抽象概括 建立模型

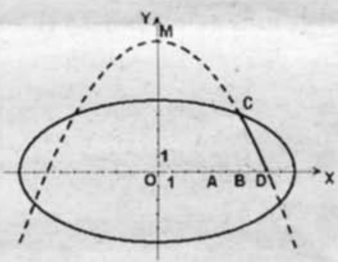
例 1(春考第 12 题)同学们都知道,在一次考试后,如果按顺序去掉一些高分,那么班级的平均分将降低;反之,如果按顺序去掉一些低分,那么班级的平均分将提高。这两个事实可以用数学语言描述为:若有限数列 a_1, a_2, Λ, a_n 满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \Lambda \leqslant a_n$,则________(结论用数学式子表示)。

分析:审题时必须抓住关键字眼,"去掉一些"表明至少去掉一项,又要少于 n 项,同时注意各个元素相同时,去掉一些项对平均数没有影响,等号能够成立,在注意下标使用的基础上,可以得到正确答案为:$\frac{a_1+a_2+\Lambda+a_m}{m} \leqslant \frac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{n}$ $(1 \leqslant m < n)$ 和 $\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\Lambda+a_n}{n-m} \geqslant \frac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{n}$ $(1 \leqslant m < n)$

本题对学生的数学素养有比较高的要求,需要有一定的学习能力,抽象概括能力,同时还要有驾驭数学符号的能力,并能把实际问题转化为数学问题——建立恰当的数学模型。所以我们在复习过程中,在巩固好基础知识和基本能力的同时,还要重视过程和方法,把握数学问题的本质。

关注时事 灵活应用

例 2(春考第 20 题)学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验。设计方案如图:



航天器运行(按顺时针方向)的轨迹方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$,变轨(即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线)后返回的轨迹是以 y 轴为对称轴、$M(0,\frac{64}{7})$为顶点的抛物线的实线部分,降落点为 D (8,0)。观测点 A (4,0)、B(6,0)同时跟踪航天器。

(1)求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程;

(2)试问:当航天器在 x 轴上方时,观测点 A、B 测得离航天器的距离分别为多少时,应向航天器发出变轨指令?

分析:(1)设曲线方程为 $y=ax^2+\frac{64}{7}$,D(8,0)的坐标代入得 $a=-\frac{1}{7}$。

$\therefore$ 曲线方程为 $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}$。

(2)设变轨点为 C(x,y),根据题意可知

$$\begin{cases} \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1, & (1) \\ y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}, & (2) \end{cases}$$

通过解方程组得 C 点的坐标为(6,4),

所以$|AC|=2\sqrt{5}$,$|BC|=4$。

当观测点 A、B 测得 AC、BC 距离分别为 $2\sqrt{5}$,4 时,应向航天器发出变轨指令。

"航天器"走进高考,让我们对祖国的航天事业产生联想,提高学生学习的兴趣,促进良好的情感与价值观的形成。我们在高考复习过程中,不能闭关自守,盲目苦练,要关心形势,关注生活,扩大知识面,提高综合素质以及应用能力。

善于研究 不断创新

例 3 (春考第 22 题) 已知数列 $a_1, a_2, \Lambda, a_{30}$,其中 $a_1, a_2, \Lambda, a_{10}$ 是首项为 1,公差为 1 的等差数列;$a_{10}, a_{11}, \Lambda, a_{20}$ 是公差为 d 的等差数列;$a_{20}, a_{21}, \Lambda, a_{30}$ 是公差为 d^2 的等差数列 $(d \neq 0)$。

(1)若 $a_{20}=40$,求 d;

(2)试写出 a_{30} 关于 d 的关系式,并求 a_{30} 的取值范围;

(3)续写已知数列,使得 $a_{30}, a_{31}, \Lambda, a_{40}$ 是公差为 d^3 的等差数列,……,依次类推,把已知数列推广为无穷数列。提出同(2)类似的问题((2)应当作为特例),并进行研究,你能得到什么样的结论?

分析:(1)、(2)都是比较基础的问题,上手容易,其中 d=3。$a_{30}=a_{20}+10d^2=10(1+d+d^2)=10\left[\left(d+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$,

当 $d \in (-\infty,0)$Y$(0,+\infty)$ 时,$a_{30} \in [\frac{15}{2},+\infty)$。

(3)所给数列可推广为无穷数列$\{a_n\}$,其中 $a_1, a_2, \Lambda, a_{10}$ 是首项为 1,公差为 1 的等差数列,当 $n \geqslant 1$ 时,数列 $a_{10n}, a_{10n+1}, \Lambda, a_{10(n+1)}$ 是公差为 d^n 的等差数列。

研究的问题可以是:试写出 $a_{10(n+1)}$ 关于 d 的关系式,并求 $a_{10(n+1)}$ 的取值范围。研究的结论可以是:由 $a_{40}=a_{30}+10d^3=10(1+d+d^2+d^3)$,

依次类推可得 $a_{10(n+1)}=10(1+d+\Lambda+d^n)=\begin{cases} 10\times\frac{1-d^{n+1}}{1-d}, & d \neq 1, \\ 10(n+1), & d=1, \end{cases}$

当 $d>0$ 时,$a_{10(n+1)}$ 的取值范围为$(10,+\infty)$等。

这个问题是可以继续研究下去的,并且随着研究的深入,难度不断加大,也越来越深刻。一方面让学生提出问题,另一方面让学生解决并探究问题,渗透了二期课改的理念,引导学生勇于探索的精神,激发学生创新的意识。真正考查了