四面体的外接平行六面体

林 磊[1] 蒋宝童[2,3]

(1. 华东师范大学数学系, 上海 200241; 2. 安徽省和县第一中学, 安徽 和县 238200;

3. 华东师范大学数学系教育硕士, 上海 200241)

本文中, 我们来讨论四面体的外接平行六面体的存在性, 以及与此平行六面体相关的性质.

1 外接平行六面体的存在性

设有四面体 $ABCD$. 过 AB 的中点 E 作 CD 的平行线 $C'D'$, 使得 $C'D'=CD$, 且 E 为 $C'D'$ 的中点. 同理, 过 CD 的中点 E' 作 AB 的平行线 $A'B'$, 使得 $A'B'=AB$, 且 E' 为 $A'B'$ 的中点. 则平面 $AC'BD'$//平面 $A'CB'D$, $AC'BD'$ 与 $A'CB'D$ 都是平行四边形, 且两者全等. 这样我们就得到了平行六面体 $AC'BD'-A'CB'D$(如图1). 四面体 $ABCD$ 的棱是该平行六面体的面对角线. 由作法我们容易知道这样的平行六面体是唯一的.

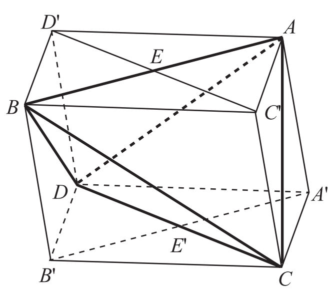

图 1

在本文中, 我们把该平行六面体叫做四面体的外接平行六面体, 该四面体叫做平行六面体的内接四面体. 把顶点在平行六面体的表面或内部的四面体叫做平行六面体的内含四面体.

2 四面体及其外接平行六面体的性质

2.1 四面体的重心

在图 1 中, 设 P 是 EE' 的中点, 点 O 是空间中任意一点, 则

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE'})$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\Big]$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

同理, 设点 F、F' 分别是 AD、BC 的中点, 点 G、G' 分别是 AC、BD 的中点, 则点 P 既是 FF' 的中点, 也是 GG' 的中点. 实际上, 点 P 就是四面体 $ABCD$ 的重心.

2.2 四面体的腰

如果以平行于 $AC'BD'$ 的平面 π 去截四面体 $ABCD$, 得截面 $A_1B_1C_1D_1$(如图 2), 则易知 $A_1B_1//AB//D_1C_1$, $A_1D_1//DC//B_1C_1$, 从而四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形, 我们称它为四面体 $ABCD$ 的一条腰. 设平面 π 与平面 $AC'BD'$ 间的距离为 h_1, 平面 $A'CB'D$ 与 $AC'BD'$ 间的距离为 h, 且 $\dfrac{h_1}{h}=t$, 则 $0<t<1$, 且 $\dfrac{A_1D_1}{DC}=t$, $\dfrac{A_1B_1}{AB}=1-t$, 故平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的周长(即腰围)为

$$l_{A_1B_1C_1D_1}=2[(tCD+(1-t)AB)].$$

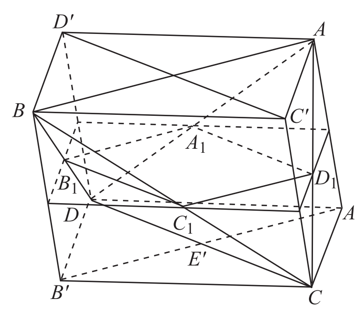

图 2

在上述结论中, 如果取 $t=\dfrac{1}{2}$, 即可得如下结论.

结论 1 以四面体 $ABCD$ 的棱 AC、BC、BD、AD 的中点为顶点的四边形(即该四面体的一条中腰)是一个平行四边形, 且其周长(即中腰腰围) l 等于对棱 AB 及 CD 的长度之和, 即 $l=AB+CD$.

在四面体$ABCD$中, 如果$AB=CD$, 即有一对对棱长度相等, 那么我们又有如下结论.

结论2　在四面体$ABCD$中, 如果$AB=CD$, 那么用平行于棱AB及CD的平面截四面体所得的四边形的周长相同, 都等于$2AB$.

我们还可以得到与四面体的体积有关的结论.

结论3　以四面体$ABCD$的棱AC、BC、BD、AD的中点所确定的平面(中截面)均分四面体的体积.

2.3　四面体的体积

在四面体$ABCD$中, 设$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$, $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$, $AB=d$, $AC=e$, $BC=f$. 设以DA、DB、DC为棱的平行六面体Σ的体积为V_Σ, 那么$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}V_\Sigma$. 而$V_\Sigma^2=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$, 其中$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$为$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$的混合积.

由向量的数量积定义可知, 数量积$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-d^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-d^2)$. 同理, $(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{1}{2}(a^2+c^2-e^2)$, $(\vec{b},\vec{c})=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-f^2)$.

设在空间直角坐标系$Oxyz$中, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 则

$$V_\Sigma^2=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}(\vec{a},\vec{a})&(\vec{a},\vec{b})&(\vec{a},\vec{c})\\(\vec{b},\vec{a})&(\vec{b},\vec{b})&(\vec{b},\vec{c})\\(\vec{c},\vec{a})&(\vec{c},\vec{b})&(\vec{c},\vec{c})\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a^2&\frac{a^2+b^2-d^2}{2}&\frac{a^2+c^2-e^2}{2}\\\frac{a^2+b^2-d^2}{2}&b^2&\frac{b^2+c^2-f^2}{2}\\\frac{a^2+c^2-e^2}{2}&\frac{b^2+c^2-f^2}{2}&c^2\end{vmatrix}=F,$$

其中, $F=F(a,b,c,d,e,f)$是一个以棱长a、b、c、d、e、f为变量的六元6次有理系数齐次多项式. 从而得

公式1　四面体$ABCD$的体积为

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\sqrt{F}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}a^2&\frac{a^2+b^2-d^2}{2}&\frac{a^2+c^2-e^2}{2}\\\frac{a^2+b^2-d^2}{2}&b^2&\frac{b^2+c^2-f^2}{2}\\\frac{a^2+c^2-e^2}{2}&\frac{b^2+c^2-f^2}{2}&c^2\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

公式1是以棱长来表示四面体的体积. 它与平面上用边长来表示三角形面积的海伦公式类似, 只是更加复杂. 如果结合棱之间的夹角, 我们还可以得到下面形式的体积公式.

令$p=\dfrac{a^2+b^2-d^2}{2}$, $q=\dfrac{a^2+c^2-e^2}{2}$, $r=\dfrac{b^2+c^2-f^2}{2}$, $\angle ADB=\alpha$, $\angle ADC=\beta$, $\angle BDC=\gamma$, 则$p=ab\cos\alpha$, $q=ac\cos\beta$, $r=bc\cos\gamma$, 故

$$F=\begin{vmatrix}a^2&p&q\\p&b^2&r\\q&r&c^2\end{vmatrix}=\frac{1}{p}\begin{vmatrix}a^2&p&q\\p&b^2&r\\pq&pr&pc^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{p}\begin{vmatrix}a^2&p&q\\p&b^2&r\\0&pr-b^2q&pc^2-rq\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{p^2}\begin{vmatrix}a^2&p&pq\\p&b^2&pr\\0&pr-b^2q&p(pc^2-rq)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{p^2}\begin{vmatrix}a^2&p&0\\p&b^2&pr-b^2q\\0&pr-b^2q&b^2q^2+c^2p^2-2pqr\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{p^2}[a^2(b^2(b^2q^2+c^2p^2-2pqr)$$
$$-(pr-b^2q)^2)-p^2(b^2q^2+c^2p^2-2pqr)]$$
$$=a^2b^2c^2+2pqr-(a^2r^2+b^2q^2+c^2p^2)$$
$$=a^2b^2c^2+2a^2b^2c^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$-a^2b^2c^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$
$$=a^2b^2c^2[1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)].$$

由此, 我们得

公式2　四面体$ABCD$的体积为

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}abc\times[(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)]^{\frac{1}{2}}.$$

2.4　平行六面体的内含四面体

关于平行六面体的内含四面体, 我们有如下结论.

结论4 在平行六面体的内含四面体中, 体积最大的是内接四面体.

证明: 设平行六面体 $AC'BD'-A'CB'D$ 的体积为 V, 其内接四面体的体积为 V_0, 则由割补法知, $V_0=\dfrac{1}{3}V$. 设 $MNPQ$ 是平行六面体的内含四面体.

情形一: 四面体 $MNPQ$ 有一个面平行于平行六面体的某条棱.

如图3(1), 不妨设面 NPQ 平行于棱 AC', 面 NPQ 截平行六面体的截面为 $HIJK$, 则要使四面体 $MNPQ$ 体积尽可能大, 点 M 到面 $HIJK$ 的距离应尽可能大, 则点 M 应在棱 AC', $A'C$, DB', $D'B$ 四条棱中距离面 $HIJK$ 最远的棱上, 不妨设在 AC' 上, 由于点 M 在 AC' 上的任何位置, 四面体的体积不变, 又点 N、P、Q 在截面 $HIJK$ 上时, $\triangle NPQ$ 面积的最大值为平行四边形 $HIJK$ 面积的一半, 因此有 $V_{MNPQ}\leqslant V_{C'-HIJ}=V_{H-C'IJ}\leqslant V_{H-C'CJ}=\dfrac{1}{6}V<V_0$. 所以, 此时四面体的体积不是最大的.

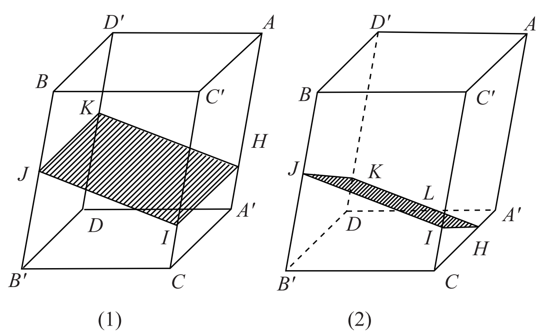

图3

情形二: 四面体 $MNPQ$ 的任何一个面都不平行于平行六面体的任意一条棱.

如图3(2), 任取四面体的一个面, 不妨设为面 NPQ, 截平行六面体所得截面为图中阴影多边形, 因该面与平行六面体的任一棱不平行, 故顶点 M 只有为平行六面体的某个顶点时, 才能使四面体的体积最大. 然后再考虑面 MPQ, 若此时面 MPQ 平行于平行六面体的某条棱, 即为情形一, 此时, 四面体的体积不是最大的. 否则, 要使四面体体积最大, 则顶点 N 也必定为平行六面体的某个顶点. 同理, 顶点 P、Q 也都必须是平行六面体顶点时, 才能使四面体体积最大.

当四面体 $MNPQ$ 的四个顶点都是平行六面体的顶点时, 按平行六面体的上、下底面含有四面体顶点个数分为两类: 第一类是四面体有三个顶点同在上底面或同在下底面, 此时 $V_{MNPQ}=\dfrac{1}{6}V<V_0$; 第二类是上下底面各含四面体的两个顶点, 此时, 若有两个顶点同在某条棱上, 则四面体必有三个顶点在平行六面体的一个面上, 同样有 $V_{MNPQ}=\dfrac{1}{6}V<V_0$. 若任意两个顶点都不同在某条棱上, 则它们的连线为上下底面的不共面的面对角线, 此时, 四面体 $MNPQ$ 为平行六面体的内接四面体, 所以, $V_{MNPQ}=V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}V=V_0$.

综上, 平行六面体的内含四面体中, 只有内接四面体的体积最大, 其体积为该平行六面体体积的三分之一.

2.5 每对对棱长度相等的四面体

由于一个平行四边形为矩形的充分必要条件是该四边形的两条对角线长度相等, 所以四面体的一对对棱长度相等当且仅当这一对棱所在的该四面体的外接平行六面体的面是矩形. 因而可得如下结论.

结论5 四面体的每对对棱长度相等的充分必要条件是四面体的外接平行六面体是长方体.

由结论5可知, 每对对棱长度相等的四面体的每个面都是全等的, 因此, 结合结论3, 我们还有下列结论.

结论6 以每对对棱长度相等的四面体 $ABCD$ 的棱 AC、BC、BD、AD 的中点所确定的平面(中截面)既均分四面体的体积, 又均分四面体的表面积.

2.5.1 每对对棱长度相等的四面体的体积

如果 $ABCD$ 是每对对棱长度相等的四面体, 那么在公式1中, $d=c, e=b, f=a$, 从而

$$F=\begin{vmatrix} a^2 & \frac{a^2+b^2-c^2}{2} & \frac{a^2+c^2-b^2}{2} \\ \frac{a^2+b^2-c^2}{2} & b^2 & \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ \frac{a^2+c^2-b^2}{2} & \frac{b^2+c^2-a^2}{2} & c^2 \end{vmatrix}.$$

在行列式 F 中, 将其第2行的1倍、第3行的 -1 倍加入第1行, 则行列式的第1行变为 $(a^2+b^2-c^2, a^2+b^2-c^2, 0)$, 因此, 行列

式可提取因式 $a^2+b^2-c^2$. 类似可证, 行列式有因式 $b^2+c^2-a^2$ 和 $c^2+a^2-b^2$. 由于这三个因式两两互素, 因此, F 有因式

$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).$$

但是已知 F 是个 6 次多项式, 而上述因式也是 6 次的, 所以存在有理数 k, 使得

$$F=k(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).$$

为求常数 k 的值, 只需使用特殊值法. 例如在上述等式中令 $a=b=c=1$, 那么

$$k=F(1,1,1,1,1,1)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

于是, $F=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$, 从而有

公式 3[1] 每对对棱长度相等的四面体的体积为

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\sqrt{F}=\frac{\sqrt{2}}{12}\times\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}\times\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

根据结论 5, 每对对棱长度相等的四面体的外接平行六面体是长方体. 利用这一结论, 我们还可以给出这类四面体的体积公式的另一种推导方法. 设外接长方体为 $AA'BB'-C'CD'D$, 其体积为 V, 对应的四面体为 $ABCD$. 设 $DB'=x$, $DC'=y$, $DD'=z$(如图 4).

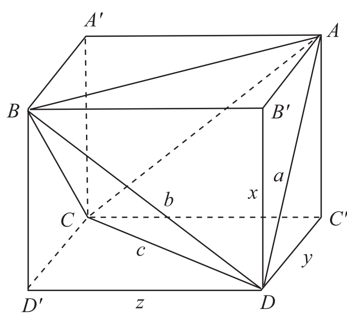

图 4

由勾股定理得

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ y^2+z^2=c^2, \\ z^2+x^2=b^2, \end{cases}$$

于是得

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}, \\ y^2=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}, \\ z^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}, \end{cases}$$

从而

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V=\frac{xyz}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2y^2z^2}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{8}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)},$$

即

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}\times\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}\times\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

从上述讨论还可以看出, 由于长方体的边长 x、y、z 均大于 0, 所以, 由余弦定理知, 要使这样的外接长方体存在, 四面体的各面(它们是全等的三角形)都应该是锐角三角形.

2.5.2 每对对棱长度相等的四面体的内切球

如果取每对对棱长度相等的四面体 $ABCD$ 的棱长为 a、b、c, 其外接长方体的棱长为 x_0、y_0、z_0, 且 $x_0^2+y_0^2=a^2$, $y_0^2+z_0^2=c^2$, $z_0^2+x_0^2=b^2$. 设该长方体的中心 O 是空间直角坐标系的原点, 且它的棱均与坐标轴平行. 则坐标为 $\left(-\dfrac{x_0}{2},\dfrac{y_0}{2},\dfrac{z_0}{2}\right)$, $\left(\dfrac{x_0}{2},-\dfrac{y_0}{2},\dfrac{z_0}{2}\right)$, $\left(\dfrac{x_0}{2},\dfrac{y_0}{2},-\dfrac{z_0}{2}\right)$ 的点为该长方体的三顶点(假设它们也是该四面体的顶点), 而过这三点的平面方程为

$$\frac{2}{x_0}x+\frac{2}{y_0}y+\frac{2}{z_0}z=1,$$

那么原点到该平面的距离为

$$r=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4}{x_0^2}+\dfrac{4}{y_0^2}+\dfrac{4}{z_0^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{8}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{8}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{8}{c^2+a^2-b^2}}},$$

即

$$r=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}}}$$

浅谈几何图形证明的基本解题策略

王翠玲

(江苏省徐州市睢宁县第二中学, 江苏 徐州 361003)

很多学生与复杂的几何图形问题“面对面”时, 往往解题思路不畅, 陷入“无头绪”的僵局. 因此, 在教学中, 教师应充分启发、引导学生从几何图形证明的基本解题策略——“剖析图形”与“探究方法”抓起, 有序发展学生合情推理和演绎推理能力. 下面以一道习题为例加以说明.

例题呈现如下.

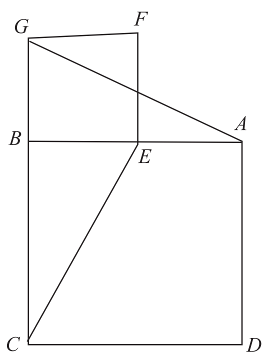

图1

如图1, 四边形 $ABCD$、$BEFG$ 均为正方形.

(1) 如图1, 连接 AG、CE, 判断 AG 和 CE 的位置关系并证明;

(2) 将正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转 β 角 ($0^\circ < \beta < 180^\circ$), 如图2, 连接 AG, 其延长线与 CE 相交于点 M, 连接 MB, 求证: $\angle EMB = 45^\circ$.

问题(1) 根据“SAS”, 证明 $\triangle BEC \cong \triangle BGA$ 即可;

问题(2) 是一道貌似复杂的问题, 原因有以下两点.

(1) 文字语言较复杂, 表面上是一种赶潮流的运动类问题. 如“将正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转 β 角 ($0^\circ < \beta < 180^\circ$)”, 其实“旋转”只是一个噱头, 学生往往陷于这种眩晕假象之中, 思维进入困境;

(2) 图形较复杂, 可谓“枝繁叶茂”. 复杂的图形宛如一个遍身是刺的榴莲, 往往使学生眼花缭乱, 抓不住重点, 不知如何下手.

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}}{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

类似计算可知, 原点 O 到四面体其他各面的距离都是 r, 于是 r 就是四面体的内切球的半径.

公式4 假设 a、b、c 是每对对棱长度相等的四面体的棱长, 则该四面体的内切球半径 r 有如下计算公式

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}}{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

这个公式也可以由公式3结合 $r = \dfrac{3V_{ABCD}}{4S_{\triangle ABC}}$ 得到, 此处从略.

2.5.3每对对棱长相等的四面体的外接球

每对对棱长度相等的四面体的外接球就是它的外接长方体的外接球, 而长方体的外接球直径就是该长方体的对角线, 其长度为

$$2R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)},$$

所以, 易得

公式5 假设 a、b、c 是每对对棱长度相等的四面体的棱长, 则该四面体的外接球半径 R 有如下计算公式

$$R = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

参考文献

[1] 林磊. 用三角形纸折出的四面体探究 [J]. 数学教学, 2008(6): 16–18.