复数的矩阵表示

200241 华东师范大学数学系 林 磊

我们知道, 由于矩阵在数学及其相关学科中有着越来越多的用处, 因此它已经成为现代数学中的一个重要工具. 正是考虑到这一点, 我们的许多新编高中数学教材已经或多或少地增加了矩阵理论初步介绍的内容, 有些还提到了矩阵的各种应用, 如: 矩阵在几何变换中的应用等. 本文试图从如何用实矩阵来表示复数这一角度介绍矩阵的另一类应用, 从而进一步展示出矩阵理论的重要性.

一、复数的矩阵表示及基本运算

1.1 复数的矩阵表示

下面我们就来考虑如何用实系数矩阵来表示复数, 即复数的矩阵表示. 首先我们来考虑全体2阶实系数方阵集合V中的一个子集:

$$\mathbf{M}=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right| a、b\in\mathbf{R}\right\}.$$

也就是说, $\mathbf{M}$是由主对角线元相同、而次对角线上元互为相反数的所有2阶实方阵组成的集合.

对任意的复数$z=a+b\mathrm{i}$, 其中a、b是实数, 我们可以构造一个2阶实系数的方阵$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, 显然矩阵$Z\in\mathbf{M}$. 我们说$\rho: z\longmapsto Z$是复数集$\mathbf{C}$到矩阵集合$\mathbf{M}$上的一一对应, 或双射(即既是单射又是满射).

1.2 加法运算与减法运算

我们知道形状相同的矩阵之间可以进行加法运算. 对于集合$\mathbf{M}$中的任意两个矩阵$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$以及$Z'=\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$, 我们有

$$Z+Z'=\begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix}\in\mathbf{M},$$

这说明集合$\mathbf{M}$关于矩阵的加法运算是封闭的, 于是集合$\mathbf{M}$中的任意两个矩阵可以做加法运算, 所得到的和仍在$\mathbf{M}$中. 又由于

$$-Z=\begin{pmatrix} -a & -(-b) \\ -b & -a \end{pmatrix}\in\mathbf{M},$$

所以, $\mathbf{M}$关于减法运算也是封闭的. 即

$$\begin{aligned} Z-Z' &= Z+(-Z') \\ &= \begin{pmatrix} a-a' & -(b-b') \\ b-b' & a-a' \end{pmatrix}\in\mathbf{M}. \end{aligned}$$

如果我们通过映射ρ将复数z看成与矩阵Z等同, 那么这种等同还是保持加法运算的. 这是因为我们很容易看出, 如果$z'=a'+b'\mathrm{i}$(其中a', b'是实数)也是任意复数, 那么

$$\begin{aligned} \rho(z+z') &= Z+Z' \\ &= \rho(z)+\rho(z'),\ \forall z、z'\in\mathbf{C}. \end{aligned}$$

也就是说, 如果我们将$\mathbf{M}$中的矩阵看成是复数, 那么就可以用矩阵的加法来定义复数的加法. 也可以用矩阵的减法来定义复数的减法.

1.3 乘法运算

下面我们来考虑集合$\mathbf{M}$中两个矩阵的乘法.

设$z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$, $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$是复数, 其中a_1、b_1、a_2、b_2都是实数. 又设

$$Z_1=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix},\ Z_2=\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

分别是z_1, z_2在ρ下的像, 那么

$$\begin{aligned} Z_1Z_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & -(a_2b_1+a_1b_2) \\ a_2b_1+a_1b_2 & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}\in\mathbf{M}. \end{aligned}$$

因此, $\mathbf{M}$关于矩阵的乘法运算是封闭的, 并且复数与矩阵的等同还保持乘法运算, 即

$$\rho(z_1z_2)=Z_1Z_2=\rho(z_1)\rho(z_2).$$

1.4 标量乘法运算

回忆一下数k与矩阵A做标量乘法(或称数乘), 所得矩阵kA是将矩阵A的每个元都乘以数k.

对于任意实数k以及矩阵$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathbf{M}$, 我们有

$$kZ=k\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & -(kb) \\ kb & ka \end{pmatrix}\in\mathbf{M}.$$

于是, $\mathbf{M}$关于实数与矩阵的标量乘法运算封闭, 且容易验证:

$$\rho(kz)=k\rho(z),\ k\in\mathbf{R},\ z\in\mathbf{C}.$$

因此, 复数与矩阵的等同也保持标量乘法运算.

我们知道, 全体2阶实系数方阵集合V是实数域上的线性空间, 而上面的讨论说明: 集合$\mathbf{M}$是V的线性子空间, 因而也是实数域上的线性空间.

二、矩阵的其他运算与复数运算的关系

2.1 矩阵的转置与复数的共轭

我们来回忆一下矩阵的转置运算: 设$A=(a_{ij})$是一个$m\times n$矩阵, 那么它的转置A^{T}是一个$n\times m$矩阵, 且它的第i行第j列的元就等于A中第j行第i列的元a_{ji}. 例如:

设$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&0&7\end{pmatrix}$, 那么

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\3&7\end{pmatrix}.$$

设$Z=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\in\mathbf{M}$, 那么

$$Z^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-(-b)\\-b&a\end{pmatrix}\in\mathbf{M}.$$

于是, 集合$\mathbf{M}$关于转置运算是封闭的. 并且, 若设Z对应的复数为$z=a+b\mathrm{i}$, 那么Z^{T}对应的复数就是$a-b\mathrm{i}=\overline{z}$, 即

$$\rho(\overline{z})=Z^{\mathrm{T}}=\rho(z)^{\mathrm{T}}.$$

也就是说, 复数的共轭运算对应于矩阵的转置.

根据复数的矩阵表示以及矩阵转置运算的性质, 我们可以从矩阵的角度来得到复数共轭运算的性质. 下面就以共轭的乘法性质为例来加以说明.

例1　试用复数的矩阵表示来证明复数共轭运算的乘法性质: $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

证明: 设$\rho(z_1)=Z_1$, $\rho(z_2)=Z_2$. 那么

$$\rho(\overline{z_1z_2})=\rho(z_1z_2)^{\mathrm{T}}=(\rho(z_1)\rho(z_2))^{\mathrm{T}}$$
$$=\rho(z_2)^{\mathrm{T}}\rho(z_1)^{\mathrm{T}}=\rho(\overline{z_2})\rho(\overline{z_1})=\rho(\overline{z_2}\,\overline{z_1}),$$

再利用ρ是单射的性质, 我们就得到

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_2}\,\overline{z_1}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

注1: 上述推导式子中的第三个等号是利用了转置运算的乘法性质: $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

注2: 注意到上述推导过程中我们事实上是证明了等式$\overline{z_1z_2}=\overline{z_2}\,\overline{z_1}$, 该等式两边$z_1$与$z_2$的顺序是不同的! 当然由于复数的乘法满足交换律, 因此这一顺序的变化是无关紧要的. 但是如果我们将复数集看成哈密顿四元数集(它同样可等同于2阶方阵集的子集)的子集, 那么这一等式更加合理(因为它在哈密顿四元数集中也成立).

2.2 对称矩阵与反对称矩阵

利用矩阵的转置运算, 我们可以定义对称矩阵与反对称矩阵. 一个矩阵A如果满足$A^{\mathrm{T}}=A$, 则称矩阵A为对称矩阵; 如果矩阵A满足$A^{\mathrm{T}}=-A$, 则称矩阵A为反对称矩阵. 矩阵的这一对概念与函数中的偶函数与奇函数这对概念有许多类似之处, 甚至它们的性质也有许多相似之处. 我们知道不管是偶函数还是奇函数, 它们的定义域一定关于坐标原点对称, 而与之相对应, 一个矩阵不管是对称矩阵还是反对称矩阵, 它们一定是方矩阵. 而所谓对称矩阵就是它各位置上的元关于主对角线是对称的, 而反对称矩阵就是关于主对角线对称位置的元成互为相反数. 特别地, 反对称矩阵主对角线上的元均为0.

对于$Z\in\mathbf{M}$, 容易看出Z是对称矩阵当且仅当Z具有$\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$的形式; 而$Z$是反对称矩阵当且仅当$Z$具有$\begin{pmatrix}0&-b\\b&0\end{pmatrix}$的形式. 因此在复数的矩阵表示中, 实数与对称矩阵相对应, 而纯虚数与非零的反对称矩阵相对应.

2.3 方矩阵的分解

我们先来回顾一下函数的一个重要性质:

设$f(x)$是定义域关于原点对称的函数, 那么存在偶函数$g(x)$与奇函数$h(x)$, 使得$f(x)=g(x)+h(x)$, 且函数的这样分解是唯一的.

事实上我们用待定函数法很容易得出

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

而分解的唯一性则来自于这样的事实: 既是偶函数又是奇函数的函数只有零函数, 且两个偶(奇)函数之差仍为偶(奇)函数.

对于矩阵而言, 我们则有以下类似的结论:

设A是任意(实)方阵, 那么存在对称矩阵B与反对称矩阵C, 使得$A=B+C$, 且这样的分解是唯一的.

事实上, 我们容易发现$B=\dfrac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$, $C=\dfrac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$满足我们的要求. 而分解的唯一性则来自于这样的事实: 既是对称矩阵又是反对称矩

阵的矩阵只有零矩阵, 且两个对称(反对称)矩阵之差仍为对称(反对称)矩阵.

矩阵的这一分解反映到集合$\mathbf{M}$上就是矩阵的下列分解:

$$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

这一分解反映到复数上就是: 一个(非实数的)复数可唯一地表为一个实数与一个纯虚数的和, 这也正是复数(complex number)这一名称的来历: 一般地, 它是一个复合的(或混合的)数.

设$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是2阶单位方阵, $I=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 那么$\rho(1)=E$, $\rho(\mathrm{i})=I$. 利用矩阵的标量乘法运算, 我们可将上述分解式改写为

$$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=aE+bI.$$

因此, $\mathbf{M}$是一个实数域上的2维线性空间, E, I则是它的一组基. 而映射ρ将实数域上的2维线性空间$\mathbf{C}$的基1, i对应到基E, I. 注意到$I^2=-E$.

2.4 方阵的行列式

我们知道, 对于每个方阵A, 我们都可以定义它的行列式$\det(A)$(或$|A|$). 特别地, 设复数$z=a+b\mathrm{i}$对应的矩阵为Z, 那么

$$\det(\rho(z))=\det(Z)=\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2+b^2=|z|^2.$$

因此, $\mathbf{M}$中矩阵Z的行列式恰好与它所对应的复数z的模的平方相一致. 利用这一点我们可用行列式的性质来验证复数的模的性质. 例如, 因为

$$|z_1z_2|^2=\det(\rho(z_1z_2))=\det(\rho(z_1)\rho(z_2))=\det(\rho(z_1))\det(\rho(z_2))=|z_1|^2|z_2|^2,$$

所以$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

注3: 上述公式推导中我们利用了行列式的乘法法则, 即$\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

2.5 可逆方阵

对于一个方阵A, 如果$\det(A)\neq 0$, 那么A是可逆的, 并且它的逆矩阵$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A^*$, 这里$A^*$是$A$的伴随矩阵. 特别地, 对于$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathbf{M}$, 当$\det(Z)=a^2+b^2\neq 0$, 即$Z$不是零矩阵时, Z可逆, 且它的逆矩阵为

$$Z^{-1}=\frac{1}{\det(Z)}Z^*=\frac{1}{\det(Z)}Z^{\mathrm{T}}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in\mathbf{M}.$$

设复数$z\neq 0$对应的矩阵为Z, 那么Z是非零矩阵, 因此它有逆矩阵Z^{-1}. 而$E=\rho(1)=\rho(zz^{-1})=\rho(z)\rho(z^{-1})=Z\rho(z^{-1})$, 所以$\rho(z^{-1})$就是$Z$的逆矩阵, 即$\rho(z^{-1})=Z^{-1}$. 于是, M中矩阵的逆矩阵与该矩阵所对应的复数的逆元相对应.

三、表示矩阵与线性变换

3.1 平面上的线性变换

对于平面$\mathbf{R}^2$上的任意一个变换f, 如果满足如下两个条件:

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),\ \alpha、\beta\in\mathbf{R}^2,$$
$$f(k\alpha)=kf(\alpha),\ k\in\mathbf{R},\ \alpha\in\mathbf{R}^2,$$

那么就称f是一个线性变换. 容易验证: 如果A是任意2阶实方阵, 则

$$\alpha=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

是一个线性变换, 并且平面$\mathbf{R}^2$上的每个线性变换都具有上述形式.

3.2 由表示矩阵确定的线性变换

下面我们来考虑由复数的表示矩阵确定的线性变换有什么特点. 设$Z=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\in\mathbf{M}$, 那么

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\longmapsto Z\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

于是由Z确定的线性变换就是数乘变换. 当$a>0$时, 该变换就是缩放因子为a的缩放变换.

再假设$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathbf{M}$, 且$\det(Z)=1$, 即$a^2+b^2=1$, 那么存在$\theta\in[0,2\pi)$, 使得$Z=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 我们知道由这样的矩阵$Z$确定的线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

就是绕坐标原点逆时针旋转θ角的旋转变换.

对于一般的非零矩阵$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathbf{M}$, 设$r=\sqrt{\det(Z)}=\sqrt{a^2+b^2}>0$, 那么我们有

$$Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \frac{a}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix}=Z_1Z_2,$$

(下转第6–2页)

(上接第6–40页)

其中 $Z_1=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, $Z_2=\begin{pmatrix} \frac{a}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix}$, 且 $\det(Z_2)=1$. 所以一般地, 由非零表示矩阵 Z 所确定的线性变换是旋转变换与缩放变换的复合.

概括上述讨论, 我们说, 用上述特殊的2阶实方阵来表示复数, 其运算与复数的运算相当匹配, 且这种表示还可以与图形的线性变换相联系, 更使其赋予了丰富的几何含义.