第七讲 数值积分与数值微分

目录

https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/SC

潘建瑜 @MATH.ECNU

7-3 Newton-Cotes 公式

7.3 Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式: 等距节点

定义 7.1 如果插值型求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx I_n(f) \triangleq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 中的节点为等距节点, 即

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

则该求积公式就称为 **Newton-Cotes 公式**, 记为

$$I_n(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k),$$

其中 $C_k^{(n)}$ 称为 **Cotes 系数**, 其值为

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{t-i}{k-i}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{i=0,i\neq k}(t-i)\,\mathrm{d}t.$$

Cotes 系数的两个简单性质

(1) $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1;$

(2) $C_k^{(n)} = C_{n-k}^{(n)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$

7-3-1 常用的低次 Newton-Cotes 公式

- 当 $n = 1$ 时, 可得 $C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$, 此时的 Newton-Cotes 公式为

$$\boxed{I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)}$$

这就是**梯形公式**, 通常记作为 $T(f)$.

7-3-1 常用的低次 Newton-Cotes 公式

- 当 $n=1$ 时, 可得 $C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$, 此时的 Newton-Cotes 公式为

$$\boxed{I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}$$

这就是**梯形公式**, 通常记作为 $T(f)$.

- 当 $n=2$ 时, 可得 $C_0^{(2)} = \frac{1}{6}$, $C_1^{(2)} = \frac{4}{6}$, $C_2^{(2)} = \frac{1}{6}$, 此时的 Newton-Cotes 公式为

$$\boxed{I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)}$$

这就是**抛物线公式**或 **Simpson 公式**, 通常记作为 $S(f)$.

7-3-2 N-C 公式的代数精度与余项

代数精度

当 n 是奇数时, Newton-Cotes 公式至少具有 n 次代数精度.

当 n 是偶数时, Newton-Cotes 公式至少具有 $n+1$ 次代数精度.

梯形公式的余项

梯形公式的余项

设 $f(x) \in C^2[a,b]$, 则 梯形求积公式 的余项为

$$R[f] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in (a,b),$$

所以, 带余项的梯形公式可写为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in (a,b).$$

Simpson 公式的余项

Simpson 公式的余项

设 $f(x) \in C^4[a,b]$, 则 **Simpson 求积公式** 的余项为

$$R[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b),$$

所以, 带余项的 Simpson 公式可写为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b).$$

7-4 复合求积公式

7.4 复合求积公式

复合求积公式基本思想

将积分区间分割成若干小区间, 在每个小区间使用低次求积公式, 也称复化求积公式.

- 为简单起见, 通常等分积分区间.
- 两类常用的复合求积公式: 复合梯形公式和复合 Simpson 公式.

7-4-1 复合梯形公式

- 区间划分: 将 $[a,b]$ 划分为 n 等份, 即取节点

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- 计算积分近似: 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上采用梯形公式, 可得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}\big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

这就是**复合梯形公式** (Composite Trapezoidal rule), 通常记为 T_n, 即

$$\boxed{T_n = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right).}$$

收敛性分析

设 $f(x) \in C^2[a,b]$, 则在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的余项为 $-\dfrac{h^3}{12}f''(\eta_k)$, 所以整体余项为

$$R_n[f] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k).$$

由于 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) \le \max_{a\le x\le b} f''(x),$$

由介值定理可知, 存在 $\eta \in (a,b)$, 使得 $f''(\eta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)$. 故

$$R_n[f] = -\frac{nh^3}{12}f''(\eta) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) \ \to \mathbf{0}\ (n\to\infty)$$

因此 复合梯形公式是收敛的.

7-4-2 | 复合 Simpson 公式

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\Big) \\
&= \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})\right) \triangleq \boldsymbol{S_n}.
\end{aligned}
$$

收敛性: 设 $f(x)\in C^4[a,b]$, 则复合 Simpson 公式的余项为

$$
R_n[f]=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta).
$$

因此 **复合 Simpson 公式是收敛的**.

稳定性: 复合梯形公式和复合 Simpson 公式都是稳定的.

例 7.1 已知 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的取值如下表, 试分别用复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 并估计误差. (`Quad_Trap_Simpson.m`)

x	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
$f(x)$	1.0000	0.9974	0.9896	0.9767	0.9589	0.9362	0.9089	0.8772	0.8415

谢谢

THANK YOU