華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第一讲

数值积分及其应用

—— 代数精度

—— Gauss 求积公式

数值积分的一般形式

基本思想

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

一般地，用 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一些离散点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上的函数值的加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值，可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

机械求积公式

求积系数

求积节点

- 将定积分计算转化成被积函数的**函数值**的计算
- 无需求原函数，易于计算机实现

代数精度

定义： 如果对于所有次数不超过 m 的多项式 $f(x)$，求积公式都精确成立，但对次数为 $m+1$ 的多项式不精确成立，则称该求积公式具有 **m 次代数精度**

- 代数精度的验证方法
  - 将 $f(x) = 1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^m$ 依次代入，公式精确成立;
  - 但对 $f(x) = x^{m+1}$ 不精确成立。

注：求积公式并不局限于机械求积公式

举例

例： 梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

具有一次代数精度。

例： 抛物线公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

具有三次代数精度。

课后练习： 复合梯形公式和复合抛物线公式具有几次代数精度？

怎样构造高精度的求积方法

考虑求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

- 含 $2n+2$ 个参数 (节点与系数)，为了使该公式具有尽可能高的代数精度，可将 $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$ 代入公式，使其精确成立，则可构造出代数精度至少为 $2n+1$ 的求积公式!

等分点不一定最佳！自由选取求积节点！

举例

例： 试确定节点 x_i 和系数 A_i，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解： 将 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2/3 \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1,\ A_1 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

该公式对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，故有 3 次代数精度！

缺点： 非线性方程组求解较困难！

Gauss 型求积公式

一般情形：考虑机械求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

定义： 若存节点在 $x_i \in [a, b]$ 及系数 A_i，使得上面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 x_i 为**高斯点**，A_i 为**高斯系数**，求积公式为 **高斯型求积公式**

性质： 上面的求积公式至多具有 $2n+1$ 次代数精度

将 $f(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$ 代入验证即可

Gauss 求积公式在所有机械求积公式中代数精度最高

Gauss 点

问题： 如何计算 Gauss 点 x_i 和 高斯系数 A_i

法一： 解**非线性**方程组

太困难! ☹

法二： 分开计算

- **先确定 Gauss 点**
- **再通过解线性方程组计算 Gauss 系数**

Gauss-Legendre 求积公式

特殊情形：$[a, b]=[-1, 1]$

Gauss 点就是 Legendre 多项式 $p_{n+1}(x)$ 的零点

Legendre 正交多项式：

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x\,P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Legendre 多项式

- **Legendre 多项式：**

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

$$\vdots$$

低阶 G-L 公式

- $n=0$ 时，$P_{n+1}(x)=x$ ⟹ Gauss 点：$x_0=0$

G-L 求积公式:

将 $f(x)=1$ 代入求出 A_0

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2f(0)}$$

- $n=1$ 时，$P_{n+1}(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

⟹ Gauss 点：$x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

将 $f(x)=1, x$ 代入求出 A_0, A_1

两点 G-L 求积公式:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

低阶 G-L 公式

- n =2 时，$P_{n+1}(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

➡ Gauss 点：$x_0=-\frac{\sqrt{15}}{5}, x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{15}}{5},$

三点 G-L 求积公式:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{8}{9} f(0)+\frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)}$$

更多 G-L 公式

当 $n > 3$时，可用数值方法计算 $P_{n+1}(x)$ 的零点

n	节点个数	Gauss点	Gauss系数
0	1	0.0000000	2.0000000
1	2	±0.5773503	1.0000000
2	3	±0.7745967 0.0000000	0.5555556 0.8888889
3	4	±0.8611363 ±0.3399810	0.3478548 0.6521452
4	5	±0.9061798 ±0.5384693 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
5	6	±0.93246951 ±0.66120939 ±0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393

一般区间上的 G-L 公式

- 积分区间: $[a, b]$, 权函数: $\rho(x) = 1$

做变量代换 $x = \dfrac{b-a}{2}t + \dfrac{b+a}{2}$

$$g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{n} A_i g(t_i)}$$

G-L公式举例

$I[f]=0.46740110027234\cdots$

例： 用四点 G-L 公式 (n=3) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$

解： 令 $x=\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{g(t)=\frac{\pi^2}{16}(t+1)^2\cos\frac{\pi}{4}(t+1)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\pi^2}{16}(t+1)^2\cos\frac{\pi}{4}(t+1)\,\mathrm{d}t$$

$$\approx\frac{\pi}{4}[0.3479g(-0.8611)+0.6521g(-0.3400)$$

$$+0.6521g(0.3400)+0.3479g(0.8611)]$$

$$\approx 0.4674$$

几点注记

- **其它 Gauss 型求积公式**
  - **Gauss-Chebyshev 求积公式：$[a, b]=[-1,1]$**
  - **Gauss-Laguerre 求积公式：$[a, b]=[0,+\infty]$**
  - **Gauss-Hermite 求积公式：$[a, b]=[-\infty,+\infty]$**

- **实际应用中可以使用复合 Gauss 求积公式**
  - **将积分区间分隔成若干小区间**
  - **在每个小区间上使用 Gauss 求积公式**