超立方体与高维的欧拉公式

200062 华东师范大学数学系 林 磊

我们知道, 对于满足一定条件的多面体Ω的棱数、面数和顶点数之间有如下的关系:

$$V+F=E+2 \tag{1}$$

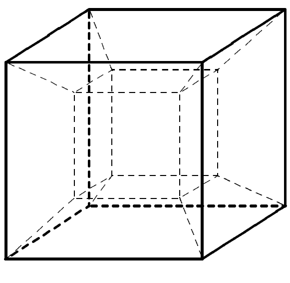
其中V、F、E分别表示多面体Ω的顶点数、面数和棱数. 这就是著名的欧拉公式. 它是欧拉在1752年得到的结果. 这里所要满足的“一定条件”是指多面体Ω要是一个“连通的”和“无洞的”多面体. 例如: 立方体Ω_3就满足这两个条件. 在立方体中

$$V=8,\ F=6,\ E=12.$$

故它满足欧拉公式. 欧拉公式在数学上占有非常重要的地位, 它是“拓扑学第一个重要结果”(见[4, P.589]). 利用欧拉公式, 我们很容易得出正多面体的分类定理(见[3]).

在文[1]中, 作者计算了4维(欧氏)空间中的超立方体的顶点数、棱数、面数和3维边界数. 所用的方法是类比法. 想象将两个单位边长的正方形重叠, 并将其中的一个正方形沿与它们垂直的第三个方向拉出一个单位长, 即可得一单位棱长的立方体.

用同样的方法, 在4维(欧氏)空间中将两个重叠的单位棱长立方体之一沿与其垂直的第四个方向拉出一个单位长可得4维的超立方体:



(上图只是一个想象中的4维超立方体图形). 用此方法容易求出4维超立方体Ω_4的顶点数、棱数、面数和3维边界数分别为16、32、24、8.

上述求边界个数方法虽然巧妙, 但是要想作进一步的推广难度较大. 由于高维的几何图形已经超出了我们直观想象的范围, 因此我们希望将求高维超立方体的边界数这一几何问题转化为一个容易处理的问题, 例如: 转化为一个代数问题. 而解析几何恰好为我们提供了几何问题代数化的一个有力工具. 因此我们不妨借助解析几何的方法来考虑这一问题. 大家知道, 在一个平面直角坐标系中, 如果将点的坐标与点等同, 则如下的点集

$$\Omega_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$$

表示的是平面上一个单位边长的正方形(包含其内部). 它有4个顶点:

$$P_1(0,0),\ P_2(0,1),\ P_3(1,0),\ P_4(1,1)$$

和4条边:

$$L_1=\{(0,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$L_2=\{(1,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$L_3=\{(x,0)\mid 0\leqslant x\leqslant 1\},$$
$$L_4=\{(x,1)\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

用类似的方法可知:

$$\Omega_3=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$$

表示的是3维空间中的一个单位棱长立方体. 那么Ω_3中的面的坐标有什么特征呢? 我们知道面是体的边界, 它是一个2维对象, 因此它的坐标应有2个自由度. 例如:

$$M=\{(0,y,z)\mid 0\leqslant y,z\leqslant 1\}$$

就是Ω_3的一个面. 一般地, 在3个坐标中选定2个坐标作为自由参数, 而让另一个坐标取值为0或1, 则这些坐标对应的点集就是Ω_3的一个面, 且其所有的面均可如此得到. 于是, Ω_3

的面数

$$F = C_3^2 \cdot 2^1 = 6.$$

同样, Ω_3 中的棱是面的边界, 它是1维的对象, 因此它的坐标只有1个自由度. 例如: $L = \{(0,1,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ 就是Ω_3的一条棱. 一般地, 在3个坐标中选取1个坐标作为自由参数, 另2个坐标令其取值为0或1, 则这些坐标对应的点集就是Ω_3的一条棱, 且其所有棱也都可如此获得. 于是, Ω_3的棱数

$$E = C_3^1 \cdot 2^2 = 12.$$

而顶点是0维的对象, 它的坐标是确定的. 点$P(x,y,z)$是Ω_3的顶点的充分必要条件是其坐标满足: x、y、$z = 0$或1. 从而Ω_3的顶点数为

$$V = C_3^0 \cdot 2^3 = 8.$$

与Ω_2, Ω_3类似, 我们可以看到, 在n维(欧氏)空间中,

$$\Omega_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid 0 \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant 1\}$$

表示的就是一个n维的超立方体. 如果我们用d_k表示Ω_n中所有k维边界的个数, 那么如何来求d_k呢? 根据上述关于2维和3维的讨论可以看出, 一个k维边界M的坐标应该具有k个自由参数, 而其余的$n-k$个坐标应当取定值0或1. 这样就可求得

$$d_k = C_n^k \cdot 2^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{2}$$

n维空间中的这样一个超立方体也是一个"连通的"和"无洞的"超多面体. 那么它的不同维数的边界数之间应当满足什么关系式呢? 即, 欧拉公式该作如何的推广呢? 在考虑推广之前, 有必要对欧拉公式(1)进行一下变形:

$$V - E + F = 2 \tag{3}$$

如果用讨论Ω_n中所用的记号, 则公式(3)又可改写为

$$d_0 - d_1 + d_2 = 2 \tag{4}$$

这样, 我们可猜想当边界数从0维, 1维, 2维, $\cdots$ 顺序排列时, 它前面所带的符号是正负交替出现的. 我们也许会猜测是否有:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k d_k = d_0 - d_1 + \cdots + (-1)^{n-1} d_{n-1} = 2 \tag{5}$$

但是, 且慢! 对Ω_4加以验证可知, 当$n = 4$时, 有 $d_0 - d_1 + d_2 - d_3 = 16 - 32 + 24 - 8 = 0 \neq 2$. 因此(5)式是不对的. 让我们对$n$维超立方体来计算一下(5)式的左边. 利用公式(2), 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k d_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k \cdot 2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \cdot 2^{n-k} - (-1)^n \\ &= (-1+2)^n - (-1)^n \\ &= 1 - (-1)^n.\end{aligned}$$

因此我们得到公式

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k d_k = 1 - (-1)^n \tag{6}$$

这就是欧拉公式在高维中的推广. 它对于一般高维的"连通的"和"无洞的"超多面体都成立. 其严格证明需要用到高等数学中同调代数的知识(见[2]). 公式(6)被称为欧拉–庞加莱公式.

可以看到, 当n是奇数时,

$$d_0 - d_1 + \cdots + (-1)^{n-1} d_{n-1} = 2.$$

而当n是偶数时,

$$d_0 - d_1 + \cdots + (-1)^{n-1} d_{n-1} = 0.$$

此外, 公式(6)不但对高维是正确的, 而且对低维也同样是正确的. 例如, 当$n = 2$时, 有

$$d_0 - d_1 = 0.$$

它说明一个n边形有n个顶点.

当$n = 1$时, 有

$$d_0 = 2.$$

它说明一个线段有2个端点.

参考文献

[1] 程龙海、唐清成、钱益民. 关于四维正方体的顶点数、棱数、面数、三维正方体数. 数学教学. 1998年第2期, 36–37.

[2] 陈志杰编著. 代数基础 —模、范畴、同调代数与层. 华东师范大学出版社. 2001.

[3] 林磊. 数学问题解决中计算器的使用. 数学教学. 1999年第5期, 封二–1.

[4] 日本数学会编, 数学百科辞典. 北京: 科学出版社. 1984.