



華東師範大學

EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第一讲

数值积分及其应用

—— 自适应数值积分

误差分析

定理： 设 I 是定积分精确值， T_n 是由梯形法计算出来的近似值，若 $f(x) \in C^2[a, b]$ ，则存在 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$I - T_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

定理： 设 I 是定积分精确值， S_n 是由抛物线法计算出来的近似值，若 $f(x) \in C^4[a, b]$ ，则存在 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$I - S_n = -\frac{(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

注： 抛物线法事实上使用了 $2n+1$ 个节点

自适应数值积分

- 取等分点的缺点

当被积函数在部分区域变化较剧烈，而其他部分变化较平缓时，采用等分点会增加工作量，效率低下。

- 自适应数值积分

变化剧烈的地方取较小步长，在变化平缓的地方取较大步长，使得在满足计算精度的前提下工作量尽可能小。

作业：试给出梯形法的递推计算公式： T_k

($n=2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^k, \dots$ ，即对积分区间不断对分)

自适应梯形法

算法：基于梯形法的自适应数值积分

递归算法

- (1) 取**当前积分区间** $(x_0, x_1)=(a, b)$;
- (2) 用梯形公式计算函数在当前积分区间上的积分近似值;
- (3) 判断近似值的误差, 若**满足要求**, 则该值即为该区间上的计算结果, 该区间的计算过程结束。
- (4) 否则, 将区间二等分: 令 $x_c=(x_0+x_1)/2$, 分别将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 设为当前积分区间, 重复步骤 (2)-(4), 直到它们的**计算误差满足要求**, 然后将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 上的计算结果之和作为区间 (x_0, x_1) 上的计算结果;

梯形公式:
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

自适应梯形法

问题：如何判断近似值的误差是否满足要求？

设给定的误差限为 ε

“误差等分布原则”：小区间上的误差满足： $\varepsilon_i \leq \frac{h_i}{b-a} \varepsilon$

● 设当前计算区间为 (x_0, x_1) ，梯形公式的计算误差：

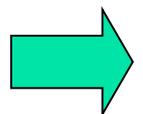
$$I_{[x_0, x_1]} - T_{[x_0, x_1]} = -\frac{(x_1 - x_0)^3}{12} f''(\xi)$$

当区间长度较小时， ξ 可用中点 x_c 代替

用二阶差商近似二阶导数值（Taylor展开，板书），可得

$$f''(\xi) \approx f''(x_c) \approx 4 \frac{f(x_0) - 2f(x_c) + f(x_1)}{(x_1 - x_0)^2}$$

自适应梯形法



近似值满足要求的判断准则

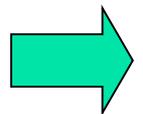
$$|f(x_0) - 2f(x_c) + f(x_1)| \leq \frac{3\varepsilon}{b-a}$$

● 进一步改进

由于需要计算中点的函数值，因此我们可以利用该函数值来给出更好的**积分近似值**

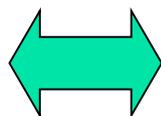
$$\tilde{T}_{[x_0, x_1]} = T_{[x_0, x_c]} + T_{[x_c, x_1]} = \frac{x_1 - x_0}{4} (f(x_0) + 2f(x_c) + f(x_1))$$

$$\text{误差: } I_{[x_0, x_1]} - \tilde{T}_{[x_0, x_1]} \approx \frac{1}{4} (I_{[x_0, x_1]} - T_{[x_0, x_1]})$$



新近似值的误差判断准则

$$|f(x_0) - 2f(x_c) + f(x_1)| \leq \frac{12\varepsilon}{b-a}$$



$$|T_{[x_0, x_1]} - \tilde{T}_{[x_0, x_1]}| \leq \frac{3(x_1 - x_0)\varepsilon}{b-a}$$

自适应梯形法

算法：基于梯形法的自适应数值积分

```
function trap_adap(a,fa,b,fb,tol,F)
  if (a=b) return 0
  xc=(a+b)/2; h=b-a; T0=h*(fa+fb)/2;
  if (xc=a or xc=b) return T0
  fc=F(xc); T1=(T0+fc*h)/2; err=|T1-T0|
  if err>h*tol then
    return trap_adap(a,fa,xc,fc,tol,F) +
      + trap_adap(xc,fc,b,fb,tol,F)
  else
    return T1
  end if
end function
```

$$\text{tol} = \frac{3\varepsilon}{b-a}$$

自适应梯形法举例

例：用自适应梯形法计算下面积分的近似值

$$I = \int_{0.2}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

`ex_trap_adap.m`

自适应抛物线法

算法：基于抛物线法的自适应数值积分

递归算法

- (1) 取**当前积分区间** $(x_0, x_1)=(a, b)$;
- (2) 用抛物线公式计算函数在当前积分区间上的积分近似值;
- (3) 判断近似值的误差, 若**满足要求**, 则该值即为该区间上的计算结果, 该区间的计算过程结束。
- (4) 否则, 将区间二等分: 令 $x_c=(x_0+x_1)/2$, 分别将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 设为当前积分区间, 重复步骤 (2)-(4), 直到它们的**计算误差满足要求**, 然后将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 上的计算结果之和作为区间 (x_0, x_1) 上的计算结果;

抛物线公式:
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

自适应抛物线法

问题：如何判断近似值的误差是否满足要求？

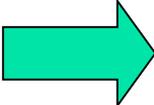
设给定的误差限为 ε

- 设当前计算区间为 (x_0, x_1) ，抛物线公式的计算误差：

$$I_{[x_0, x_1]} - S_{[x_0, x_1]} = -\frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^5} f^{(4)}(\xi)$$

将区间二等分后，在每个小区间上使用抛物线法，可得新的近似值 $\tilde{S}_{[x_0, x_1]} = S_{[x_0, x_c]} + S_{[x_c, x_1]}$

$$I_{[x_0, x_1]} - \tilde{S}_{[x_0, x_1]} = -\frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^5 \times 2^5} (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2))$$


$$I_{[x_0, x_1]} - \tilde{S}_{[x_0, x_1]} = -\frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^9} f^{(4)}(\tilde{\xi})$$

自适应抛物线法

当区间长度较小时，可假定 $f^{(4)}(\tilde{\xi}) = f^{(4)}(\xi)$

$$\rightarrow \tilde{S}_{[x_0, x_1]} - S_{[x_0, x_1]} = \frac{15}{16} \times \frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^5} f^{(4)}(\xi)$$

$$\rightarrow \left| I_{[x_0, x_1]} - \tilde{S}_{[x_0, x_1]} \right| = \frac{1}{15} \left| \tilde{S}_{[x_0, x_1]} - S_{[x_0, x_1]} \right|$$

根据“**误差等分布原则**”， $\tilde{S}_{[x_0, x_1]}$ 是否满足精度要求的判别准则是

$$\frac{1}{15} \left| \tilde{S}_{[x_0, x_1]} - S_{[x_0, x_1]} \right| \leq \frac{x_1 - x_0}{b - a} \varepsilon$$

为保险起见，实际计算中可使用

$$\frac{1}{10} \left| \tilde{S}_{[x_0, x_1]} - S_{[x_0, x_1]} \right| \leq \frac{x_1 - x_0}{b - a} \varepsilon$$

自适应抛物线法

算法：基于抛物线法的自适应数值积分

留作作业