第七讲 数值积分与数值微分

目录

7.1 数值积分基本概念

7.2 插值型求积公式

7.3 Newton-Cotes 公式

7.4 复合求积公式

7.5 Gauss 求积公式

7.6 数值微分

7-5 Gauss 求积公式

Gauss quadrature, one of the jewels of numerical analysis, is a beautiful and powerful idea.

— L.N. Trefethen, SIAM Review, 2008.

Gauss 求积

为什么 Gauss 求积

Newton-Cotes 公式选取等距节点, 计算方便, 但不一定是最好的选择.

事实上, 我们可以更好地选取节点, 使得求积公式具有更高的代数精度.

例 7.1 试确定 A_i 和 x_i, 使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

解 将 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 依次代入公式精确成立, 可得 $\begin{cases} A_0 + A_1 = 3 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$

第 4 式减去第 2 式乘 x_0^2 得 $A_1 x_1 (x_1^2 - x_0^2) = 0$. 故 $x_1 = \pm x_0$. 若 $x_1 = x_0$, 则由第 1 式和第 2 式可知 $x_1 = x_0 = 0$, 与第 3 式矛盾. 所以 $x_1 = -x_0 \neq 0$. 于是由第 2 式可知 $A_0 = A_1$, 代入第 1 式可得

$$A_0 = A_1 = 1.$$

代入第 3 式即得 $x_0^2 = \frac{1}{3}$. 假定 $x_0 < x_1$, 则

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

7-5-1 一般 Gauss 求积公式

定义 7.1 设 $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数, 若求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

具有 $2n+1$ 次代数精度, 则称该公式为 **Gauss 求积公式**, 节点 x_i 称为 **Gauss 点**, A_i 称为 **Gauss 系数**.

✍ 注意: 求积公式的右端只包含 $f(x)$ 的函数值, 与权函数无关.

Gauss 求积公式的存在性

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

将 $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$ 代入, 令求积公式精确成立, 解出 A_i 和 x_i. 这样就可以使得求积公式至少具有 $2n+1$ 次代数精度, 所以, Gauss 求积公式一般总是存在的.

✍ 事实上, 上述求积公式的代数精度不可能超过 $2n+1$.

取 $2n+2$ 次多项式 $f(x) = (x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$, 则 $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = 0$, 但

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x > 0,$$

即求积公式对 $2n+2$ 次多项式不精确成立, 所以代数精度 $< 2n+2$.

Gauss 求积公式具有最高代数精度

定理 7.1 Gauss 求积公式是具有最高代数精度的插值型求积公式.

Gauss 求积公式具有最高代数精度

定理 7.1 Gauss 求积公式是具有最高代数精度的插值型求积公式.

如何构造 Gauss 求积公式

方法一:

将 $f(x)=1,x,x^2,\dots,x^{2n+1}$ 代入, 解出 A_i 和 x_i. 但需要解一个非线性方程组, 通常非常困难，而且不一定能解出来.

可行方法:

将 x_i 和 A_i 分开计算, 即先通过特殊的方法求出 Gauss 点 x_i, 然后再用待定系数法解出 A_i. 这也是目前构造 Gauss 公式的通用方法.

Gauss 点的计算

定理 7.2 考虑插值型求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$, 求积节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 是 Gauss 点的充要条件是

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

与所有次数不超过 n 的多项式正交, 即

$$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)p(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\ p(x) \in \mathbb{H}_n.$$

计算 Gauss 点的一般方法

(1) 设 $\omega_{n+1}(x) = x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$;

(2) 利用 $\omega_{n+1}(x)$ 与 $p(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^n$ 正交 (带权) 的性质, 得到 $n+1$ 个线性方程, 解出 $a_k, k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

(3) 求出多项式 $\omega_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点, 这就是 Gauss 点.

Gauss 求积公式的余项

Gauss 求积公式的余项为

$$\boxed{R_n[f] = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}^2(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Gauss 公式的收敛性

定理 7.3 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则 Gauss 求积公式是收敛的, 即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b \rho(x) f(x) \, \mathrm{d}x,$$

其中 x_i 是 Gauss 节点, A_i 是 Gauss 系数.

Gauss 公式的稳定性

定理 7.4 Gauss 求积公式中的系数 A_i 全是正数, 因此 Gauss 求积公式是稳定的.

注记

- 除了以上方法外, 我们还可以根据正交多项式的性质构造简单易用的 Gauss 求积公式, 如 Gauss-Legendre 公式, Gauss-Chebyshev 公式等.
- 另外, 在实际应用中通常是使用 **复合 Gauss 求积公式**.

谢谢

THANK YOU