN 1004-1176

08>

9 771004 117179

中国标准连续出版物号 ISSN 1004-1176 / CN 32-1444/O1

发行范围 公开
报刊代号 28-75
定　　价 7.00 元