第七讲 数值积分与数值微分

目录

https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/SC

为什么数值积分

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- 在很多情况下, 被积函数的原函数很难求出 (或很复杂), 如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^6}$ 的原函数为

$$F(x)=\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

- 原函数无法用初等函数表示, 如

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2},\quad f(x)=\sqrt{1+k^2\sin^2 x}.$$

- 在某些实际应用中, 被积函数 $f(x)$ 的表达式是未知的, 只给出了某些离散点上的值.

在这些情况下, 我们如何计算定积分 (近似值)?

什么是数值积分

数值积分

数值积分就是研究如何用函数值 (有时也会用到导数值) 的线性组合来近似定积分.

数值积分主要研究的问题

数值积分主要考虑以下问题:

(1) 求积公式的构造;

(2) 精确程度的衡量;

(3) 余项估计/误差估计.

7-1 数值积分基本概念

8.1 数值积分基本概念

7-1-1 机械求积公式

设 $f(x) \in C[a,b]$, 取节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, 根据定积分的定义, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n} h_i f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],\ h_i = x_{i+1} - x_i,\ h = \max_i\{h_i\}.$$

当 h 充分小, n 充分大时, 我们就有下面的近似公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} h_i f(\xi_i).$$

机械求积公式

为了方便起见, 我们将上述公式改写为 (将记号 h_i 和 ξ_i 更换为 A_i 和 x_i)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \triangleq I_n(f)$$

这里 x_i 称为 **求积节点**, 满足 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, 系数 A_i 称为 **求积系数**, 与函数 $f(x)$ 无关. 该求积公式就称为 **机械求积公式**.

✍ 机械求积公式只包含函数值, 但求积公式并不局限于机械求积公式, 有些求积公式可能会包含其它信息, 如导数值等.

例 7.1 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

- 如果用左端点的函数值 $f(a)$ 来近似 $f(\xi)$, 则可得**左矩形公式**:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(a)(b-a);$$

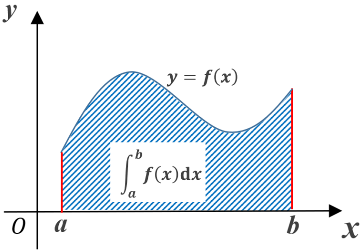
- 如果用右端点的函数值 $f(b)$ 来近似 $f(\xi)$, 则可得**右矩形公式**:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(b)(b-a);$$

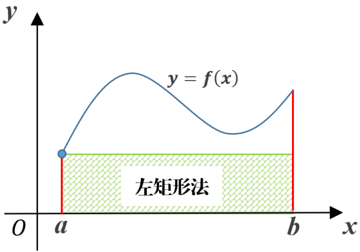
- 如果用中点的函数值来近似 $f(\xi)$, 则可得**中矩形公式**:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

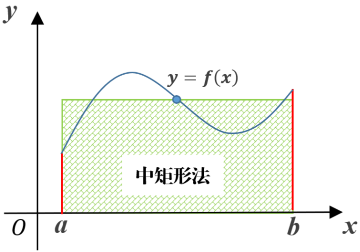
这类公式称为**矩形公式**, 其几何意义就是用矩形的面积来近似曲边梯形的面积.



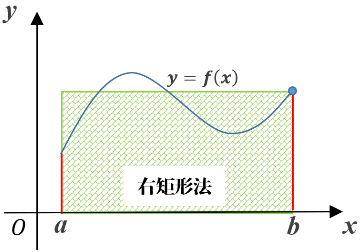
y
$y = f(x)$
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
O
a
b
x



y
$y = f(x)$
左矩形法
O
a
b
x



y
$y = f(x)$
中矩形法
O
a
b
x



y
$y = f(x)$
右矩形法
O
a
b
x

7-1-2 代数精度

如何衡量一个求积公式的好坏?

如果能对次数较高的多项式精确成立, 那么我们就认为该求积公式具有较高的精度.

定义 7.1 如果一个求积公式对所有次数不超过 m 的多项式精度成立, 但对 $m+1$ 次多项式不精确成立, 则称该求积公式具有 m **次代数精度**.

代数精度的计算方法

依次将 $f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^m, \ldots$ 代入求积公式, 直到等式不精确成立为止.

例 7.2 试确定系数 A_i, 使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度, 并计算代数精度.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1).$$

证明概要. 分别取 $f(x) = 1, x, x^2$, 令求积公式精确成立, 可得 $\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = b - a \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

求得 $A_0 = \frac{1}{3}, A_1 = \frac{4}{3}, A_2 = \frac{1}{3}$. 因此求积公式为 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$.

将 $f(x) = x^3$ 代入, 公式左边 $= 0 =$ 右边.

将 $f(x) = x^4$ 代入, 公式左边为 $\frac{2}{5}$, 右边为 $\frac{2}{3}$. 因此该求积公式的代数精度为 3.

✍ 公式中含有 $n+1$ 个参数, 因此可以选取合适的 A_i, 使得公式至少具有 n 次代数精度

机械求积公式基本性质

引理 7.1 设机械求积公式的代数精度 ≥ 0, 则有

$$A_0 + A_1 + \cdots A_n = b - a. \tag{7.1}$$

(板书, 将 $f(x) = 1$ 代入求积公式, 令等式精确成立即可)

✍ 上面的结论是机械求积公式的一个基本性质.

7-1-3 收敛性与稳定性

定义 7.2 记求积公式的余项为 $R[f]$, 若

$$\lim_{h\to 0} R[f] = 0,$$

则称求积公式是收敛的, 其中 $h = \max\limits_{0\le i\le n-1}\{x_{i+1} - x_i\}$.

✍ 由定义可以, 求积公式的收敛性与定积分的存在性是类似的, 即当分割足够细 (即模趋于 0) 时极限存在, 该极限就是定积分.

机械求积公式的稳定性

为什么要考虑稳定性

在利用机械求积公式计算定积分时, 需要计算函数值. 由于存在舍入误差, 因此最后的结果也会带有误差. 求积公式的稳定性就是考虑这些舍入误差对计算结果的影响.

定义 7.3 考虑机械求积公式, 设 $\tilde{f}_k$ 是计算 $f(x_k)$ 时得到的近似值, 如果对任给的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $|f(x_k) - \tilde{f}_k| < \delta$ 对 $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ 都成立时, 有

$$\left| \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k \tilde{f}_k \right| < \varepsilon,$$

则称该机械求积公式是 **稳定的**.

稳定性判别方法

定理 7.2 对于具有 0 次及以上代数精度的机械求积公式，如果求积系数 A_i 都是正数，则求积公式是稳定的.

7-2 插值型求积公式

构造求积公式的一个常用方法就是使用插值多项式.

设 $L_n(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 的 n 次插值多项式, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x\right) f(x_k) \triangleq \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).\end{aligned}$$

这就是**插值型求积公式**, 其中 $l_k(x)$ 是 n 次 Lagrange 基函数, $A_k = \displaystyle\int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x$.

余项/误差

由多项式插值余项公式可知, 插值型求积公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b \big(f(x) - L_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

✍ 由于 ξ_x 与 x 有关, 上面的误差值是无法得到的, 因此通常用下面的方法来估计误差

$$\big|\,R[f]\,\big| = \left|\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |\omega_{n+1}(x)|\,\mathrm{d}x,$$

其中 $M_{n+1} = \max\limits_{a\le x\le b} |f^{(n+1)}(x)|$.

插值型求积公式的代数精度

引理 7.3 插值型求积公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 至少具有 n 次代数精度.

(板书, 依次将 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^n$ 代入, 可得 $f^{(n+1)}(\xi_x) = 0$)

插值型求积公式的代数精度

事实上，我们有下面的性质.

定理 7.4 机械求积公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 至少具有 n 次代数精度的充要条件是该公式是插值型的.

✍ 由该定理可知，当机械求积公式具有尽可能高的代数精度时，它总是插值型的.

谢谢

THANK YOU