探索具有两种棱长的四面体的种类

200062 华东师范大学数学系 林 磊

在1999年的上海数学高考试题中, 有这样一道填空题:

"若四面体各棱长是1或2, 且该四面体不是正四面体, 则其体积是______(只需写出一个可能的值)"

从这道题, 我们提出一个令人感兴趣的问题: 对于任意给定的两正实数a和b, 以a和b为棱长的四面体共有多少种? 它们的体积公式是什么? 本文的目的就是要解决这两个问题.

一、棱长为a和b的四面体的体积公式

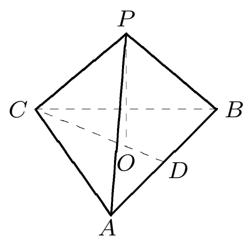

图 1

(0) 棱长为a的正四面体的体积$V_0(a)$.

容易计算 $V_0(a)=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

下面我们假设$P-ABC$是具有棱长a和b的四面体, 并在(1)-(4)中设O为P在底面ABC上的投影, D为AB的中点, 在各种情况中由对称性可知, O在CD(或其延长线)上, 则该四面体的体积为

$$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times|PO|.$$

(1) 恰有一条棱的长为a的四面体F_1, 它的体积$V_1(a,b)$. 不妨设$|PC|=a$, 则由上面的讨论可知,

$$V_1(a,b)=\frac{\sqrt{3}}{12}b^2\cdot|PO|.$$

考虑$\triangle PCD$的面积:

$$S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}|CD|\cdot|PO|$$
$$=\frac{1}{2}|PC|\cdot\sqrt{|CD|^2-\left(\frac{1}{2}|PC|\right)^2},$$

所以

$$|PO|=\frac{|PC|}{|CD|}\sqrt{|CD|^2-\left(\frac{1}{2}|PC|\right)^2}$$
$$=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{a}{\sqrt{3}b}\sqrt{3b^2-a^2}.$$

从而得: $V_1(a,b)=\dfrac{ab}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$.

(2) 恰有两条棱的长为a, 且该两棱不共点的四面体F_2, 它的体积$V_2(a,b)$.

不妨设$|PC|=|AB|=a$, 则$V_2(a,b)=\dfrac{a}{12}\sqrt{4b^2-a^2}\cdot|PO|$, 由于在等腰$\triangle PCD$中, $|PC|=a, |PD|=|CD|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$, 所以

$$|PO|=\frac{|PC|}{|CD|}\sqrt{|PD|^2-\left(\frac{1}{2}|PC|\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}a\sqrt{2b^2-a^2}}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

于是, $V_2(a,b)=\dfrac{\sqrt{2}a^2}{12}\sqrt{2b^2-a^2}$.

(3) 恰有两条棱的长为a, 且它们共点的四面体F_4, 它的体积$V_3(a,b)$.

不妨设$|PA|=|PB|=a$. 则$V_3(a,b)=\dfrac{\sqrt{3}}{12}b^2\cdot|PO|$.

考虑$\triangle PCD$, 可知: $|PC|=b, |CD|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$, 而$|PD|=\sqrt{|PA|^2-\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2}=$

$\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$, 所以, 由余弦定理,

$$\cos C=\frac{|PC|^2+|CD|^2-|PD|^2}{2|PC|\cdot|CD|}=\frac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}b^2},$$

于是, $|PO|=|PC|\sin C=b\cdot\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{1}{\sqrt{3}b}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$. 所以,

$$V_3(a,b)=\frac{b}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}.$$

(4) 恰有三条棱长a. 且它们共面的四面体F_3, 它的体积$V_4(a,b)$.

不妨设$|AB|=|BC|=|CA|=a$, 则$V_4(a,b)=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\cdot|PO|$.

由于O恰为$\triangle ABC$的中心, 故$|PO|^2=|PC|^2-|CO|^2=b^2-\frac{1}{3}a^2$, 即 $|PO|=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2-a^2}$. 所以,

$$V_4(a,b)=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}.$$

(5) 恰有三条棱长为a, 且它们既不共面, 也不共点的四面体F_8, 它的体积$V_5(a,b)$.

不妨设$|PC|=|PA|=|AB|=a$. 以AB的中点为原点O, $\overrightarrow{BA}$为y轴正向, $\overrightarrow{OC}$为x轴正向建立空间直角坐标系$Oxyz$, 且设P的z坐标为正. 则我们有$A\left(0,\frac{a}{2},0\right)$, $B\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2},0,0\right)$. 设点$P$的坐标为$(p_1,p_2,h)$, 则$h>0$, 且

$$\begin{aligned}V_5(a,b)&=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}|OA|\cdot|OC|\cdot h\\&=\frac{1}{3}\times\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}\times h\\&=\frac{a}{12}\sqrt{4b^2-a^2}\cdot h.\end{aligned}$$

由$|PA|=a$, 我们得:

$$a^2=p_1^2+\left(p_2-\frac{a}{2}\right)^2+h^2 \qquad ①$$

由$|PB|=b$, 得

$$b^2=p_1^2+\left(p_2+\frac{a}{2}\right)^2+h^2 \qquad ②$$

由$|PC|=a$, 得

$$a^2=\left(p_1-\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}\right)^2+p_2^2+h^2 \qquad ③$$

由 ① 和 ② 解得

$$p_2=\frac{b^2-a^2}{2a} \qquad ④$$

由 ① 和 ③ 得: $0=p_1^2+\left(p_2-\frac{a}{2}\right)^2-\left(p_1-\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}\right)^2-p_2^2$,

即 $p_1=\frac{ap_2+b^2-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. 将④式代入, 得

$$p_1=\frac{3b^2-2a^2}{2\sqrt{4b^2-a^2}} \qquad ⑤$$

将④, ⑤ 代入②式, 整理后得:

$$h^2=\frac{(a^2+b^2)(3a^2b^2-a^4-b^4)}{a^2(4b^2-a^2)},$$

从而

$$h=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2b^2-a^4-b^4)}}{a\cdot\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

因此, 我们得

$$V_5(a,b)=\frac{1}{12}\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2b^2-a^4-b^4)}.$$

注: 容易看出: $V_i=(a,a)=V_0(a)$, $i=1,2,3,4,5$, 且$V_5(a,b)=V_5(b,a)$.

二、两种不同的棱长可以构成的四面体的种类

这个问题与给出的该两个棱长的比有关. 在以下的讨论中, 我们假设这两种棱长为a和b, 且$a<b$, 并令$\frac{a}{b}=r$, 则$0<r<1$.

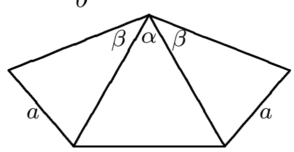

图 2

(1) 恰有一条棱的长为a. 此时, 四面体的体积为$V_1(a,b)$.

(2) 恰有两条棱的长为a, 且该两棱不共点, 此时, 四面体的体积为$V_2(a,b)$.

(3) 恰有两条棱的长为a, 且该两棱共点, 此情形能够构成四面体F_4的充要条件是$r>\sqrt{2-\sqrt{3}}\approx 0.518$. 在条件满足时, 四面体$F_4$的体积为$V_3(a,b)$.

下面我们来证明这一充要条件.

必要性: 若该情形能构成四面体, 则由一(4)得其体积为

$$V_3(a,b)=\frac{b}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}.$$

从而$4a^2b^2-a^4-b^4>0$, 即$4\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)^4-1>0$. 由$\frac{a}{b}=r$得$r^4-4r^2+1<0$, 于是$(2-r^2)^2<3$, 故$2-r^2<\sqrt{3}$, 即$r>\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (注意到$0<r<1$).

充分性: 设$r>\sqrt{2-\sqrt{3}}$, 我们要证此时存在满足要求的四面体.

注意到$r>\frac{1}{2}$, 故以a,a,b为边长的三角形可构造. 所以我们只要证: $2\alpha<\alpha+2\beta<360^\circ$ (如图2所示). 但$\alpha=60^\circ,\beta<60^\circ$ (因为$a<b$), 故$\alpha+2\beta<180^\circ<360^\circ$. 所以只需证$\beta>30^\circ$. 这等价于证明$\cos\beta<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由于$\cos\beta=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}=1-\frac{1}{2}r^2<1-\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即$\cos\beta<\frac{\sqrt{3}}{2}$成立, 所以充分性得证.

在以下各情形出现的充要条件中由于必要性均可直接从体积公式的定义域得出, 所以我们只证明充分性.

(4) 恰有三条棱的长为a, 且它们共面的四面体F_3, 已证F_3的体积为$V_4(a,b)$.

(5) 恰有三条棱的长为a, 且它们既不共面也不共点, 此情形能构成四面体F_8的充要条件是 $r>\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$. 在条件满足时, 四面体的体积为$V_5(a,b)$.

[证] 充分性: 由于$r>\frac{1}{2}$, 故以a,a,b为边长的三角形可构造. 如图3, 我们只需证明: $2\gamma<\alpha+\beta+\gamma<360^\circ$.

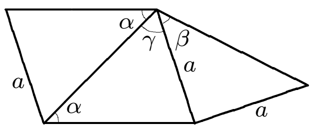

图 3

而$\alpha<60^\circ,\beta<60^\circ,\gamma<90^\circ$故$\alpha+\beta+\gamma<360^\circ$显然成立, 成以只需证明$\alpha+\beta>\gamma$或等价地, $\cos(\alpha+\beta)<\cos\gamma$.

由于$\cos\alpha=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}$, $\cos\beta=\frac{b}{2a}$, $\cos\gamma=\frac{a}{2b}$, 故

$$\sin\alpha=\frac{a}{2b^2}\sqrt{4b^2-a^2},\sin\beta=\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}.$$

所以$\cos(\alpha+\beta)<\cos\gamma$当且仅当$\frac{2b^2-a^2}{2b^2}\cdot\frac{b}{2a}-\frac{a}{2b^2}\sqrt{4b^2-a^2}\cdot\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}<\frac{a}{2b}$. 化简得: $2-3r^2<r\sqrt{(4-r^2)(4r^2-1)}$.

注意到此不等式当$2-3r^2<0$即$r>\sqrt{\frac{2}{3}}(\approx 0.816)$时恒成立. 而当$\frac{1}{2}<r\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}$时该不等式成立当且仅当$r^6-2r^4-2r^2+1<0$成立. 即

$$(r^2+1)\left(r^2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(r^2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)<0$$

成立. 又$r^2+1>0$, $r^2<1<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 故$r^2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}<0$, 而由$r>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$得$r^2>\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 即$r^2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}>0$, 所以上述不等式成立, 从而$\alpha+\beta>r$成立, 充分性得证.

(6) 恰有三条棱的长为a, 且它们共点. 此情形能构成四面体F_6的充要条件是

$$r>\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577.$$

在条件满足时, 四面体的体积为$V_4(b,a)$.

[证] 充分性. 设O是边长为b的等边三角形$\triangle ABC$的中心. 显然要使$P-ABC$成为四面体, 且$|PA|=|PB|=|PC|=a$, 只需满足$|PA|>|OA|$, 即$a>\frac{\sqrt{3}}{3}b$, 或等价地, $r>\frac{\sqrt{3}}{3}$而这正是条件的假设.

(7) 恰有两条棱的长为b, 且它们不共点, 此情形能构成四面体F_9的充要条件是

$$r>\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707.$$

在条件满足时, 四面体的体积为 $V_2(b,a)$.

[证] 充分性. 由于 $r>\dfrac{\sqrt{2}}{2}>\dfrac{1}{2}$, 故 a、a、b 为边长的三角形可构造.

如图4所示. 由于 $\alpha+2\beta=180^\circ$, 故只要证 $2\beta>\alpha$, 或等价地, $\beta>45^\circ$ 即可. 而 $\cos\beta=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2r}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\beta>45^\circ$ 成立.

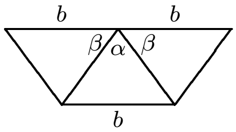

图 4

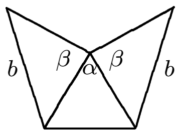

图 5

(8) 恰有两条棱长为 b, 且它们共点, 此情形能构成四面体 F_5 的充要条件是 $r>\sqrt{2-\sqrt{3}}\approx 0.518$. 当条件满足时, 四面体的体积为 $V_3(b,a)$.

[证] 充分性. 因为 $r>\sqrt{2-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{2}$. 故 a,a,b 为边长的三角形可构造. 显然 $2\beta>\alpha$, 故只需证 $2\beta+\alpha<360^\circ$ (如图5所示) 或 $\beta<150^\circ$. 由于

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\frac{2a^2-b^2}{2a^2}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\\&>1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2\\&=1-\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 150^\circ.\end{aligned}$$

所以 $\cos\beta>\cos 150^\circ$, 即 $\beta<150^\circ$.

(9) 恰有一条棱长为 b, 此情形能构成四面体 F_7 的充要条件是 $r>\dfrac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577$. 当满足条件时, 四面体的体积为 $V_1(b,a)$.

[证] 充分性. 因为 $r>\dfrac{\sqrt{3}}{3}>\dfrac{1}{2}$, 故以 a,a,b 为边长的三角形可构造. 如图6, 由于 $2\beta+\alpha<360^\circ$ 显然成立, 故只要证 $2\beta>\alpha$, 即 $\dfrac{\alpha}{2}<60^\circ$ 即可. 由于 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2r}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\dfrac{\alpha}{2}<60^\circ$ 成立.

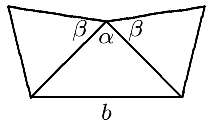

图 6

我们将 r 的不同取值所对应的不同四面体的种类数列表如下:

$r=\frac{a}{b}$	$\left(0,\sqrt{2-\sqrt{3}}\right]$	$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$
四面体种类	F_1,F_2,F_3	F_1,F_2,F_3,F_4,F_5	$F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6,F_7$
四面体个数	3	5	7

$r=\frac{a}{b}$	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$
四面体种类	$F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6,F_7,F_8$	$F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6,F_7,F_8,F_9$
四面体个数	8	9

例如. 当取 $a=3,b=4$ 时, 因 $r=\dfrac{3}{4}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故有9种不同类型的以 a,b 为棱长的四面体 F_i, 它们的体积经计算如下表.

四面体	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
体积	$\sqrt{39}$	$\frac{3}{4}\sqrt{46}$	$\frac{3}{4}\sqrt{39}$	$\frac{1}{3}\sqrt{239}$	$\frac{1}{4}\sqrt{239}$

四面体	F_6	F_7	F_8	F_9
体积	$\frac{4}{3}\sqrt{11}$	$\sqrt{11}$	$\frac{5}{12}\sqrt{95}$	$\frac{8}{3}$