第 22 题：已知 $a>0$，$a\neq 1$，试求使方程 $\log_a(x-aK)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 K 的取值范围．解此题时，只要注意方程或不等式的等价变形就可确定 K 的范围．简解如下：

第一步：据题意，原方程有实数解的充要条件是：

$$\begin{cases}(x-aK)^2=x^2-a^2\\ x-aK>0\\ x^2-a^2>0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(x-aK)^2=x^2-a^2 & (1)\\ \\ x-aK>0 & (2)\end{cases}$$

第二步：由(1)得 $2Kx=a(1+K^2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}K=0,\text{方程无解}\\ \\ K\neq 0,\ \ x=\dfrac{a(1+K^2)}{2K} & (3)\end{cases}$$

第三步：把(3)代入(2)得 $\dfrac{(K+1)(K-1)}{2K}<0\Rightarrow K\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

又如全国卷第23题：是否存在常数 a,b,c，使得等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)}{12}\cdot(an^2+bn+c)$，对于一切自然数 n 都成立．解题时，只要根据对于一切自然数 n 都成立的条件，设 $n=1,2,3$ 代入等式，求得 a、b、c 的值，再用数学归纳法证明．

四、考查增加了形象思维能力的要求

全国、上海、广东三份试卷的立几占 16.7%、16%、15.8%；解几占 16.7%、24%、25%．这个比例是符合大纲和教材要求的．而在上海卷(第五、七题)，广东二卷(第四、五题)中都设计了代数和几何的综合题，如果考生对图形的性质比较熟悉，就可以简化计算或证明的数式运算．广东二卷第四(2)题就是如此(详见本期陈振宣《从 1989 年数学高考试题中获得的一点启示》一文——编者)．

在基础题中，也有“以形助数”、“以数判形”的能力要求．目前，由于几何教学的原因，学生的形象思维能力显得薄弱，如何加强它，是一个重要的课题．

五、值得探讨的问题

1. 高考试卷的功能，当然是为大学招生，择优录取．如果指挥不当，会使中学教学沦于苦海无边的题海，因此命题应严格控制在教学大纲范围内．试题难度可源于教材或高于教材习题，但也应控制在大纲内．全国卷第 24 题，求一般周期函数的表达式问题，是否得当值得探讨．

2. 题量的适度，亦得探讨．上海近两年试题都是超饱和的，优秀生也难答完全卷，其优势也不能在压轴上显示．这使试题的区分度和信度难以达到设计要求．为了使高考标准化，建议尽快拟定考试大纲，公开论述考试的目的、内容、方式、题型、难度、层次结构等．

3. 随着试题的标准化，选择和填空题的题量会逐步增加，因此对它们的功能应作专题研究，譬如，如何不使选择题成为变相的计算或证明题等．总之，考试命题是科学，通过不断探讨会完善的．

第二届“友谊杯”国际数学竞赛试题及解答

华东师范大学数学系　倪　明　林　磊　译解

为了纪念十月革命七十周年，保加利亚旧扎戈拉市中学数学和信息中心发起举办“友谊杯”国际数学竞赛．保加利亚、苏联、罗马尼亚、波兰、古巴、捷克斯洛伐克等国部分城市的学生参加竞赛．这一竞赛共有四轮，前三轮是通讯比赛，优胜者参加第四轮比赛．1987 年 11 月，

在卡赞勒克(保加利亚)举行了首届竞赛，第二届竞赛于1988年8月在旧扎戈拉市举行．现将第二届“友谊杯”国际数学竞赛试题翻译如下,并给出解答．

七年级

1．解整数方程：

$$x^2y+xy^2=30.$$

答：方程的解集为$\{(1,5),(5,1),(2,3),(3,2),(-6,1),(1,-6),(-5,3),(3,-5),(-5,2),(2,-5),(-6,5),(5,-6)\}$.

2．在线段AB上取C、D两点,使得$AC=CD=DB$．过A和C点在直线AB的同一侧作两条射线，这两条射线相交于M点．已知，$\angle MAB=45°$，$\angle MCB=60°$．试确定$\angle MBA$．

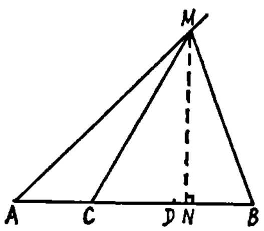

图 1

解：如图1，过M点作AB的垂线,垂足为N．令$CN=1$，则$MN=\sqrt{3}$，$AN=MN=\sqrt{3}$．故$AC=\sqrt{3}-1$．$NB=CB-CN=2AC-CN=2\sqrt{3}-3$．所以$\operatorname{tg}\angle MBA=MN/NB=\sqrt{3}/(2\sqrt{3}-3)=2+\sqrt{3}$．即$\angle MBA=\operatorname{arc\,tg}(2+\sqrt{3})=75°$.

3．在5×5大小的正方形表格的格子中记上1或-1,使得每一行,每一列,及对角线上的数的和均不等,可能吗?

解：不可能,因为不难发现，每一行，每一列及每一对角线上数的和只能是5，3，1，-1，-3，-5中的一个，而所有的和数多达12个，因此必然有相等的和数．

八年级

1．证明,不存在自然数n,使得数$n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$是完全平方数．

证明：
$$\begin{aligned}&n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3\\&=n(n+3)(n^4-5n^2+4)+3\\&=n(n+3)(n^2-1)(n^2-4)+3\\&=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\\&\quad\times(n+3)+3\end{aligned}$$

因为连续两个自然数的积是偶数，连续五个自然数的积能被5整除，所以$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$能被10整除,即原式的个位数是3，而完全平方数的个位数只能是0,1,4,5,6,9中的一个．因此所给的表示式不可能成为完全平方数．

2．证明,如果p、q_1和q_2是实数，而$p=q_1+q_2+1$,那么两个方程

$$x^2+x+q_1=0,x^2+px+q_2=0$$

中至少有一个方程,它有两个不同的实根．

证明：若$x^2+x+q_1=0$没有两个不同的实根，则$\Delta=1-4q_1\leqslant0$，即$q_1\geqslant\frac{1}{4}$．在这种情况下，可证明$x^2+px+q_2=0$一定有两个不同的实根,即恒有$p^2-4q_2>0$.
这是因为

$$\begin{aligned}p^2-4q_2&=(q_1+q_2+1)^2-4q_2\\&=q_2^2+2(q_1+1)q_2+(q_1+1)^2-4q_2\\&=q_2^2+2(q_1-1)q_2+(1+q_1)^2.\end{aligned}$$

而$p^2-4q_2>0$，等价于上述关于q_2的二次三项式的判别式Δ_1恒小于0．因为$\Delta_1=4(q_1-1)^2-4(1+q_1)^2=4(-4q_1)=-16q_1$，而$q_1\geqslant\frac{1}{4}$，所以$\Delta_1<0$,从而命题得证．

3．给定两圆,每一个圆都过另一个圆的圆心,两圆相交于A、B两点．过B点作直线交两圆于M和N点，求两圆在M和N点的切线之间的夹角．

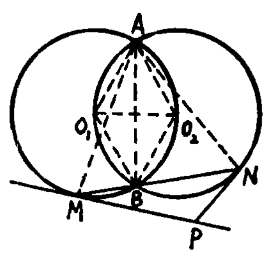

图 2

解：如图2,设两条切线相交于P点．由已知条件，容易知道两圆是等半径的．所以$\triangle AO_1O_2$和$\triangle BO_1O_2$都是以半径为边长的正三角形．于是$\angle AO_1B=\angle AO_2B=120°$．因此$\angle AMB=\angle ANB=60°$,则$\angle MAN=60°$．因为$MP$和$NP$是切线,所以$\angle PMN+\angle PNM=\angle BAM+\angle BAN=60°$．因此$\angle MPN=120°$．于是所求的夹角是$120°$(或$60°$).

九年级

1. 从1开始，依次写着自然数. 问在第一百万个位置上的数字是几？

解：因为1位数有9个，2位数有90个，3位数有900个，……，而 $900000\times6>1000000$，所以所求的数字不在某一个七位数上. 又因为 $9+90\times2+900\times3+9000\times4+90000\times5=488889$，所以所求的数字一定在某一个六位数上.

$\because\ 1000000-488889=511111,$

$511111=6\times85185+1,$

$\therefore$所求的数字是第85186个六位数（即185185）的第一个数字，也就是1.

2. 解方程组：

$$\begin{cases}yz=3y+2z-8,\\ zx=4z+3x-8,\\ xy=2x+y-1.\end{cases}$$

解：将方程组的三个方程依次改写为

$$(y-2)(z-3)=-2 \qquad ①$$

$$(z-3)(x-4)=4 \qquad ②$$

$$(x-1)(y-2)=1 \qquad ③$$

由①，③，得 $(z-3)=-2(x-1)$，代入②，得 $(x-3)(x-2)=0$，即 $x=2$ 或 $x=3$. 再代入②，③得

$$\begin{cases}x=2,\\ y=3,\\ z=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=3,\\ y=\dfrac{5}{2},\\ z=-1.\end{cases}$$

3. 如图3，在$\triangle ABC$中，$\angle C$的平分线交AB边及三角形的外接圆分别于D和K点. 证明：

(1) $\dfrac{1}{ID}-\dfrac{1}{IK}=\dfrac{1}{CI}$；

(2) $\dfrac{CI}{ID}-\dfrac{ID}{DK}=1$，

其中，I是内切圆圆心.

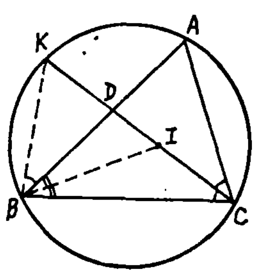

图 3

证明：(1) 将所要证明的等式变形，

$$\frac{1}{ID}-\frac{1}{IK}=\frac{1}{IC}\Longleftrightarrow1-\frac{ID}{IK}=\frac{ID}{IC}$$

$\Longleftrightarrow\dfrac{KD}{IK}=\dfrac{ID}{IC}$. 下面来证明这一等式.

连结BK、BI，容易发现，$\triangle BKD\backsim\triangle CKB$，$\therefore\dfrac{KD}{KB}=\dfrac{BD}{BC}$. $\because I$是内心，即BI是$\angle B$的平分线，$\therefore\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{ID}{IC}$，则$\dfrac{ID}{IC}=\dfrac{KD}{KB}$.

$\because\angle KBI=\dfrac{1}{2}\angle B+\dfrac{1}{2}\angle C=\angle KIB$，$\therefore BK=IK$，即得$\dfrac{ID}{IC}=\dfrac{KD}{IK}$.

(2) 由(1)得$\dfrac{CI}{ID}-\dfrac{CI}{IK}=1$，再以$\dfrac{CI}{IK}=\dfrac{ID}{KD}$代入，即得$\dfrac{CI}{ID}-\dfrac{ID}{KD}=1$.

十年级

1. 证明，若a,b和c是正数，则

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

证明：$\because a,b,c>0$，$\therefore$我们有

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]$$

$$\times\left[\left(\frac{\sqrt{b+c}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c+a}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{a+b}}{2}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\cdot\frac{\sqrt{b+c}}{2}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}\cdot\frac{\sqrt{c+a}}{2}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\cdot\frac{\sqrt{a+b}}{2}\right)^2$$ （柯西不等式）.

即$\left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\right)\cdot\dfrac{a+b+c}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^2$. 又$\because\dfrac{a+b+c}{2}>0$，故两边消去$\dfrac{a+b+c}{2}$，即得所要求证的不等式.

2. 证明，如果三角形内角的余切成等差数列，那么这个三角形边长的平方也构成等差数列.

证明：设三角形的三内角为A、B、C. $\because\ \mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}C=2\mathrm{ctg}B$,

$$\therefore\ 2\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos A\cdot\sin C+\cos C\cdot\sin A}{\sin A\cdot\sin C}$$

$$=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\cdot\sin C}.$$

即 $$\cos B=\frac{\sin^2 B}{2\sin A\sin C},$$

而据恒等式 $$\cos B=\frac{\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B}{2\sin A\sin C},$$

$$\therefore\ \sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=\sin^2 B,$$

即 $$2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C.$$

再由三角形正弦定理，即得三角形边长的平方构成等差数列.

3. 在国际象棋棋盘的每一个格子中填上数. 已知，构成正方形的任意四个相邻的格子中数的和等于 10. 证明，棋盘四个角上的四个数之和也等于 10.

证明：我们知道，国际象棋棋盘是 8×8 的格子. 格子中所填的数记为 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,8)$. 这样已知条件就是

$$a_{ij}+a_{i+1,j}+a_{i,j+1}+a_{i+1,j+1}=10\quad(i,j=1,2,\cdots,7).$$

容易得到 $a_{11}+a_{21}=a_{13}+a_{23}=a_{15}+a_{25}=a_{17}+a_{27}$，于是 $a_{11}+a_{21}+a_{18}+a_{28}=10$. 一般地 $a_{i1}+a_{i+1,1}+a_{i8}+a_{i+1,8}=10$. 也就是

$$a_{11}+a_{18}+a_{21}+a_{28}=10,$$
$$a_{21}+a_{28}+a_{31}+a_{38}=10,$$
$$\vdots$$
$$a_{71}+a_{78}+a_{81}+a_{88}=10,$$

可以推得，$a_{11}+a_{18}=a_{81}+a_{88}=a_{51}+a_{58}=a_{71}+a_{78}$，

$$\therefore a_{11}+a_{18}+a_{81}+a_{88}=10.$$

［资料来源：《Математика в школе》89 年第二期］

化归方法在一道高中数学竞赛题中的应用

安徽省铜陵市有色中学　杨富来

题(1)　甲、乙两队各有 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛. 双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，……，直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程. 那么所有可能出现的比赛过程的种数为多少？（1988 年全国高中数学联赛题）

题(2)[1]　如图 1，在直角坐标平面 xOy 上，坐标 n、m 均为整数的点 (n,m) 称为格点或整点.

从格点 (0,0) 到格点 (n,m) 的一条递增路线是由一些边组成的，在它的上面的每一个格点都比它的前面的一个格点或者在 x 或者 y 方向上增加一个单位. 那么

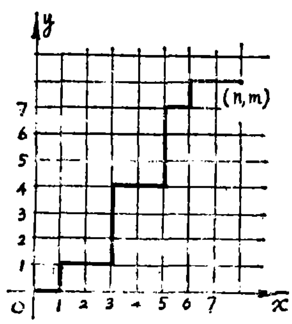

图 1

① 从格点 (0,0) 到格点 (n,m) 所有递增路线总数有多少？（答：C_{n+m}^{n} 或 C_{n+m}^{m}）

② 从格点 (n_1,m_1) 到格点 (n,m) 的所有递增路线的总数有多少？（答：$C_{n+m-(n_1+m_1)}^{n-n_1}$ 或 $C_{n+m-(n_1+m_1)}^{m-m_1}$）

③ 上述各递增路线所经历的递增格点数最多是多少？（答：①是 $n+m-1$；②是 $(n-n_1)+(m-m_1)+1$）

初看，题(1)、(2)似乎毫无瓜葛、是完全孤立的两个问题. 下面让我们来做这样的几项工作：

i) 建立如图 1 的直角坐标系；

ii) 确定下列对应关系：用 x 轴上的 1 至 7 七个数字表示甲队 7 名队员，y 轴上的 1 至 7 七个数字表示乙队 7 名队员. 并设从 1 到 7 即为各队事先排好的出场顺序.

这样，不难看到：甲队 $n(1\leqslant n\leqslant 7)$ 号队员