批阅本届上海市高考数学试题第八题所想到的

林　磊

今年上海市高等学校统一招生考试理科类数学试题第八题是：

“对于一切大于1的自然数 n，证明：

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}\text{”}.$$

我们在阅卷过程中看到，本题得零分的情况很少，但本题得满分的考生所占比例也不大，多数考生的分数都徘徊在4～5分之间（满分为8分）.

对于数学归纳法所需的第一步，考生出错

的比例很大，有的考生死记硬背数学归纳法的三步曲，不问情由，对 $n=1$ 进行验证，可是本题 n 的初始值恰恰不是 1，而是 2，这是考生失分较多的一处. 还有相当一部分考生虽然对 $n=2$ 开始进行验证，但是却把左边计算成

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{8}{5},$$

误认为左边的乘积有两个因子，说明他们审题还欠仔细.

对于数学归纳法的第二步：假设 $n=k$ 时命题成立，即

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}.$$

考生基本上都写对了，但也有一些考生写为"当 $n=k$ 时命题成立"，用"当"代替了"假设".

对考生来说最困难的一步还是第三步. 这一步除了要求考生把 $n=k$ 时假设成立的不等式应用到 $n=k+1$ 时的情况外，还要求考生拐一个弯，进一步证明一个二次不等式，这是最能考查学生处理问题能力的地方. 其具体步骤是这样的：

$$\text{左边}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2(k+1)-1}\right)$$

$$>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{2k+2}{2\sqrt{2k+1}}.$$

$\because\ 4k^2+8k+4>4k^2+8k+3,$

$\therefore\ (2k+2)^2>(2k+1)(2k+3),$

$$\frac{(2k+2)^2}{2k+1}>2k+3,\text{则}\frac{2k+2}{2\sqrt{2k+1}}>\frac{\sqrt{2k+3}}{2}=\frac{\sqrt{2(k+1)+1}}{2}=\text{右边}$$

$\therefore$ 左边>右边.

但是不少考生在做了第一步代入后就显得束手无策；有些考生虽然也试图利用不等式的性质来证明，但未达到目的，当然也有相当一部分考生顺利地通过了，而且证法也多样，各有千秋. 主要有分析法(倒推法)和直接证明两种：

[分析法]

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)>\frac{\sqrt{2k+3}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\cdot\frac{2k+2}{2k+1}>\frac{\sqrt{2k+3}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}>\sqrt{2k+3}$$

$$\Longleftrightarrow 2k+2>\sqrt{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\Longleftrightarrow(2k+2)^2>(2k+1)(2k+3)$$

$$\Longleftrightarrow 4k^2+8k+4>4k^2+8k+3.$$

[直接证法]

$$\text{左边}>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2k+1)(2k+2)^2}{(2k+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2k+1)^2+2(2k+1)+1}{2k+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(2k+1)+2+\frac{1}{2k+1}}$$

$$>\frac{1}{2}\sqrt{2k+3}=\text{右边}.$$

采用分析证明的较多，这主要是由于用分析的方法证明较自然.

我们在阅卷中发现，也有少数考生并不用数学归纳法来证明本题，而是另辟新路，直接进行证明. 但是成功的人较少. 为了使大家了解他们的解法，我们把两个成功的例子介绍如下：

[证法 1]

$$\because\ \frac{4}{3}>\frac{5}{4},\ \frac{6}{5}>\frac{7}{6},\ \cdots,\ \frac{2n}{2n-1}>\frac{2n+1}{2n},$$

$$\therefore\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{6}{5}\right)^2\cdots\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2>\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)$$

$$=\frac{2n+1}{3}>\frac{2n+1}{4}.$$

$$\text{故}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

[证法 2] $\because\ 4=\dfrac{3+5}{2}>\sqrt{3\cdot5},$

$$6=\frac{5+7}{2}>\sqrt{5\cdot7},$$

$$\cdots,2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}$$

$$>\sqrt{(2n-1)(2n+1)},$$

$$\therefore\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}>\frac{\sqrt{3\cdot5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5\cdot7}}{5}\cdots$$

$$\frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{2n-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3}}>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

故 $$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

容易看出这两种证法本质上是一致的，都是利用算术平均数不小于几何平均数这一性质．从这两个证法中我们高兴地看到这些考生已能灵活地运用所学知识来处理一些实际问题．

通过阅卷，我们觉得在中学数学教学中要进一步培养学生分析问题、处理问题的能力，要教育学生领会数学归纳法的思想实质，切忌死记硬背，同时对学生的书面表达能力的训练也须进一步加强．