華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第一讲

数值积分及其应用

—— 梯形法与抛物线法
—— 圆周率计算

主要内容

- 数值积分及其应用
  - 基本概念
  - 梯形法和抛物线法
  - 自适应求积方法
  - 二重积分
  - 数值积分应用

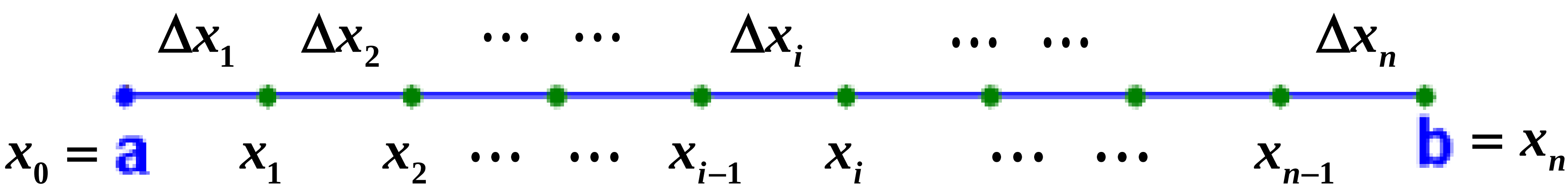
数值积分

- 数值积分是计算数学的基础和核心，很多连续问题都需要通过数值积分才能转化为离散问题。
- 数值积分内容非常复杂，也非常丰富：被积函数可能是奇异（弱奇异，超奇异）的，也可能是急剧震荡或急剧衰减。
- 对于高维积分，由于维数效应，计算复杂度往往随维数指数增长，如何高效地计算高维积分，仍然是计算数学的一大难题。

定积分的近似

- **定积分的定义**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

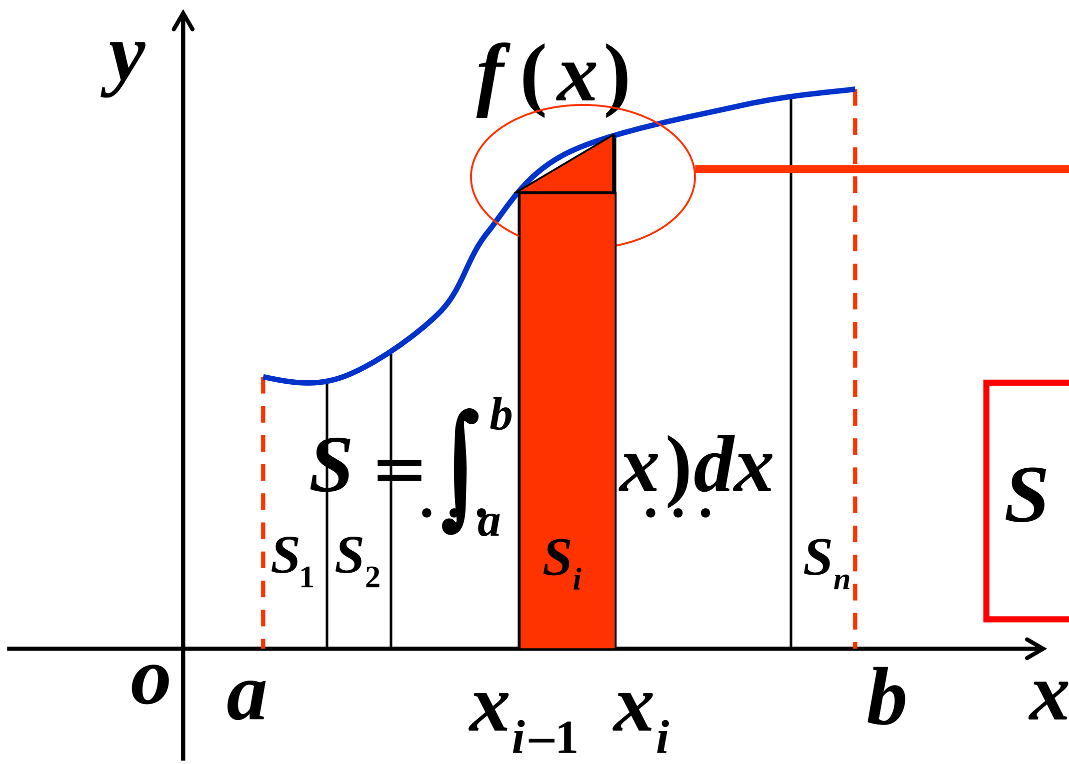


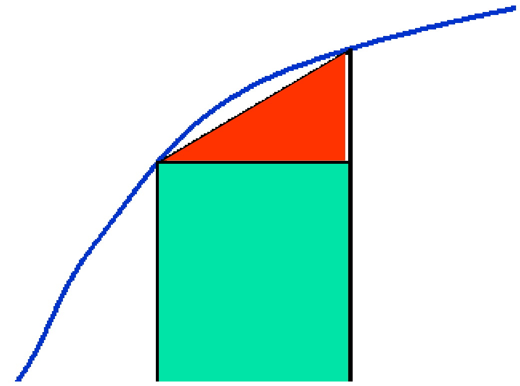
$$\boxed{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}} \qquad \boxed{\Delta x = \max_i \Delta x_i}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

n 充分大，Δx 充分小

定积分几何意义





$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} S_i}$$

复合梯形法

- **曲边小梯形**的面积可以由**直边小梯形**的面积来近似

$$\boxed{S_i \approx \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i}$$

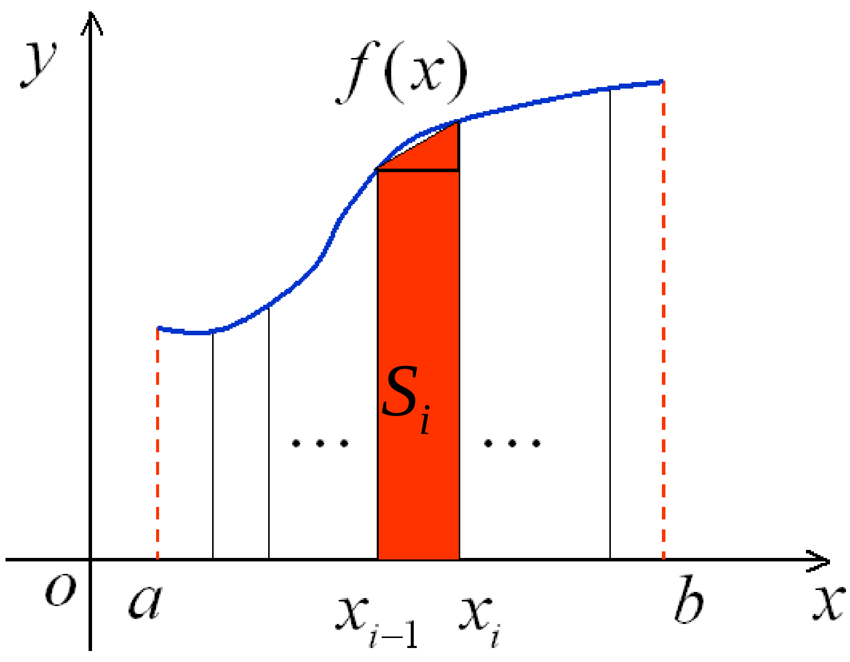
$$y_i = f(x_i),\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

- 整个曲边梯形的面积：

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S_i$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i$$



梯形法

- 如果我们 n 等分区间 $[a, b]$，即令：

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = h = \frac{b-a}{n}$$

则 $$S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i = h\sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)}$$

复合梯形公式

- n=1时，梯形公式： $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

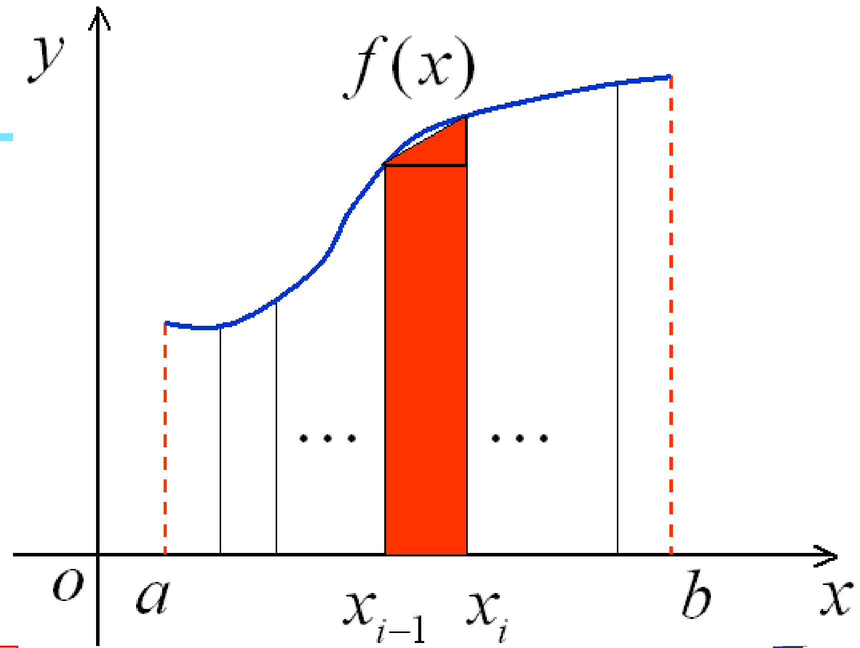
抛物线法

- n 等分区间 [a,b]，得

$$\boxed{h=\frac{b-a}{n},\ x_i=ih,\ i=0,1,\ldots,n}$$

- 计算节点和中点上的函数值：

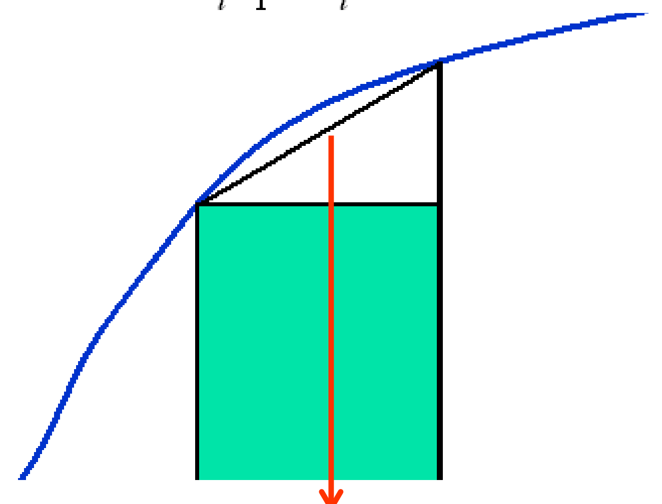
$$y_i = f(x_i),\quad i=0,1,\ldots,n$$
$$y_{i-1/2} = f(x_i-0.5h),\quad i=1,\ldots,n$$



- 在区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上，用过以下三点

$$P_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1}),\ P_{i-1/2}(x_{i-1/2},y_{i-1/2}),\ P_i(x_i,y_i)$$

的**抛物线**来近似原函数 $f(x)$。



用**抛物线**代替该**直线**，计算精度是否会更好？

抛物线法

设过以上三点的抛物线方程为：

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = p_i(x)$$

则在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx$$

$$= \left.\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{\alpha}{3}(x_i^3 - x_{i-1}^3) + \frac{\beta}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) + \gamma(x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\Big[(\alpha x_{i-1}^2 + \beta x_{i-1} + \gamma) + (\alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma)$$

$$+ \alpha(x_i + x_{i-1})^2 + 2\beta(x_i + x_{i-1}) + 4\gamma\Big]$$

$$= \frac{x_i - x_{i-1}}{6}(y_i + 4y_{i-1/2} + y_i) \quad \boxed{= \frac{b-a}{6n}(y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i)}$$

抛物线法

- 相加后可得：

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{6n}(y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_n + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + \cdots + y_{n-1/2})$$

$$+ 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})]$$

复合抛物线（辛普生，Simpson）公式

- n=1时，抛物线公式：$\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\dfrac{a+b}{2}) + f(b) \right)$

误差分析

定理：设 I 是定积分精确值，T_n是由复合梯形法计算出来的近似值，若 $f(x)\in C^2[a, b]$，则存在 $\xi\in(a, b)$，使得

$$I-T_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi) \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

定理：设 I 是定积分精确值，S_n 是由复合抛物线法计算出来的近似值，若 $f(x)\in C^4[a, b]$，则存在 $\xi\in(a, b)$，使得

$$I-S_n=-\frac{(b-a)}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

注：抛物线法事实上使用了 $2n+1$ 个节点

应用举例

问题：如何计算圆周率 π 的值？

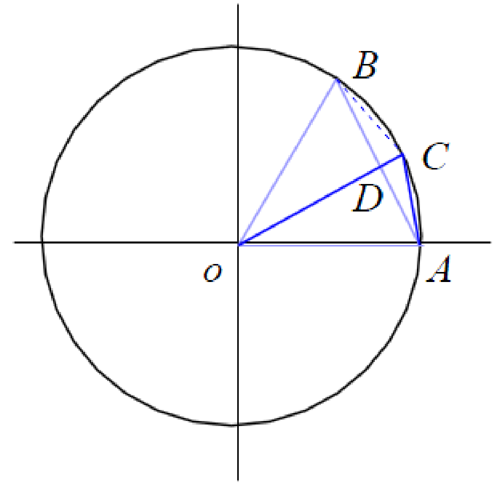
- **在 Matlab 中可以显示任意精度的 π 的值**

```
vpa(pi,20)   % 显示 20 位有效数字
```

Pi=3.
1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679
8214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196
4428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273
7245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094
3305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912
9833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132
0005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235
4201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859
5024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303
5982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989
3809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151
… … … …

π 的计算：刘徽割圆

- 刘徽割圆法 （公元 263 年）



  - 从正六边形开始，逐步求边长与面积
  - 设 6×2^n 的正多边形的边长为 a_n

  通过递推计算可得（单位圆）

$$a_{n+1}=\sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$$\boxed{AC^2=AD^2+DC^2=AD^2+(OC-OD)^2}$$

  - 三角形 ΔOAC 的面积为：$S_{n+1}=\frac{1}{2}OC\times AD=\frac{a_n}{4}$

$$\boxed{\pi\approx6\times2^{n+1}\times S_{n+1}=3\times2^n a_n}$$

计算到正 96 边形时，得到 $\pi\approx3.14$

π 的计算：幂级数展开

- **幂级数展开**

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \cdots$$

两边积分

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

令 $x = 1$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots}$$

n 很大时精度仍不高

π 的计算：快速公式

- **快速计算公式**

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

$\arctan\frac{1}{2}$ 和 $\arctan\frac{1}{3}$ 的展开式的收敛速度都比 $\arctan 1$ 快得多

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Machin 公式，1706

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}$$

π 的计算：积分法

- 积分法

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}$$

- 复合梯形法

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}h\Big(f(x_0)+f(x_n)\Big)+h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

- 复合抛物线法

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6n}[y_0+y_n+4(y_{1/2}+y_{3/2}+\cdots+y_{n-1/2})$$

$$+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})]$$

π 的计算：其他方法

- **Monte Carlo 法：Buffon 投针实验**
- **Ramanujan（拉马努金）公式：**

（每项大约可增加 8 位有效数字，需使用 FFT）

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

- **Chudnovsky 公式：**

（每项大约可增加 14 位有效数字，需使用 FFT）

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{426880\sqrt{10005}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n)!(13591409+545140134n)}{(3n)!(n!)^3(-640320)^{3n}}$$

π 的计算：其他方法

- **算术几何平均值 (Arithmetic-Geometric Mean, AGM)**

$$a_0 = 1,\ b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$M = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\pi = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (a_n^2 - b_n^2)}{2M^2}$$

（需使用 FFT，每迭代一次有效位数乘 2）