



華東師範大學

EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第一讲

数值积分及其应用

——代数精度

——Gauss 求积公式

数值积分的一般形式

基本思想

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

一般地，用 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一些离散点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

上的函数值的加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值，可得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

机械求积公式

求积系数

求积节点

- 将定积分计算转化成被积函数的函数值的计算
- 无需求原函数，易于计算机实现

代数精度

定义： 如果对于所有次数不超过 m 的多项式 $f(x)$ ，求积公式都精确成立，但对次数为 $m+1$ 的多项式不精确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度

● 代数精度的验证方法

- 将 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$ 依次代入，公式精确成立；
- 但对 $f(x) = x^{m+1}$ 不精确成立。

注： 求积公式并不局限于机械求积公式

举例

例： 梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

具有一次代数精度。

例： 抛物线公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

具有三次代数精度。

课后练习： 复合梯形公式和复合抛物线公式具有几次代数精度？

怎样构造高精度的求积方法

考虑求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

- 含 $2n+2$ 个参数 (节点与系数), 为了使该公式具有尽可能高的代数精度, 可将 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ 代入公式, 使其精确成立, 则可构造出代数精度至少为 $2n+1$ 的求积公式!

等分点不一定最佳! 自由选取求积节点!

举例

例：试确定节点 x_i 和系数 A_i ，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解：将 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2/3 \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} A_0 = 1, A_1 = 1 \\ x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

该公式对 $f(x) = x^4$ 不精确成立，故有 3 次代数精度！

缺点：非线性方程组求解较困难！

Gauss 型求积公式

一般情形：考虑机械求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

定义：若存节点在 $x_i \in [a, b]$ 及系数 A_i ，使得上面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 x_i 为**高斯点**， A_i 为**高斯系数**，求积公式为**高斯型求积公式**

性质：上面的求积公式至多具有 $2n+1$ 次代数精度

将 $f(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$ 代入验证即可

Gauss 求积公式在所有机械求积公式中代数精度最高

Gauss 点

问题：如何计算 Gauss 点 x_i 和高斯系数 A_i

法一：解非线性方程组



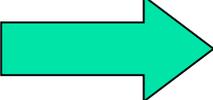
太困难! 😞

法二：分开计算

- 先确定 Gauss 点
- 再通过解线性方程组计算 Gauss 系数

Gauss-Legendre 求积公式

特殊情形: $[a, b] = [-1, 1]$

 Gauss 点就是 Legendre 多项式 $P_{n+1}(x)$ 的零点

Legendre 正交多项式:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Legendre 多项式

- Legendre 多项式:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

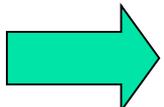
$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

⋮

低阶 G-L 公式

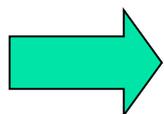
- $n = 0$ 时, $P_{n+1}(x) = x$  Gauss 点: $x_0 = 0$

G-L 求积公式:

将 $f(x) = 1$ 代入求出 A_0

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0)$$

- $n = 1$ 时, $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

 Gauss 点: $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

将 $f(x) = 1, x$ 代入
求出 A_0, A_1

两点 G-L 求积公式:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

低阶 G-L 公式

● $n = 2$ 时, $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

➡ Gauss 点: $x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5}, x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5},$

三点 G-L 求积公式:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

更多 G-L 公式

当 $n > 3$ 时，可用数值方法计算 $P_{n+1}(x)$ 的零点

n	节点个数	Gauss点	Gauss系数
0	1	0.0000000	2.0000000
1	2	± 0.5773503	1.0000000
2	3	± 0.7745967 0.0000000	0.5555556 0.8888889
3	4	± 0.8611363 ± 0.3399810	0.3478548 0.6521452
4	5	± 0.9061798 ± 0.5384693 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
5	6	± 0.93246951 ± 0.66120939 ± 0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393

一般区间上的 G-L 公式

- 积分区间: $[a, b]$, 权函数: $\rho(x) = 1$

→ 做变量代换 $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$

→ $g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$

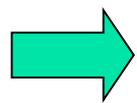
→
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{i=0}^n A_i g(t_i)$$

G-L公式举例

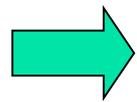
$$I[f]=0.46740110027234\dots$$

例：用四点 G-L 公式 ($n=3$) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx$

解：令 $x = \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}$



$$g(t) = \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1)$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1) dt \\ &\approx \frac{\pi}{4} [0.3479g(-0.8611) + 0.6521g(-0.3400) \\ &\quad + 0.6521g(0.3400) + 0.3479g(0.8611)] \\ &\approx 0.4674 \end{aligned}$$

几点注记

- 其它 Gauss 型求积公式
 - Gauss-Chebyshev 求积公式: $[a, b]=[-1,1]$
 - Gauss-Laguerre 求积公式: $[a, b]=[0,+\infty]$
 - Gauss-Hermite 求积公式: $[a, b]=[-\infty,+\infty]$
- 实际应用中可以使用复合 Gauss 求积公式
 - 将积分区间分隔成若干小区间
 - 在每个小区间上使用 Gauss 求积公式