第一讲

数值积分及其应用

—— 二重积分

—— Matlab积分函数

矩形区域二重积分

- 矩形区域二重积分：累次积分

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

- 复合梯形法 $\boxed{h_x = \frac{b-a}{m},\ h_y = \frac{d-c}{n}}$

$$\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \approx h_y \left(\frac{f(x,y_0)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x,y_j) + \frac{f(x,y_n)}{2} \right)$$

$$\int_a^b f(x,y_j)\,\mathrm{d}x \approx h_x \left(\frac{f(x_0,y_j)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i,y_j) + \frac{f(x_m,y_j)}{2} \right)$$

$$i = 0,1,\ldots,n_y$$

矩形区域二重积分

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{1}{4}h_x h_y\Big(f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_m,y_0)+f(x_m,y_n)\Big)$$

$$+\frac{1}{2}h_x h_y\left(\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i,y_0)+\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i,y_n)+\sum_{j=1}^{n-1} f(x_0,y_j)+\sum_{j=1}^{n-1} f(x_m,y_j)\right)$$

$$+h_x h_y\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_k,y_i)$$

在积分区域的四个角点系数为 1/4，边界为 1/2，内部节点为 1

$$R(f)=-\frac{(d-c)(b-a)}{12}\left(h_x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\xi,\eta)+h_y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right)$$

矩形区域二重积分

- **复合抛物线法** $\boxed{h_x = \dfrac{b-a}{2m},\ h_y = \dfrac{d-c}{2n}}$

$$\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\approx \frac{h_y}{3}\left(f(x,y_0) + f(x,y_{2n}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x,y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x,y_{2j-1}) \right)$$

$$\int_a^b f(x,y_j)\,\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{h_x}{3}\left(f(x_0,y_j) + f(x_{2m},y_j) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_j) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_j) \right)$$

矩形区域二重积分

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = h_x h_y \sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n} \omega_{i,j} f(x_i, y_j)$$

其中 $\omega_{i,j} = u_i \cdot v_j$

$$U = \{u_0, u_1, \cdots, u_{2m}\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right\}^T$$

$$V = \{v_0, v_1, \cdots, v_{2n}\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right\}^T$$

误差：

$$R(f) = -\frac{(d-c)(b-a)}{180}\left(h_x^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\xi,\eta) + h_y^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} f(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right)$$

Matlab积分函数

- **Matlab 计算积分的相关函数**

  - **数值积分函数**

    `trapz`、`quad`、`integral`、`integral2`

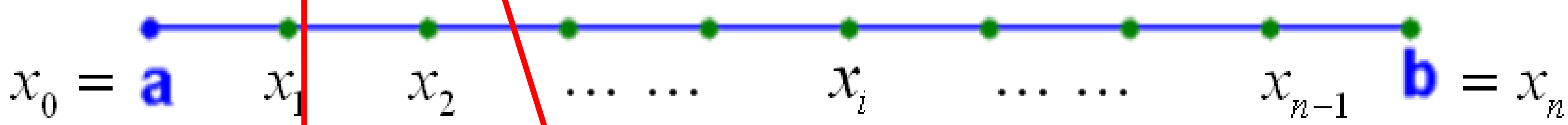
  - **符号积分函数：** `int`

trapz

- **复合梯形法**

```
trapz(x, y)
```

x 为分割点（节点）组成的向量，
y 为被积函数在节点上的函数值组成的向量。



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$$

$$\boxed{x=[x_0, x_1, \ldots, x_n]} \qquad \boxed{y=[f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)]}$$

trapz 举例

例： 用梯形法计算下面定积分 (取 n=100)

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

解： a=0, b=1, n=100, $y_i = f(x_i) = 1/(1+x_i^2)$

```
x=0:1/100:1;
y=1./(1+x.^2);
inum=trapz(x, y)
```

quad

$$\int_a^b f(x)dx$$

- 自适应抛物线法

```
quad(f,a,b,tol)
```

$f = f(x)$ 为被积函数，$[a,b]$ 为积分区间，tol 为计算精度

- 不用自己分割积分区间
- 可以指定计算精度，若不指定，缺省精度是 10^{-6}
- 精度越高，函数运行的时间越长
- f 是函数句柄，也可用字符串表示（不推荐），其中涉及的运算必须采用数组运算

将自变量看成是向量！

quad 举例

例： 用 quad 计算定积分：

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

解：

```
f=@(x) 1./(1+x.^2);
inum=quad(f, 0, 1)  % 采用缺省精度
```

```
inum=quad(@(x) 1./(1+x.^2), 0, 1, 1e-10)
```

integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

- 全局自适应积分法（R2012a以后版本）

```
integral(f,a,b)
integral(f,a,b,'RelTol',tol)
```

- 该函数比 quad 效率更高，且可以处理一些非正常积分
- 可以指定计算精度，若不指定，缺省精度是 10^{-6}
- f 必须是函数句柄，且涉及的运算必须采用数组运算

```
f=@(x) 1./(1+x.^2);
inum=integral(f,0,1)
inum=integral(f,0,1,'RelTol',1e-10)
```

```
f=@(x) exp(-x);
inum=integral(f,0,inf)
```

integral2

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

- 计算二重积分的全局自适应积分法

```
integral2(f,a,b,c,d,tol)
integral2(f,a,b,c,d,'RelTol',tol)
```

- 可以指定计算精度，若不指定，缺省精度是 10^{-6}
- f 必须是函数句柄，且涉及的运算必须采用**数组运算**

integral2

例： 计算二重积分 $I=\int_0^2\int_{-1}^1(4xy+3y^2)dxdy$

```
f=@(x,y) 4*x.*y+3*y.^2;
inum=integral2(f,-1,1,0,2)
```

注意积分变量与积分区间的对应关系

在前面的是**第一**积分变量，在后面的是**第二**积分变量

int

- 符号积分

`int(f,v,a,b)`	% 计算定积分 $\int_a^b f(v)dv$
`int(f,a,b)`	% 计算关于默认变量的定积分
`int(f,v)`	% 计算不定积分 $\int f(v)dv$
`int(f)`	% 计算关于默认变量的不定积分

例：用 int 函数计算定积分：$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

```
syms x;
f=1/(1+x^2);
inum=int(f,x,0,1)
```

数值实验

例： 用 Matlab 函数近似计算定积分 $I=\int_1^2 e^{x^{-2}}\mathrm{d}x$

- 梯形法：

```
x=1:0.001:2;
y=exp(x.^(-2));
inum=trapz(x,y)
```

- 抛物线法：

```
f=@(x) exp(x.^(-2));
inum=quad(f, 1, 2, 1e-10)
```

- 符号积分法：

```
syms x;
inum=int(exp(x^(-2)),x,1,2)
```

数值实验

例： 用 Matlab 函数近似计算二重积分

$$I=\int_0^2 dx\int_{-1}^1 (x+y^2)dy$$

- **数值积分法：**

```
f=@(x,y) x+y.^2;
inum=integral2(f, 0, 2, -1, 1)
```

- **符号积分法：**

```
syms x y;
f=int(x+y^2,y,-1,1);
inum=int(f,x,0,2)
```