用小圆覆盖大圆

200062 华东师范大学数学系 林 磊

一、问题的提出与解决

大家知道移动通信技术是近年来发展迅猛的一项通信技术. 可是我们在使用像手机这样的移动通信工具时是否想过手机发出的信号是要通过基站接力中转的? 因此如果移动通信公司要在某区域拓展它的业务, 就必须建设基站. 因此通信公司就需要考虑在这给定的区域内安排多少个基站? 如何分布这些基站? 理论上我们需要考虑的是怎样才是最经济的布局(即基站建得最少)? 实际上我们在基站的布局中还有诸多的制约因素(例如, 有些地方是不适合建基站的). 由于基站发射和接收信号的有效范围是以基站为中心的圆, 因此这一问题用数学的语言来说就是用尽可能少的大小相同的圆来覆盖一个给定的区域. 但是当这个给定区域相当任意时该问题的讨论是很困难的. 假设所给的区域是一个圆, 则此问题就等价于用尽可能少的大小相同的小圆覆盖大圆的问题.

覆盖问题是几何学研究中的重要课题之一. 本文要考虑的是如下的一类覆盖问题:

设Ω是一给定的大圆, n是正整数. 取n个半径为r的小圆$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$, 使它们能覆盖大圆$\Omega$, 即$\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Omega_i \supseteq \Omega$.

试确定半径r的最小值(即最小覆盖的半径).

在具体讨论中, 我们不妨设大圆Ω的半径等于1. 记n个小圆的最小覆盖中小圆的半径为$r_{2,n}$. 我们希望确定$r_{2,n}$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 由于n个半径为1的圆显然能覆盖半径为1的大圆Ω, 因此, 对每个n, 有$r_{2,n} \leqslant 1$. 当然也有$r_{2,1}=1$.

情况I. 当$n=2$时, 设有两个半径为r的小圆Ω_1、Ω_2覆盖了大圆Ω, 则它们必定覆盖了大圆的边界——圆周. 由于一个圆与另一个圆的圆周相交时, 交集一定是一段连续的弧. 因此Ω_1与Ω_2中必有一个, 不妨设Ω_1, 与大圆的圆周的交集是一段弧长至少是π的连续弧. 于是存在两点P、$Q \in \Omega_1 \cap \Omega$, 使得$PQ$为$\Omega$的直径. 从而$2r \geqslant 2$, 或$r \geqslant 1$. 注意到这一结论对任何二圆覆盖都成立, 于是最小覆盖的半径$r_{2,2} \geqslant 1$. 而已知$r_{2,2} \leqslant 1$, 因此$r_{2,2}=1$.

可以看出, 上述讨论本质上使用的是抽屉原理.

情况II. 当$n=3$时, 大圆的周长等于2π, 故三分之一的圆周长等于$\dfrac{2\pi}{3}$. 与情况I的讨论类似, 若有半径为r的3个圆Ω_1、Ω_2、Ω_3, 它们覆盖了大圆Ω, 则至少有一小圆, 设为Ω_1, 它要覆盖大圆的三分之一圆周. 因此存在两点P、$Q \in \Omega_1 \cap \Omega$, 使得$|PQ|=\sqrt{3}$. 于是$2r \geqslant \sqrt{3}$, 从而$r \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以$r_{2,3} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

下面我们来构造一个小圆半径等于$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的3圆覆盖. 将大圆Ω的圆周三等分, 记分点为P、Q、R. 设PQ、QR、RP的中点分别为O_1、O_2、O_3. 以每个O_i为中心, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$为半径作圆Ω_1、Ω_2、Ω_3. 则容易验证Ω_1、Ω_2、Ω_3是大圆Ω的覆盖(见图1). 于是我们得出结论$r_{2,3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

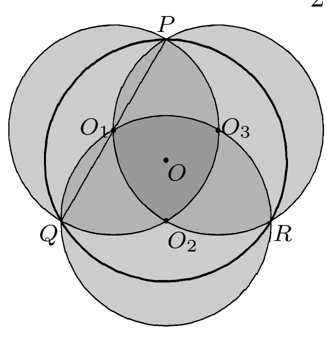

图 1

情况III. 当$n=4$时, 设有半径为r的4个圆Ω_1、Ω_2、Ω_3、Ω_4, 它们覆盖了大圆Ω, 则与上述讨论类似, 至少有一个小圆要覆盖大圆圆周的四分之一. 于是$2r \geqslant \sqrt{2}$, 即$r \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 因此, $r_{2,4} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

同样, 我们可以构造出一个小圆半径等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的4圆覆盖: 将大圆 Ω 的圆周四等分, 记分点为 P、Q、R、S. 设 PQ、QR、RS、SP 的中点分别为 O_1、O_2、O_3、O_4. 以每个 O_i 为中心, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径作圆 Ω_1、Ω_2、Ω_3、Ω_4. 则可知每个小圆 Ω_i 都经过大圆圆心 O, 于是 $\{\Omega_i\}$ 就是大圆 Ω 的覆盖. 所以得出结论 $r_{2,4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (见图2).

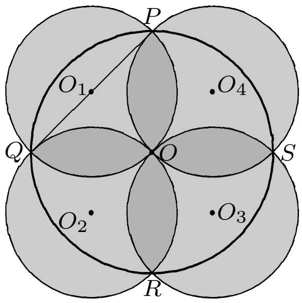

图 2

很遗憾, 上述讨论的方法不能推广到 $n \geqslant 5$ 的情形, 原因是当 $n \geqslant 5$ 时, 按照大圆圆周 n 等分点构造出的小圆均不覆盖大圆的圆心 O, 因此这些小圆不能构成大圆的覆盖. 不过我们可以得出下列结论: $\sin\dfrac{\pi}{n} < r_{2,n} < 1$, $(n \geqslant 5)$. 但是一般的讨论非常困难.

二、问题的应用

本文一开始所提到的移动通信公司需要考虑在给定的区域内安排多少个基站问题. 假设所给的区域是一个圆, 则此问题就等价于我们上面讨论的用尽可能少的大小相同的小圆覆盖大圆的问题. 不妨设基站的有效工作半径等于1. 大圆的半径等于 R. 记此时所需建设基站的最少个数是 $f(R)$ (它是 R 的函数). 则根据上述讨论, 我们有:

当 $R \leqslant 1$ 时, $f(R)=1$.

当 $1<R\leqslant\dfrac{1}{r_{2,3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\approx1.155$ 时, $f(R)=3$.

当 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<R\leqslant\dfrac{1}{r_{2,4}}=\sqrt{2}\approx1.414$ 时, $f(R)=4$.

因此,

$$f(R)=\begin{cases}1, & 0<R\leqslant 1,\\ 3, & 1<R\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\\ 4, & \dfrac{2\sqrt{3}}{3}<R\leqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

但是当 $R>\sqrt{2}$ 时, $f(R)$ 的取值情况我们还不清楚.

三、问题的推广

由于用抽屉原理我们走不了多远, 所以下面我们换一种思路来讨论小圆覆盖大圆问题中的情况I(即 $n=2$ 时). 假设有两个半径为 r 的小圆 Ω_1、Ω_2 覆盖了大圆 Ω. 设 O_1、O_2 分别是 Ω_1、Ω_2 的圆心, 它们在直角坐标系 Oxy 下的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2). 则过 O_1、O_2 可以作一直线 L. 直线 L 的存在性也可以这样来证明: 我们需要去确定一条直线的方程, 使得 O_1、O_2 满足该方程. 假设直线 L 的方程为

$$L:\ Ax+By+C=0.$$

我们希望用待定系数法来确定参数 A、B、C 的值. 将 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 代入上式, 得

$$\begin{cases}Ax_1+By_1+C=0,\\ Ax_2+By_2+C=0,\end{cases}$$

这是一个含有3个未知量 $(A,\ B,\ C)$, 2个方程的齐次线性方程组. 由线性方程组理论知上述方程组有非零解. 若 $A=B=0$, 则由方程组的第一式得 $C=0$, 从而 $(A,B,C)=(0,0,0)$, 这与非零解的假设矛盾. 于是 A、B 不全为零, 故 $Ax+By+C=0$ 是一满足要求的直线方程, 且可知, 当 $O_1\neq O_2$ 时, 这样的方程所确定的直线是唯一的. 另作两直线 L_1、L_2, 使得 $L_1/\!/L/\!/L_2$, 且 L_i 到 L 的距离都等于 r. 事实上, 如果设直线 L 的方程中 $A^2+B^2=1$, 那么这两直线 L_1、L_2 的方程为

$$Ax+By+C\pm r=0.$$

直线 L_1、L_2 实际上是圆 O_1、O_2 的平行于 L 的公切线. 因此圆 O_1、O_2 就夹在这两条公切线之间, 但是大圆 Ω 被圆 O_1、O_2 所覆盖, 所以 Ω 也夹在两平行直线 L_1 与 L_2 之间. 但大圆 Ω 有各个方向的直径, 因此也有垂直于 L 方向的直径, 而这条直径夹在 L_1 与 L_2 之间, 于是 L_1 与 L_2 之间的距离大于等于2(即大圆的直径长), 但 L_1 与 L_2 之间的距离就是小圆的直径长 $2r$. 因此, $2r\geqslant 2$, 即 $r\geqslant 1$. 这就是说, $r_{2,2}=1$.

可能有人会说, 这一证明比起前面的证明要复杂多了, 我们为什么要这样来证明? 因为我们希望将证明的结果加以推广. 为此, 我们需要将小圆覆盖大圆这一问题本身进行推广.

(下转第1–13页)

(上接第1–44页)

首先, 小圆覆盖大圆的问题可以推广到3维空间上. 当然此时的确切说法是小球覆盖大球问题: 在3维空间中有一个半径等于1的大球Ω, n是正整数. 取n个半径为r的小球$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$, 使它们能覆盖大球, 即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Omega_i \supseteq \Omega$. 试确定半径$r$的最小值$r_{3,n}$.

用上述证明$r_{2,2}=1$同样的方法我们可得: $r_{3,3}=1$(因此, $r_{3,1}=r_{3,2}=1$), 具体证明如下:

假设有3个半径为r的小球Ω_1、Ω_2、Ω_3覆盖了大球Ω. 设O_1、O_2、O_3分别是Ω_1、Ω_2、Ω_3的球心, 它们在直角坐标系$Oxyz$下的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)、(x_3,y_3,z_3). 则过O_1、O_2、O_3可以作一平面Π, 它的方程$Ax+By+Cz+D=0$, 由

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0, \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0, \\ Ax_3+By_3+Cz_3+D=0 \end{cases}$$

确定(这一结论同样可由线性方程组理论获得, 但Π可能不唯一, 可我们只要其存在性的结论). 这样我们就可构造另两平面Π_1、Π_2, 使得$\Pi_1 /\!/ \Pi /\!/ \Pi_2$, 且$\Pi_i$到$\Pi$的距离都等于$r$. Π_1、Π_2实际上就是这3个小球的平行公切平面.

因此这3小球就夹在两切平面之间, 而被它们覆盖的大球自然也夹在这两平面间, 从而大球的垂直于这两平面的直径也夹在这两平面之间, 于是$2r \geqslant 2$, 即$r \geqslant 1$, 于是$r_{3,3} \geqslant 1$, 因此, $r_{3,3}=1$.

上述问题甚至可以推广到任意m维欧几里得空间上: 在m维欧几里得空间V中有一个半径等于1的超球(例如: 在直角坐标系下, 中心在原点的这样一个超球Ω可刻画为: $\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2 \leqslant 1\}$), n是大于1的正整数. 取n个半径为r的小超球, 使它们覆盖大超球. 试确定半径r的最小值$r_{m,n}$.

事实上, 利用线性方程组的理论, 我们用类似的方法同样可以证明: 对任何$m \geqslant 4$, 有$r_{m,m}=1$. 从而有 $r_{m,n}=1$, 对任意$n \leqslant m$成立.