華東師範大學 EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第一讲

数值积分及其应用

—— 自适应数值积分

误差分析

定理： 设 I 是定积分精确值，T_n是由梯形法计算出来的近似值，若 $f(x)\in C^2[a,b]$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$I-T_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi) \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

定理： 设 I 是定积分精确值，S_n 是由抛物线法计算出来的近似值，若 $f(x)\in C^4[a,b]$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$I-S_n=-\frac{(b-a)}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

注：抛物线法事实上使用了 $2n+1$ 个节点

自适应数值积分

- **取等分点的缺点**

当被积函数在部分区域变化较剧烈，而其他部分变化较平缓时，采用等分点会增加工作量，效率低下。

- **自适应数值积分**

变化剧烈的地方取较小步长，在变化平缓的地方取较大步长，使得在满足计算精度的前提下工作量尽可能小。

作业：试给出梯形法的递推计算公式：T_k（$n=2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^k, \ldots$，即对积分区间不断对分）

自适应梯形法

算法：基于梯形法的自适应数值积分

递归算法

(1) 取当前积分区间 $(x_0, x_1)=(a, b)$；

(2) 用梯形公式计算函数在当前积分区间上的积分近似值；

(3) 判断近似值的误差，若满足要求，则该值即为该区间上的计算结果，该区间的计算过程结束。

(4) 否则，将区间二等分：令 $x_c=(x_0+x_1)/2$，分别将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 设为当前积分区间，重复步骤 (2)-(4)，直到它们的计算误差满足要求，然后将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 上的计算结果之和作为区间 (x_0, x_1) 上的计算结果；

梯形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

自适应梯形法

问题：如何判断近似值的误差是否满足要求？

设给定的误差限为 ε

"误差等分布原则"：小区间上的误差满足：$\varepsilon_i \le \dfrac{h_i}{b-a}\varepsilon$

- 设当前计算区间为 (x_0, x_1)，梯形公式的计算误差：

$$I_{[x_0,x_1]} - T_{[x_0,x_1]} = -\frac{(x_1-x_0)^3}{12} f''(\xi)$$

当区间长度较小时，ξ 可用中点 x_c 代替

用二阶差商近似二阶导数值（Taylor展开，板书），可得

$$f''(\xi) \approx f''(x_c) \approx 4\frac{f(x_0)-2f(x_c)+f(x_1)}{(x_1-x_0)^2}$$

自适应梯形法

近似值满足要求的判断准则 $\left|f(x_0)-2f(x_c)+f(x_1)\right|\le\dfrac{3\varepsilon}{b-a}$

- 进一步改进

由于需要计算中点的函数值，因此我们可以利用该函数值来给出更好的**积分近似值**

$$\tilde{T}_{[x_0,x_1]}=T_{[x_0,x_c]}+T_{[x_c,x_1]}=\frac{x_1-x_0}{4}\Big(f(x_0)+2f(x_c)+f(x_1)\Big)$$

误差：$$I_{[x_0,x_1]}-\tilde{T}_{[x_0,x_1]}\approx\frac{1}{4}\Big(I_{[x_0,x_1]}-T_{[x_0,x_1]}\Big)$$

新近似值的误差判断准则 $\left|f(x_0)-2f(x_c)+f(x_1)\right|\le\dfrac{12\varepsilon}{b-a}$

$$\Longleftrightarrow\quad\left|T_{[x_0,x_1]}-\tilde{T}_{[x_0,x_1]}\right|\le\frac{3(x_1-x_0)\varepsilon}{b-a}$$

自适应梯形法

算法：基于梯形法的自适应数值积分

$$\text{tol} = \frac{3\varepsilon}{b-a}$$

```
function trap_adap(a,fa,b,fb,tol,F)
  if (a=b) return 0
  xc=(a+b)/2; h=b-a; T0=h*(fa+fb)/2;
  if (xc=a or xc=b) return T0
  fc=F(xc); T1=(T0+fc*h)/2; err=|T1-T0|
  if err>h*tol then
    return trap_adap(a,fa,xc,fc,tol,F) +
           + trap_adap(xc,fc,b,fb,tol,F)
  else
    return T1
  end if
end function
```

自适应梯形法举例

例：用自适应梯形法计算下面积分的近似值

$$I=\int_{0.2}^{1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

`ex_trap_adap.m`

自适应抛物线法

算法：基于抛物线法的自适应数值积分　　递归算法

(1) 取当前积分区间 $(x_0, x_1)=(a, b)$；

(2) 用抛物线公式计算函数在当前积分区间上的积分近似值；

(3) 判断近似值的误差，若满足要求，则该值即为该区间上的计算结果，该区间的计算过程结束。

(4) 否则，将区间二等分：令 $x_c=(x_0+x_1)/2$，分别将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 设为当前积分区间，重复步骤 (2)-(4)，直到它们的计算误差满足要求，然后将子区间 (x_0, x_c) 和 (x_c, x_1) 上的计算结果之和作为区间 (x_0, x_1) 上的计算结果；

抛物线公式：$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

自适应抛物线法

问题：如何判断近似值的误差是否满足要求？

设给定的误差限为 ε

- **设当前计算区间为 (x_0, x_1)，抛物线公式的计算误差：**

$$I_{[x_0,x_1]} - S_{[x_0,x_1]} = -\frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^5} f^{(4)}(\xi)$$

将区间二等分后，在每个小区间上使用抛物线法，可得
新的近似值 $\tilde{S}_{[x_0,x_1]} = S_{[x_0,x_c]} + S_{[x_c,x_1]}$

$$I_{[x_0,x_1]} - \tilde{S}_{[x_0,x_1]} = -\frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^5 \times 2^5}\left(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{[x_0,x_1]} - \tilde{S}_{[x_0,x_1]} = -\frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^9} f^{(4)}(\tilde{\xi})$$

自适应抛物线法

当区间长度较小时，可假定 $f^{(4)}(\tilde{\xi}) = f^{(4)}(\xi)$

$$\Rightarrow \quad \tilde{S}_{[x_0,x_1]} - S_{[x_0,x_1]} = \frac{15}{16} \times \frac{(x_1 - x_0)^5}{90 \times 2^5} f^{(4)}(\xi)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left| I_{[x_0,x_1]} - \tilde{S}_{[x_0,x_1]} \right| = \frac{1}{15} \left| \tilde{S}_{[x_0,x_1]} - S_{[x_0,x_1]} \right|}$$

根据“误差等分布原则”，$\tilde{S}_{[x_0,x_1]}$ 是否满足精度要求的判别准则是

$$\boxed{\frac{1}{15} \left| \tilde{S}_{[x_0,x_1]} - S_{[x_0,x_1]} \right| \le \frac{x_1 - x_0}{b - a} \varepsilon}$$

为保险起见，实际计算中可使用 $\boxed{\frac{1}{10} \left| \tilde{S}_{[x_0,x_1]} - S_{[x_0,x_1]} \right| \le \frac{x_1 - x_0}{b - a} \varepsilon}$

自适应抛物线法

算法：基于抛物线法的自适应数值积分

留作作业