重新认识渐近线

史　嘉[1]　林　磊[2]

(1. 安徽省亳州市第一中学, 安徽 亳州　236800

2. 华东师范大学数学系, 上海　200241)

渐近线是函数图像(或曲线)的重要性质之一, 其在中学数学中的处境异常尴尬——在《普通高中数学课程标准(实验)》中没有地位, 但在学习指数函数、对数函数、正切函数、双曲线和利用导函数研究函数性质时却扮演重要角色.

1　中学数学教材中的渐近线

事实上, 在初中学习反比例函数(即双曲线)时渐近线已悄然现身, 只不过它在《义务教育数学课程标准》中没有"合法"的身份.

到了高中, 人教 A 版《数学(必修 1)》学习指数函数 $y=a^x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的性质时, 教材明确指出(以 $0<a<1$ 为例)"值域 $(0,+\infty)$"和"在 $\mathbf{R}$ 上是减函数", 渐近线概念呼之欲出而没有出.

在《数学(必修 4)》学习正切函数图像后总结: 从图可以看出, 正切曲线是被相互平行的直线 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ 所隔开的无穷多支曲线组成的. 渐近线概念又一次失去"正身"的机会.

在《数学(选修 2–1)》学习双曲线时, 教材借助几何画板探究渐近线, 让学生观察发现: (双曲线上的)点 M 的横坐标 x_M 越来越大, (点 M 到一直线的距离) d 越来越小, 但永远不等于 0. 接着给出指示性定义: 利用信息技术, 可以看到, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的各支向外延伸时, 与这两条直线逐渐接近, 我们把这两条直线叫做双曲线的渐近线. 在后面"探究与发现"中又作了解释(因为高中淡化极限, 所以算不得严格证明). 到此, 渐近线在中学教材算是"名正言顺"了.

《数学(选修 2–3)》"正态分布"一节教材这样描述正态曲线第一个特点: "曲线位于 x 轴上方, 与 x 轴不相交." 教材延续了函数模块对渐近线的态度——避而不谈.

2　对渐近线的几点偏颇认识

虽然渐近线始终在我们身边, 但教材的刻意回避使得学生甚至部分教师对渐近线认识不够, 甚至有所偏颇. 比如, 在学习以上函数的图像与性质(包括双曲线)后, 我们对渐近线的认识可能只停留在"无限伸展", 会认为所有无限伸展下去或远离原点的曲线都有渐近线, 曲线都是"单调"趋于渐近线的, 曲线与其渐近线是没有交点的, 或者认为曲线在"渐近"的过程中与其渐近线是没有交点的, 等等.

3　高等数学教材中的渐近线

华东师范大学数学系主编的《数学分析(上册, 第二版)》是这样来刻画渐近线的: 若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时, 点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零, 则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.

根据渐近线的倾斜角 α 大小可将其划分为斜渐近线 $(0<\alpha<\pi)$、水平渐近线 $(\alpha=0)$ 和垂直渐近线 $\left(\alpha=\dfrac{\pi}{2}\right)$.

在弄清了渐近线的定义后, 一个自然的问题是: 曲线在什么情况下存在渐近线？如果曲线存在渐近线, 我们又如何来求出这些渐近线呢?

设曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$, 如图 1, 曲线上动点 P 到渐近线的距离

$$|PN|=|PM\cos\alpha|=|f(x)-(kx+b)|\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}. \quad\cdots\cdots①$$

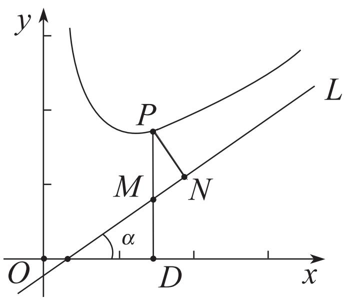

图 1

根据渐近线的定义, 当 $x \to +\infty$ (对于 $x \to -\infty$ 情形也有相应的结果) 时 $|PN| \to 0$, 从而应有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$ ············②

或 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b.$ ·····················③

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-k\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}(f(x)-kx)=0\cdot b=0$, 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k.$ ··········④

于是, 若曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$, 则 k、b 可由④和③式来确定. 反之, 若由④和③式求得 k、b, 再由②和①式知道 $|PN|\to 0$, 从而得 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. 因此, 求曲线的斜渐近线问题就转化为求④和③两式的极限问题.

特别地, 若曲线 $y=f(x)$ 存在水平渐近线 $y=b$, 则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$, 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$. 反之, 则说明 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

若曲线 $y=f(x)$ 存在垂直渐近线 $x=x_0$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$. 反之, 则说明 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

4 重新认识渐近线

根据以上分析, 我们重新认识曲线的渐近线.

第一, 并不是所有无限伸展或远离原点的曲线都有渐近线. 如, $y=x^2$, $y=\sin x$ 等都没有渐近线.

第二, 在定义“无限地远离原点”中的原点, 也未必是原点, 可以是任意一个给定的点, 两者是等价的, 只不过原点比较有名且明确而已. 如, $x=1$ 是 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 的垂直渐近线, “无限地远离原点”和无限地远离点 $(1,0)$ 甚至点 (a,b) 没有本质区别.

第三, 定义中, 当曲线上的动点无限地远离原点时, 只需要以某种方式远离即可, 不需要以任意方式都远离. 如, $y=0$ 是 $y=2^x$ 的水平渐近线, 动点 P 无限地远离原点, 即这只是当 $x\to-\infty$ 时, $y=2^x$ 无限接近于 x 轴, 而当 $x\to+\infty$ 时, $y=2^x$ 无限远离 x 轴.

第四, 若曲线存在渐近线, 则当 x 充分大 (或充分小), 或无限趋于 x_0 ($x=x_0$ 是其垂直渐近线) 时, 曲线基本就像相应渐近线那样, 近似于一条直线. 如, 双曲线存在渐近线, 而抛物线则没有, 从渐近线的角度很容易让学生明白两者的区别.

第五, 曲线与其渐近线是可以相交的, 甚至曲线在“渐近”的过程中与其渐近线可无限次地穿过来穿过去.

高中教材唯一一次挑明渐近线身份是学习双曲线时, 给出指示性定义后教材补充一句“也就是说, 双曲线与它的渐近线无限接近, 但永不相交. ”因此可能会给学生造成一般的渐近线都不能与曲线相交的错误认识.

如, $y=\dfrac{\sin x}{x}$. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, 所以 $y=0$ 是该偶函数的水平渐近线. 但 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有无数个零点, 如图 2.

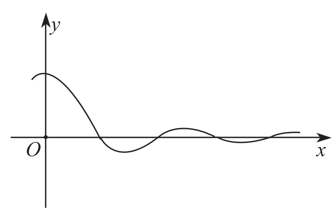

图 2

第六, 曲线与其渐近线可以是相切的, 而且可以有无数个切点. 如, $y=\dfrac{\sin x+1}{x}$. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+1}{x}=\infty$, 所以 $y=0$, $x=0$ 分别是该函数的水平渐近线和垂直渐近线. 但该函数与其水平渐近线 $y=0$ 有无数个切点 $\left(\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,0\right)(k\in\mathbf{N})$, 如图 3.

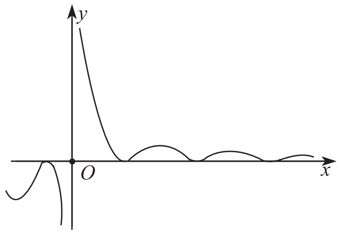

图 3

第七, 根据以上讨论知, 曲线并不都是一直“单调”接近渐近线的.

5　渐近线的简单应用

在高中阶段, 渐近线不是曲线最重要的性质, 但若曲线有渐近线, 则它能帮助我们准确认识和快速把握曲线的形状、位置及大小等, 对于解题有很大帮助.

5.1　研究双曲线型函数

除了基本初等函数外, 最典型的函数是 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$. 当 $a=0, b\neq 0$ 时, $f(x)$ 是反比例函数; 当 $a\neq 0, b=0$ 时, $f(x)$ 是一次函数; 当 $ab\neq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有怎样的性质, 其图像又是什么样子呢? 这是很好的研究性学习素材. 根据求渐近线的公式, $\lim\limits_{x\to 0}\left(ax+\dfrac{b}{x}\right)=\infty$, 所以 $x=0$ 是其一条垂直渐近线; 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{b}{x^2}\right)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x}=0$, 所以 $y=ax$ 是其一条斜渐近线. 因此, 函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ 的图像是夹在两条渐近线 $x=0$ 和 $y=ax$ 之间的双曲线 (如图 4). 结合其奇偶性、单调性等性质容易画出四种情况的图像:

(1) 当 $a>0$, $b>0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像如图 4;

(2) 当 $a>0$, $b<0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像如图 5;

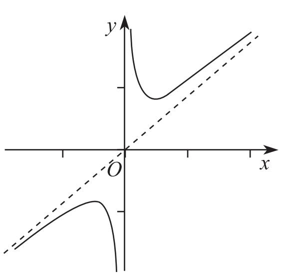

图 4

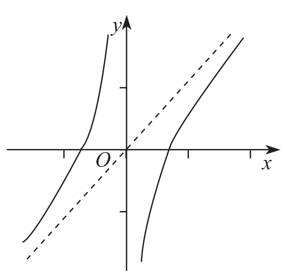

图 5

(3) 当 $a<0$, $b<0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像如图 6;

(4) 当 $a<0$, $b>0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像如图 7.

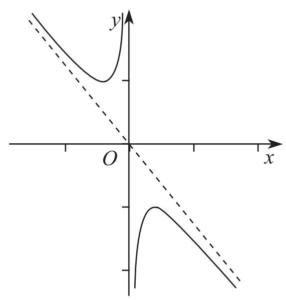

图 6

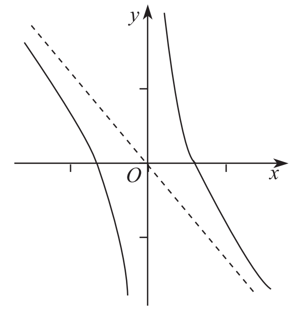

图 7

5.2　求分式函数图像的渐近线

我们讨论一般情况的有理分式函数, 形如: $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (其中 $f(x)$、$g(x)$ 都是关于 x 的非零多项式).

例　讨论下列三个函数图像的渐近线.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{2x^2-x+1}$;

(2) $g(x)=\dfrac{x}{2x^2+x-1}$;

(3) $h(x)=\dfrac{x^3+x}{2x^2+x-1}$.

解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 图像如图 8, 存在水平渐近线 $y=\dfrac{1}{2}$.

(2) 函数 $g(x)$ 的定义域为 $\left\{x|x\neq -1, x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$, 图像如图 9, 存在水平渐近线 $y=0$ 和垂直渐近线 $x=-1, x=\dfrac{1}{2}$.

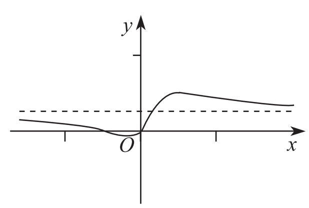

图 8

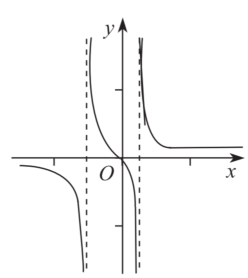

图 9

(3) 函数 $h(x)$ 的定义域为 $\left\{x|x\neq -1, x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$, 图像如图 10, 存在垂直渐近线 $x=-1$, $x=\dfrac{1}{2}$ 和斜渐近线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$.

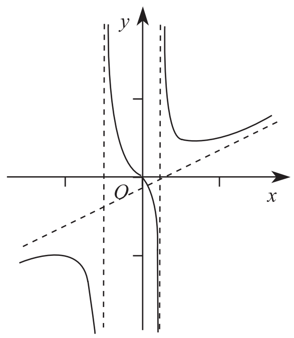

图 10

我们总结求有理分式函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 渐近线的一般结论:

第一, 若 x_0 是方程 $g(x)=0$ 的实数解, 且 $f(x_0)\neq 0$, 则有理分式函数图像存在垂直渐近线 $x=x_0$;

第二, 若多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数相等, 且它们的最高次项系数分别为 a、b, 则该函数图像存在水平渐近线 $y=\dfrac{a}{b}$;

第三, 若多项式 $f(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数, 则 $y=0$ 为该函数图像的水平渐近线;

第四, 若多项式 $f(x)$ 的次数比 $g(x)$ 的次数大 1, 则该函数图像存在斜渐近线, 可用公式④和③求解.

2015 年高考安徽卷理科第 9 题是以分式函数为背景而命制的.

例 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图像如图 11 所示, 则下列结论成立的是 ·············· ( )

(A) $a>0, b>0, c<0$;

(B) $a<0, b>0, c>0$;

(C) $a<0, b>0, c<0$;

(D) $a<0, b<0, c<0$.

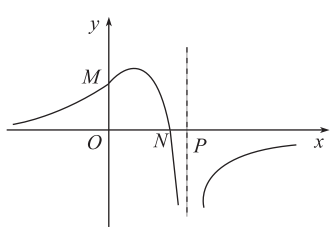

图 11

由 $f(x)$ 的分母可知, 函数 $f(x)$ 的图像存在垂直渐近线 $x=-c$, 由图 11 可知 $-c>0$, 所以 $c<0$. 又因 $f(x)$ 分母的次数比分子大, 故有水平渐近线 $y=0$. 观察图像可知 $f(0)>0$, 得 $b>0$. 再观察图 11 知, 当 $x\to -c$ 时, $f(x)<0$, 得 $a<0$. 所以选项 (C) 是正确的.

5.3 判断函数零点的个数

渐近线思想在解高考题时常能达到事半功倍的效果.

2015 年高考课标 I 卷理科选择题第 15 题以函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)-ax+a$ 为载体, 而 2016 年高考乙卷 (课标 I 卷) 理科解答题第 21 题以函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 为背景, 两个函数模型如出一辙.

第 21 题第 (Ⅰ) 小题: 已知 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围. 改编一下: 当 $a=0$ 时, 试判断函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$ 零点个数. 因为 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$, 当 $x<1$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. 如果我们忽略了渐近线, 很容易得到错误结论: 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 而 $f(1)=-\mathrm{e}<0$, 所以函数有两个零点. 事实上, 当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to 0$ (用洛必达法则可得: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\mathrm{e}^{-x}}=0$), 即函数 $f(x)$ 以 x 轴为渐近线; 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$, 所以函数只有一个零点.

类似试题如 2015 年高考湖南省文科第 14 题:

若函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是____.

该题是已知零点个数求参数范围, 数形结合求解时需要考虑该函数图像的水平渐近线.

5.4 解答高考新定义题

再来看 2010 年高考福建卷理科第 10 题:

对于具有相同定义域 D 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若存在函数 $h(x)=kx+b$ (k、b 为常数), 对任给的正数 m, 存在相应的 $x_0\in D$, 使得当 $x\in D$ 且 $x>x_0$ 时, 总有 $\begin{cases}0<f(x)-h(x)<m,\\0<h(x)-g(x)<m,\end{cases}$ 则称直线 $l: y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的“分渐近线”. 给出定义域均为 $D=\{x|x>1\}$ 的四组函数如下:

① $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$;

以模型思想引领习题教学探究

——以分成两个等腰三角形为例

李发勇
(四川省巴中市巴州区大和初中, 四川 巴中 636031)

数学模型是一种常见的解决问题的思考方法, 模型思想是数学课标 2011 年版十大核心概念之一. 在几何教学中, 定义、定理、性质所代表的图形以及在几何中经常遇到的经典图形和由实际问题抽象为几何图形，我们都称之为几何模型. 运用模型思想对教材典型几何习题进行教学, 探寻学生思维“最近发展区”, 有利于突破学生思维障碍, 激发学生学习兴趣,

~~~~~~

② $f(x)=10^{-x}+2$, $g(x)=\dfrac{2x-3}{x}$;

③ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}$;

④ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$, $g(x)=2(x-1-\mathrm{e}^{-x})$.

其中, 曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 存在“分渐近线”的是··( )

(A) ①④; (B) ②③; (C) ②④; (D) ③④.

该题属于基于渐近线的新定义题, 考查学生阅读理解和信息迁移能力. 第 ① 组两个函数都没有渐近线; 第 ② 组, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 从直线 $y=2$ 上方趋于 2, 而 $g(x)$ 从直线 $y=2$ 下方趋于 2, 故 $y=2$ 是两函数的“分渐近线”; 第 ③ 组, $f(x)$ 是双曲线型函数, 存在渐近线 $x=0$, $y=x$, 而 $g(x)$ 存在渐近线 $x=1$, $y=x$, 但是, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)>x$, $g(x)>x$, 即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是从直线 $y=x$ 上方趋于渐近线 $y=x$, 故不满足题意; 第 ④ 组, 当 $x\to+\infty$ 时, 因为 $f(x)=2(x-1)+\dfrac{2}{x+1}\to 2(x-1)$, $g(x)=2(x-1)-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}\to 2(x-1)$, 并且 $f(x)>2(x-1)$, $g(x)<2(x-1)$, 所以 $y=2(x-1)$ 是 $f(x)$ (还有一条垂直渐近线 $x=1$) 和 $g(x)$ 的斜渐近线, 且分别从两侧趋于 $y=2(x-1)$, 故选 (C)

5.5 求函数的对称中心

渐近线在研究有些函数的对称性时又大显身手.

如 2010 年上海春季高考第 18 题涉及确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{4-2^x}$ 图像的对称中心.

分式函数的渐近线往往要考虑使分母为零的情况, 显然 $x=2$ 是其唯一一条垂直渐近线. 而当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to 0$; 当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to\dfrac{1}{4}$, 即该函数还有两条水平渐近线 $y=0$, $y=\dfrac{1}{4}$. 我们猜想点 $P\left(2,\dfrac{1}{8}\right)$ 可能是其对称中心. 容易验证, $f(x)+f(4-x)=\dfrac{1}{4-2^x}+\dfrac{1}{4-2^{4-x}}=\dfrac{8-(2^{4-x}+2^x)}{(4-2^x)(4-2^{4-x})}=\dfrac{8-(2^{4-x}+2^x)}{32-4(2^{4-x}+2^x)}=\dfrac{1}{4}$.

总之, 从初中起渐近线就一直默默陪伴在我们身旁, 我们要重新认识它, 不可“怠慢”它, 它是我们研究函数图像与性质的有力工具, 也是不可或缺的解题利器.

参考文献

[1] 刘绍学. 数学(第 2 版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2012.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析 (上册)(第 2 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
~~~~~~