过不共线三点的圆锥曲线

200241 华东师范大学数学系 林 磊
201700 上海市青浦高级中学 易国强

我们知道, 过不共线三点确定唯一一个圆. 那么自然会想到, 过不共线的三点有多少个椭圆、双曲线和抛物线? 本文试图给这个问题做出解答.

我们首先来解决抛物线的问题.

结论1: 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ 是直角坐标系 xOy 中不共线的三点, 且它们的横坐标互不相同, 则有唯一的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、B、C 三点.

证明: 设 $y=ax^2+bx+c$ 过 A、B、C 三点, 则可得到方程组 $\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=y_1, \\ ax_2^2+bx_2+c=y_2, \\ ax_3^2+bx_3+c=y_3, \end{cases}$ 其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$ 是一个三阶范德蒙行列式 (参见 [2, P116]), 所以

$$D=-(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1).$$

由已知条件可得 $D\neq 0$, 所以上述方程组有唯一解. 又因为 $D_a=\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$, 由已知 A、B、C 三点不共线可得 $D_a\neq 0$ (参见 [1, P90-100]), 由克莱姆法则得 $a=\dfrac{D_a}{D}\neq 0$, 所以存在唯一的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、B、C 三点, 结论1得证.

由结论1可知, 任意给定不共线的三点, 只要所建直角坐标系 xOy 的 y 轴与任两点的连线不平行, 就可以得到唯一的一条对称轴与 y 轴平行的抛物线经过这三点. 这样, 对于给定的不在一直线上的三点, 以及任意给定的对称轴的方向, 如果这一方向与三点中任两点的连线方向不一致, 就可选取平行于所给方向的直线作为 y 轴, 以垂直于它的直线作为 x 轴建立直角坐标系, 由结论1知, 此时存在唯一的抛物线经过这三点, 且对称轴平行于给定的方向. 由此我们得到:

结论2: 对于任意给定的不在一直线上的三点以及任意给定的方向, 只要该方向不是这三点中任两点的连线方向, 就恰存在唯一的以该方向为对称轴方向的抛物线经过这三点. 因此, 经过不共线的三点, 存在无数条抛物线.

我们再来考虑椭圆的情况. 我们有:

结论3: 给定平面上不共线的三点 A、B、C, 任意给定长、短轴方向 $\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, 其中 $\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_2}$, 以及长、短轴的长度之比 k (其中 $k>1$), 则存在唯一满足上述对称轴方向和长度比的椭圆经过 A、B、C 三点.

证明: 我们以平行于方向 $\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$ 的两条直线建立平面直角坐标系 xOy, 不妨设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ 三点不共线, 定义仿射变换 φ : $\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky \end{cases}$ ($k>1$ 为常数), 则 φ 是一个可逆的线性变换, 且将直角坐标平面 xOy 变成直角坐标平面 $x'Oy'$ (平面 $x'Oy'$ 是指平面 xOy 上任意一点 $P(x,y)$ 经过变换后得到的点 $P'(x',y')$ 组成的平面). 在直角坐标平面 $x'Oy'$ 中, 有唯一的圆 M' 经过点 A'、B'、C' (易证这三点也不共线). 不妨设圆 M' 的方程为 $(x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2$, 则由 φ 的可逆性可知: 在直角坐标平面 xOy 上, 有唯一的曲线 M 经过 A、B、C 三点. 其中, 曲线 M 的方程是 $(x-a)^2+(ky-b)^2=r^2$, 此方程可以化为 $\dfrac{(x-a)^2}{r^2}+\dfrac{\left(y-\dfrac{b}{k}\right)^2}{\dfrac{r^2}{k^2}}=1$, 所以曲线 M 是一个长、短轴平行于坐标

轴(即给定的长、短轴方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$), 且长、短轴之比恰好为k的一个椭圆, 这个椭圆经过A、B、C三点. 当我们改变长、短轴方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$或者k的值时, 就可以得到无数个椭圆经过A、B、C三点. 由此我们得到:

结论4: 对于任意给定的不在一直线上的三点以及任意给定的对称轴方向和长短轴之比, 存在唯一的以该方向为对称轴方向、且具有给定长短轴比的椭圆经过这三点. 因此, 经过不共线的三点, 有无数个椭圆.

最后我们来考虑双曲线的情况. 我们首先来考虑等轴双曲线的情况.

结论5: 对于给定平面上不共线的三点A、B、C, 以及给定的渐近线方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, $\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_2}$, 且$A$、$B$、$C$中任两点的连线与$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$不平行, 则存在唯一的以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向的等轴双曲线经过$A$、$B$、$C$三点.

证明: 我们以平行于$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$方向的两条直线的角平分线建立直角坐标系xOy, 不妨设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$三点不共线, 则$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. 假设有等轴双曲线$(x-a)^2-(y-b)^2=c\ (c\neq 0)$经过$A$、$B$、$C$三点, 上述方程可以化为$2ax-2by+b^2-a^2+c=x^2-y^2$, 于是我们得到方程组(Ⅰ):

$$\begin{cases}2ax_1-2by_1+b^2-a^2+c=x_1^2-y_1^2,\\ 2ax_2-2by_2+b^2-a^2+c=x_2^2-y_2^2,\\ 2ax_3-2by_3+b^2-a^2+c=x_3^2-y_3^2.\end{cases}$$

此方程组可以变形为(Ⅱ):

$$\begin{cases}2a(x_1-x_2)-2b(y_1-y_2)\\ =x_1^2-y_1^2-x_2^2+y_2^2,\\ 2a(x_1-x_3)-2b(y_1-y_3)\\ =x_1^2-y_1^2-x_3^2+y_3^2,\end{cases}$$

此方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2(x_1-x_2) & -2(y_1-y_2)\\ 2(x_1-x_3) & -2(y_1-y_3)\end{vmatrix}$$

$$=-4\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以方程组(Ⅱ)有唯一解a、b, 然后代入原方程组可以得到唯一的c, 所以方程组(Ⅰ)有唯一解a、b、c, 且由已知条件(任两点与渐近线方向不平行, 即任两点的方向不与直线$y=\pm x$平行)可知$c\neq 0$. 所以结论5成立.

由结论5可知, 对于不共线的三点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, 只要任两点的连线不与直线$y=\pm x$平行, 则可以得到唯一的等轴双曲线$(x-a)^2-(y-b)^2=c\,(c\neq 0)$经过这三点$A$、$B$、$C$.

现在我们来考虑一般的双曲线. 对于给定平面上不共线的三点A、B、C, 以及给定的渐近线方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, 且A、B、C中任两点的连线与$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$不平行, 我们以平行于$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$方向的两条直线的角平分线建立直角坐标系xOy. 由所建坐标系, 所以不妨设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, $\overrightarrow{d_1}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{d_2}=(-\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 考虑可逆仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky\end{cases}$ $(k>0)$, 则在平面直角坐标系$x'Oy'$中, $\overrightarrow{d_1'}=(\cos\alpha,k\sin\alpha)$, $\overrightarrow{d_2'}=(-\cos\alpha,k\sin\alpha)$, 其中$\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 假设$\overrightarrow{d_1'}\perp\overrightarrow{d_2'}$, 则我们可以得到$k=\cot\alpha$. 也就是存在仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky\end{cases}$ $(k>0)$, 它将$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$变成两条互相垂直的向量$\overrightarrow{d_1'}\perp\overrightarrow{d_2'}$, 将不共线三点$A$、$B$、$C$变成不共线三点$A'$、$B'$、$C'$, 且$A'$、$B'$、$C'$中任两点连线不与向量$d_1'$、$d_2'$平行. 在直角坐标平面$x'Oy'$中, 由上述结论5, 存在唯一的等轴双曲线$(x'-a)^2-(y'-b)^2=c$ $(c\neq 0)$经过三点A'、B'、C', 这条双曲线恰好以$\overrightarrow{d_1'}$、$\overrightarrow{d_2'}$的方向为渐近线方向. 由φ的可逆性可知, 在直角坐标平面xOy上, 有唯一的双曲线$(x-a)^2-(ky-b)^2=c\ (c\neq 0)$, 即$\dfrac{(x-a)^2}{c}-\dfrac{\left(y-\dfrac{b}{k}\right)^2}{\dfrac{c}{k^2}}=1$经过$A$、$B$、$C$三点, 此双曲线以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向. 由此我们可以得到:

结论6: 对于平面上任意给定不共线的三点A、B、C, 以及给定的渐近线方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, 如果A、B、C中任两点的连线与$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$不平行, 则有唯一的以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向的双曲线经过A、B、C三点. 当我们改变渐

近线的方向时, 可以得到无数条双曲线经过A、B、C三点.

综合结论2、4、6, 我们可以得到最终结论:

定理: 经过不共线的三点, 分别有无数个椭圆、双曲线和抛物线.

这样我们已经比较完整地回答了本文最开始提出的问题, 下面分别给出一些例子.

对于抛物线, 若$A(0,0)$、$B(1,2)$、$C(2,-1)$, 则有唯一的对称轴平行于y轴的抛物线$y=-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x$经过$A$、$B$、$C$三点; 若我们取$x$轴方向为抛物线的对称轴方向, 则可以上述坐标系的$y$轴正半轴为$x'$正半轴、$x$轴负半轴为$y'$轴正半轴建立坐标系$x'Oy'$, 又可以得到另一条抛物线$y'=-\frac{5}{6}x'^2+\frac{7}{6}x'$. 因此, 在原坐标系下经过$A$、$B$、$C$的此抛物线的方程为$x=\frac{5}{6}y^2-\frac{7}{6}y$.

对于椭圆, 若给定三点为$A(-2,0)$、$B(2,0)$、$C(0,1)$, 考虑仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky\end{cases}$ ($k>1$为常数), 则A、B、C三点变成$A'(-2,0)$、$B'(2,0)$、$C'(0,k)$三点, 在坐标平面$x'Oy'$中有唯一的圆$(x')^2+\left(y'-\frac{k^2-4}{2k}\right)^2=\left(\frac{k^2+4}{2k}\right)^2$经过$A'$、$B'$、$C'$三点, 那么在原坐标平面中, 有唯一的椭圆$x^2+\left(ky-\frac{k^2-4}{2k}\right)^2=\left(\frac{k^2+4}{2k}\right)^2$, 即$\dfrac{x^2}{\left(\frac{k^2+4}{2k}\right)^2}+\dfrac{\left(y-\frac{k^2-4}{2k^2}\right)^2}{\left(\frac{k^2+4}{2k^2}\right)^2}=1$经过$A$、$B$、$C$三点, 当我们改变$k$时就可以得到无数个椭圆. 特别地, 若$k=2$, 我们可以得到椭圆的标准方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

对于双曲线, 若给定的三点为$A(0,0)$、$B(1,2)$、$C(-1,3)$, 则可以得到唯一的渐近线平行于直线$y=\pm x$的等轴双曲线$\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\left(y-\frac{11}{10}\right)^2=-\frac{18}{25}$经过$A$、$B$、$C$三点. 如果以$\overrightarrow{d_1}=(\cos 60^\circ,\sin 60^\circ)$、$\overrightarrow{d_2}=(-\cos 60^\circ,\sin 60^\circ)$为渐近线方向, 我们可以得到仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=\frac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$ (用前述方法可以求出). 在此变换下, $\overrightarrow{d_1'}\perp\overrightarrow{d_2'}$, $A'(0,0)$、$B'\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$、$C'(-1,\sqrt{3})$, 在坐标平面$x'Oy'$中有等轴双曲线$\left(x'-\frac{3}{10}\right)^2-\left(y'-\frac{7\sqrt{3}}{30}\right)^2=-\frac{11}{150}$经过$A'$、$B'$、$C'$三点. 所以在坐标平面$xOy$中, 有双曲线$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{7\sqrt{3}}{30}\right)^2-\left(x-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{11}{150}$, 即$\frac{1}{3}\left(y-\frac{7}{10}\right)^2-\left(x-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{11}{150}$经过$A$、$B$、$C$三点, 而且它以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向.

最后我们以这样一个问题来结束本文: 经过给定三点的圆锥曲线具有怎样的共同性质?

参考文献

[1] 上海市高级中学课本·数学(高二, 试用本)[M]. 上海: 上海教育出版社, 2007年8月.

[2] 陈志杰主编. 高等代数与解析几何(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008年12月.

(上接第8–8页)

线三点的坐标可以确定一个二次函数; *了解平行线性质定理的证明; *探索并证明垂径定理; *探索并证明切线长定理; *了解相似三角形判定定理的证明.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(实验稿)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012.