一个简单不等式问题引出的思考

200062 华东师范大学数学系 林 磊

一、问题及其解答

有一天, 在QQ聊天时有人提出了如下的问题.

问题 设a、b、c是任意实数, 则不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

有多少种证法?

这个问题, 实际上是没有标准答案的, 因为证法是可以不断创造出来的, 而且如何来界定两种证法确属不同的证法有时也并非易事. 但是我们还是可以尝试着给出该不等式的几种证明方法.

证法一: (利用均值不等式) 不妨设a、b、$c \geqslant 0$, 则

$$a^2+b^2+c^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2} \geqslant ab+bc+ca.$$

证法二: (利用排序不等式) 先来介绍一下排序不等式: 设$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$是$2n$个任意实数, 不妨设$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. 又设$c_1, c_2, \cdots, c_n$是$b_1, b_2, \cdots, b_n$的任一排列, 那么我们有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

也就是说, 顺序和不小于乱序和，乱序和不小于逆序和.

那么利用这一不等式, 不妨设$a \leqslant b \leqslant c$, 则 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

证法三: 假设$a \leqslant b \leqslant c$, 那么$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(b-a)^2+(c-a)(c-b) \geqslant 0$, 所以$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

这一证法实际上就是排序不等式的证明方法.

证法四: (配方法) 原不等式等价于

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geqslant 0.$$

而由于

$$\begin{aligned}&2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

因此原不等式成立, 且显然等号仅在$a=b=c$时成立.

证法五: (配方法) 我们来看看另一种配方法.

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=(a^2-ab-ac)+b^2+c^2-bc\\&=\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)^2-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{bc}{2}\right)\\&\quad+b^2+c^2-bc\\&=\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{4}c^2-\frac{3}{2}bc\right)\\&=\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

于是, 原不等式得证.

有人可能会疑惑, 证法四的配方法很简洁、漂亮, 与之相比, 证法五的配方法看上去要复杂许多, 我们为什么还要介绍呢? 原因是证法四虽然简洁, 但它不是通法, 而是针对这个不等式的特殊法. 但是, 学过高等代数的老师会知道, 证法五中的配方法是针对一般二次齐次不等式的通法, 也就是化二次型为标准型的通法.

证法六: 原不等式等价于$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqslant 0$, 而此不等式的左边是关于变量$a$、$b$、$c$的二次型, 所以此不等式成立等价于该二次型是半正定二次型, 也等价于$f(a,b,c)=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$是半正定二次型. 由于此二次型的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

所以，由半正定二次型的判别法，我们只要验证矩阵A的所有主子式均非负. 因为

$$2>0,\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3>0,\ |A|=0,$$

所以A是半正定矩阵，从而$f(a,b,c)$是半正定的，于是原不等式成立.

证法七：如证法六，欲证原不等式，即只要证二次型$f(a,b,c)$是半正定的，或等价于证明它的系数矩阵A是半正定的. 而利用半正定矩阵的判别法，欲证明实对称矩阵A是半正定的，只要证明A的特征值均非负. 由计算知，A的特征多项式为

$$\begin{aligned} g(\lambda)&=|\lambda E-A| \\ &=\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=\lambda(\lambda-3)^2, \end{aligned}$$

所以A的特征值为3、3、0，它们均非负，于是A半正定，因此，原不等式成立.

证法八：(判别式法) 将$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=a^2-(b+c)a+(b^2+c^2-bc)$看成是变量$a$的二次式，而原不等式等价于此二次式恒非负，即$a^2-(b+c)a+(b^2+c^2-bc)\geqslant 0$，而要证此二次三项式非负，只需证明其判别式$\Delta\leqslant 0$. 显然，其判别式$\Delta=(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)=-3b^2-3c^2+6bc=-3(b-c)^2\leqslant 0$，因此，原不等式成立.

证法九：(导数法) 设$a\leqslant b\leqslant c$，考虑函数$f(x)=x^2-(a+b)x+(a^2+b^2-ab)$，$x\in[b,+\infty)$. 则原不等式等价于函数$f(x)$在定义域上恒非负. 由于$f'(x)=2x-(a+b)\geqslant 0$，$x\in[b,+\infty)$，于是$f(x)$是增函数，而$f(b)=b^2-(a+b)b+(a^2+b^2-ab)=a^2+b^2-2ab=(b-a)^2\geqslant 0$，于是对任何$c\geqslant b$，有$f(c)\geqslant f(b)\geqslant 0$，即原不等式成立.

证法八与证法九本质上是一样的，都是利用了二次函数的性质.

证法十：(利用柯西不等式)由于当$ab+bc+ca<0$时原不等式显然成立，所以不妨设$ab+bc+ca\geqslant 0$. 那么由柯西不等式，$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2+c^2)\cdot(b^2+c^2+a^2)\geqslant(ab+bc+ca)^2$. 从而$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

二、问题的推广

在给出了问题的解答后，我们来考虑一下原问题的推广.

推广一　设a_1、a_2、$\cdots$、a_n是任意实数$(n>2)$，则

$$\begin{aligned} &a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \\ \geqslant\ &a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1. \end{aligned}$$

利用证法一、二、四、十，可以容易地证明推广一. 而利用证法六来证，会略微麻烦点，但也可以证明. 至于利用求特征值法的证法七，会有些困难，就留给读者了.

推广二　设a_1、a_2、$\cdots$、a_n是任意实数$(n>2)$，则$\dfrac{n-1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\sum\limits_{i<j}a_ia_j$.

证明：推广二中的不等式等价于不等式

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{i<j}a_ia_j\geqslant 0.$$

因为

$$\begin{aligned} &(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{i<j}a_ia_j \\ =&\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2\geqslant 0, \end{aligned}$$

且等号成立当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$. 于是，推广二成立.

利用证法八，再辅以数学归纳法，也同样可容易证明推广二.

那么这个推广二中的系数$\dfrac{n-1}{2}$是怎么想出来的? 很多人说：这是靠经验凑出来的! 如果我们这样回答，相信很多人会不乐意，因为它不容易学. 我们要说：这是算出来的! 假设m是一给定的实数，使得对任意n个实数a_1、a_2、$\cdots$、a_n，恒有$m\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\sum\limits_{i<j}a_ia_j$. 这等价于$n$元二次型$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=2m\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum\limits_{i<j}a_ia_j$是半正定的. 由于$f$的系数矩阵$A_n=\begin{pmatrix} 2m & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2m & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & 2m \end{pmatrix}$的各阶主子式均需要非负. 而对任意给定的正整数$k(1\leqslant k\leqslant n)$，$A_n$的$k$阶主子式均相等，等于$(2m-k+1)(2m+1)^{k-1}$. 于是，$2m\geqslant n-1$，且当$2m>n-1$时$A_n$的所有主子式均大于0. 这就是说，当$m=\dfrac{n-1}{2}$时，二次型$f$是半正

一道动点轨迹问题的探究及引申

314200 浙江省平湖中学 毛良忠

数学离不开解题, 解决问题是数学的核心. 在题如林、题如海的学习中能否真正跳出题海, 抓住解题要领, 学会解题, 享受数学学习乐趣呢? 在平时学习中学生解了大量的题, 但还是“不开窍”的一个基本原因是: 这些学生没有分析过所解的题, 也没有分析过典型的习题, 解题常常只是为了得个答案. 罗增儒先生在其著作《解题学引论》中提出解题学习要经历: 简单模仿、变式练习、自发领悟、自觉领悟. 谁也无法教会我们解所有的题目, 重要的是, 通过分析典型例题的解题过程来领悟那种解无限道题的数学机智. 本文试图从一道联考试题的解题分析出发, 积极探索与原有知识及已有解题经验间的联系, 通过对问题的不断变更凸显问题的本质.

问题 已知圆O的半径为1, P为圆周上一点, 现将如图1放置的边长为1的正方形(实线所示, 正方形的顶点A和点P重合)沿着圆周顺时针滚动, 经过若干次滚动, 点A第一次回到点P的位置, 则点A走过的路径的长度为______.

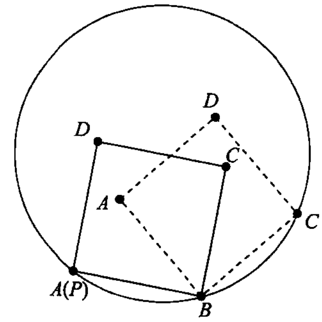

图1

点评: 此题是2015年浙江省五校联考试题,有一定的新意和难度, 在这个问题解决中需要突破的节点有两个: (1)滚动中点A的轨迹是怎样的图形? (2)正方形在圆周上至少转动几次后才回到初始点P?

如何突破这两个关键点? 成功的解题关键在于是否真正理解题目, 而理解问题包括2个水平:

首先熟悉题目: 从题目条件开始叙述, 尽可能生动、清晰地使整个题目形象化, 可暂时抛开细节, 将目标引入脑海. 对题目投入足够的注意力, 可能会激发我们的记忆力, 为重新回忆起一些相关的问题做好准备. 在此题中正方形的滚动我们可通过实际操作, 使点A轨迹更形象化, 在动中寻找解题的突破口.

定的. 而当$m > \dfrac{n-1}{2}$时, 二次型f是正定的. 即$\dfrac{n-1}{2}$是使得推广二的不等式恒成立的最小数. 从而我们也有以下:

推广三 设a_1、a_2、$\cdots$、a_n是任意不全为0的实数, $m > \dfrac{n-1}{2}$, 那么$m\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 > \sum\limits_{i<j} a_i a_j$.

从以上的讨论中我们可以看到, 中学的许多知识与大学的知识有着盘根错节的联系. 因此, 如果要知其所以然, 在教学中做到收放自如, 还需对大学的数学有更多的了解才是.

鸣谢: 本文的写作受到了与QQ群友讨论的启发, 有部分证法是群友提供的, 在此一并表示感谢.