数学问题解决中计算器的使用

200062 华东师大数学教育技术中心 林 磊

本文通过利用图象型计算器解决几个数学问题的形式来阐述作者在中学中借助于图象型计算器这一类现代教育技术来开展素质教育的一些观点，希望能够得到各位同行专家的指教.

问题一 设 n 是一个自然数，$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{1}{16}$，则 $n=$ ______.
(1998 年普通高等学校招生统一考试上海数学试题第 9 题)

本题原意是考察学生对二项式公式的掌握情况. 我们现在用 TI-92 型计算器中的 expand (展开) 功能来做这道题: 在键盘中键入:

```
expand((1+x/n)^n,x)
```

执行后屏幕显示:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

这是因为我们还没有对 n 赋值. 根据题目，显然 $n\geqslant 3$，所以我们先对 n 赋值 3，即键入

```
expand((1+x/n)^n,x)|n=3
```

执行后，屏幕就会显示

$$\frac{x^3}{27}+\frac{x^2}{3}+x+1.$$

所以，x^3 的系数为 $\dfrac{1}{27}$，不符合题意. 我们将输入行中的 3 改为 4，再执行. 屏幕将显示

$$\frac{x^4}{256}+\frac{x^3}{16}+\frac{3\cdot x^2}{8}+x+1.$$

由于此时 x^3 的系数恰为 $\dfrac{1}{16}$，所以，$n=4$ (图1).

本题的解法是非传统的解法，即所谓尝试法，或实验法. 可以说这是数学实验的启蒙. 我们的老师较习惯于教学生按照公式和定理以非常严格的逻辑推理来解题，但是对于这种实验性的解决问题的方法讲得非常少，并且常常反对学生这样做. 而数学实验恰恰是数学创造中的非常重要的一环. 当然，数学实验有时可以帮助你发现一个结论，甚至一个定理，但是对该结论的证明有时还需要严格的逻辑过程. 因此，对数学理论知识的学习同样是很重要的.

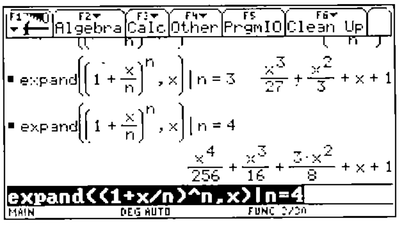

图1

问题二 确定所有可能的正多面体.

关于正多面体的内容早已从中学教科书中删除，但是这不妨成为选修课或者课外兴趣小组的学习内容. 我们可以利用计算器让学生自己将结果推导出来.

首先，我们有关于多面体的欧拉公式. 设 v, e, f 分别表示一凸多面体的顶点数、棱数以及面数，则我们有:

$$v-e+f=2. \tag{1}$$

设 Ω 为一正多面体，它的面均由正 n 边形组成，而每个顶点都由 s 个面围绕，由于多面角各面角的和小于360°，所以 $3\leqslant s\leqslant 5$，$3\leqslant n\leqslant 5$. 我们有如下关系式

$$v=\frac{nf}{s},\quad e=\frac{nf}{2}.$$

所以，在计算器上输入

```
n*f/s→ v:  n*f/2 → e
```

执行后，再在计算器中由方程 (1) 解出 f，即执行下列命令:

```
solve(v-e+f=2,f)
```

(其中指令 solve 是对括号中的方程求解) 得结

果

$$f=\frac{-4\cdot s}{(n-2)\cdot s-2\cdot n}.$$

将结果复制到输入行, 并给出 n 和 s 的具体值, 就可以算出面数 f. 例如: 加入条件 $n=3$ 及 $s=3$, 即输入

```
f=-4*s/((n-2)*s-2*n)|n=3 and s=3
```

执行后得: $f=4$. 将条件 $s=3$ 改为 $s=4$ 或 $s=5$, 就分别解出 $f=8$ 和 $f=20$. 将条件改为 $s=3$ 且 $n=4$ 或 $n=5$, 则分别解出 $f=6$ 和 $f=12$. 于是可得正多面体有5种可能性, 而这五种正多面体确实都是存在的. 于是得结论: 正多面体共有五种, 它们分别是: 正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体.

通过这一例子, 我们想说明: 对于一些已有的结果或定理, 在条件许可的情况下, 可以引导学生自己来得到它, 这样比老师直接给出结论可能效果更好, 而计算器的介入可以帮助我们进行一些机械的、重复的工作.

问题三 在一条公路附近有三个村庄, 设为 A、B 和 C, 现要在公路上设置一个汽车站, 设为 P, 使距离之和 $|PA|+|PB|+|PC|$ 为最小. 问点 P 该设在哪里?

假设公路为直线l, 问题化为要在l上确定一点P, 使距离之和 $|PA|+|PB|+|PC|$ 为最小. 我们可以使用TI-92型计算器的几何作图功能来解决这类问题. 打开 APPS 菜单, 选中 Geometry (几何作图), 首先定出三点: A、B 和C以及直线l, 在直线上任意定一点P, 测出三点到点P的距离, 然后利用计算功能计算三距离之和R(如图2). 最后, 利用动画功能, 使点P在直线l上来回移动, 则原先测量的三距离以及R将随之变化, 从我们所画的图中可以看到R的最小值为4.77. 当R的值变到最小值时, P所处的位置即为所求点(如图3).

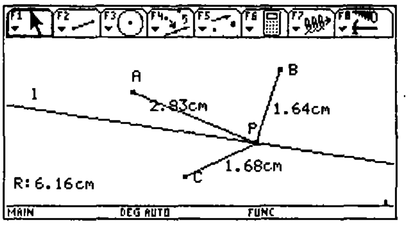

图2

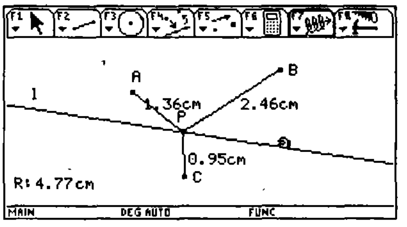

图3

这一道题事实上是一道有非常实际意义的应用题, 并且实际的情况将更加复杂: 点将从三点增加到更多, 而直线也可能是一般的曲线, 另外可能还有其它的限制条件. 这种类型的问题对学生来说是陌生的. 对两个点的情况, 我们可以用纯几何的办法加以解决. 但是对三点或者更多点的情况, 我们一般不太可能用传统的逻辑方法来求其精确解, 而且有时精确解甚至是不必要的. 现代技术的发展已使我们有可能来解决其中的某些问题, 例如本题.

同时还应该指出的是对于与本题类似的问题, 我们还可以先建立一个数学模型, 再将问题编制成程序, 用计算器或计算机来解决. 用机器来解决数学问题这将是今后数学发展中的一个重要方向. 我们的数学教育应该充分注意这一发展趋势.

(上接第5-28页)

推得$\triangle ADO\backsim\triangle ODE$.

推得$DO^2=AD\cdot DE$.

在Rt$\triangle OPD$中, 推得

$DO^2=DP^2+OP^2$

$=x^2+\frac{3}{5}mx+\frac{m^2}{4}$.

于是推得$DE=\frac{DO^2}{AD}=x+\frac{m^2}{4x}+\frac{3}{5}m$.

因此所求函数解析式为

$$y=x+\frac{m^2}{4x}+\frac{3}{5}m\,(x>0).$$