

1. 用 Euler 折线法和改进的 Euler 法求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \frac{12x^2}{y^3}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解(步长 h 取 0.1), 求解范围为区间 $[0, 0.8]$, 并作图表示。(程序取名为 hw21.m) (思考: 如果求解区间改为 $[0, 2]$, 则结果怎样?)

2. 用四阶经典 Runge-Kutta 法求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = y - e^x \cos x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解(步长 h 取 0.1), 求解范围为区间 $[0, 3]$, 并作图表示。(程序取名为 hw22.m)

3. 分别用 Euler 法和四阶经典 Runge-Kutta 法(编程)求下面的 Lorenz 方程组(参数方程)

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\beta y_1 + y_2 y_3 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\sigma y_2 + \sigma y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} = -y_2 y_1 + \rho y_2 - y_3 \end{cases}$$

的数值解。参数 $\beta = \frac{8}{3}, \sigma = 10, \rho = 28$, 初值条件 $y_1 = 9, y_2 = 12, y_3 = 2$, 求解区间 $[0, 30]$, 区间等分数 $n=2000$ 。并绘制点 (y_1, y_2, y_3) 的三维空间曲线图。(程序取名为 hw23.m) 并观察解对初值的敏感性(取初值 $y_3=2.01$ 或 1.99 , 绘制出 y_3 的曲线图)

4. 分别用四阶经典 Runge-Kutta 法(编程)和 MATLAB 自带函数 ode45 求 Van der Pol 方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0$$

的数值解。参数 $\mu = 7$, 初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$, 求解区间 $[0, 50]$, 区间等分数 $n=1200$ 。并绘制曲线图。(程序取名为 hw24.m)

5. 设野兔的家为原点 $(0,0)$, 兔子与猎狗的初始位置分别为 $(0, -60)$ 和 $(70, 15)$, 猎狗的奔跑速度为 5m/s 。问：野兔的奔跑速度至少为多少时，才能确保不被猎狗抓住？（程序取名为 hw25.m）