第五讲 线性最小二乘问题

最小二乘问题的求解与应用举例

目录

5-5 最小二乘问题的求解方法

5.5 最小二乘问题的求解方法

5-5-1 正规方程

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2$$

定理 5.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$, 则 $x_* \in \mathbb{R}^n$ 是线性最小二乘问题的解当且仅当残量 $r = b - Ax_*$ 与 $\mathrm{Ran}(A)$ (值域) 正交, 即 x_* 是下面的**正规方程** (或**法方程**) 的解

$$A^{\mathsf{T}}(b-Ax) = 0 \quad \text{或} \quad A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b. \tag{5.1}$$

(板书)

证明概要. 充分性: 设 x_* 是正规方程的解. 对任意向量 $y \in \mathbb{R}^n$, 由 $(b - Ax_*) \perp \mathrm{Ran}(A)$ 可知

$$\begin{aligned}\|Ay - b\|_2^2 &= \|(Ax_* - b) + A(y - x_*)\|_2^2 \\ &= \|Ax_* - b\|_2^2 + \|A(y - x_*)\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_* - b\|_2^2.\end{aligned}$$

因此, x_* 是线性最小二乘问题的解.

必要性: 设 x_* 是线性最小二乘问题的解. 用反证法, 假定 $z \triangleq A^\mathsf{T}(b - Ax_*) \neq 0$. 取 $y = x_* + \alpha z$, 其中 $\alpha > 0$, 则有

$$\|Ay - b\|_2^2 = \|Ax_* - b + \alpha Az\|_2^2 = \|Ax_* - b\|_2^2 - 2\alpha\|z\|_2^2 + \alpha^2\|Az\|_2^2.$$

由于 $\|z\|_2 > 0$, 当 α 充分小时, 有 $2\|z\|_2^2 > \alpha\|Az\|_2^2$, 即上式右端小于 $\|Ax_* - b\|_2^2$. 这与 x_* 是最小二乘解相矛盾. 所以 $z = 0$, 即 $A^\mathsf{T}(b - Ax_*) = 0$.

解的存在性与唯一性

由于

$$A^\intercal b \in \mathrm{Ran}(A^\intercal) = \mathrm{Ran}(A^\intercal A),$$

因此正规方程 $A^\intercal Ax = A^\intercal b$ 是相容 (consistent) 的, 即 **最小二乘解总是存在的**.

解的存在性与唯一性

由于

$$A^{\mathsf{T}}b \in \mathrm{Ran}(A^{\mathsf{T}}) = \mathrm{Ran}(A^{\mathsf{T}}A),$$

因此正规方程 $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$ 是相容 (consistent) 的, 即 **最小二乘解总是存在的**.

定理 5.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$, 则 $A^{\mathsf{T}}A$ 对称正定当且仅当 A 是列满秩的, 即 $\mathrm{rank}(A) = n$. 此时, 线性最小二乘问题的解是唯一的, 其表达式为

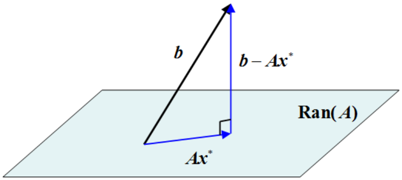
$$x_* = (A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}b.$$

最小二乘解的几何含义

根据最小二乘问题与正规方程的关系, 我们可以把 b 写成

$$b = Ax_* + r, \quad \text{其中} \quad r \perp \mathrm{Ran}(A).$$

所以 Ax_* 就是 b 在 $\mathrm{Ran}(A)$ 上的正交投影, 见右图.



需要指出的是, 最小二乘解可能并不唯一, 但上述分解是唯一的.

5-5-2 Cholesky 分解法

当 A 列满秩时, 我们就可以使用 Cholesky 分解来求解正规方程.

5-5-2 Cholesky 分解法

当 A 列满秩时, 我们就可以使用 Cholesky 分解来求解正规方程.

计算复杂度

- 计算 $A^\mathsf{T}A$: $\rightarrow$ mn^2 只需计算下三角或上三角部分
- 计算 Cholesky 分解: $\rightarrow$ $\dfrac{1}{3}n^3$
- 回代求解: $\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$

总的运算量大约为 $mn^2 + \dfrac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Cholesky 分解求解正规方程的优缺点

- 优点: 运算量最小, 简单直观.
- 缺点: $A^{\intercal}A$ 的条件数是 A 的平方, 对于病态问题, 不建议使用.

Cholesky 分解求解正规方程的优缺点

- 优点: 运算量最小, 简单直观.
- 缺点: $A^\mathsf{T}A$ 的条件数是 A 的平方, 对于病态问题, 不建议使用.

例 5.2 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon \end{bmatrix}$, 则 $A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon^2 \end{bmatrix}$.

记 ε_u 为机器精度, 则当 $\varepsilon_u < \varepsilon < \sqrt{\varepsilon_u}$ 时有 $\varepsilon^2 < \varepsilon_u$, 由于舍入误差的原因, 通过浮点运算计算得到的 $A^\mathsf{T}A$ 是奇异的. 但我们注意到 A 是满秩的.

5-5-3 QR 分解法

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ 是满秩的, 其 QR 分解为 $A = QR$, 则

$$x_* = (A^\intercal A)^{-1}A^\intercal b = (R^\intercal Q^\intercal QR)^{-1}R^\intercal Q^\intercal b = (R^\intercal R)^{-1}R^\intercal Q^\intercal b = \boxed{R^{-1}Q^\intercal b}$$

5-5-3 QR 分解法

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ 是满秩的, 其 QR 分解为 $A = QR$, 则

$$x_* = (A^\intercal A)^{-1}A^\intercal b = (R^\intercal Q^\intercal QR)^{-1}R^\intercal Q^\intercal b = (R^\intercal R)^{-1}R^\intercal Q^\intercal b = \boxed{R^{-1}Q^\intercal b}$$

- ✍ QR 分解法的运算量大约为 $2mn^2$. 当 $m \gg n$ 时, 大约为 Cholesky 分解法的两倍.
- ✍ QR 分解法比较稳定, 是当前求解最小二乘问题的 **首选方法**, 特别是当 A 条件数较大 (病态) 时.

5-5-4 奇异值分解法

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 列满秩, $A = U_n \Sigma V^\top$ 是 A 的降阶奇异值分解, 则

$$
\begin{aligned}
x_* = (A^\top A)^{-1} A^\top b &= \left(V\Sigma U_n^\top U_n \Sigma V^\top\right)^{-1} V\Sigma U_n^\top b \\
&= (V\Sigma^{-2} V^\top) V\Sigma U_n^\top b \\
&= V\Sigma^{-1} U_n^\top b.
\end{aligned}
$$

关于 SVD 法的几点说明

- 相比于 Cholesky 分解法和 QR 分解法, SVD 法具有更高的健壮性
- 计算 SVD 的运算量 远超 Cholesky 分解法和 QR 分解法
- 只有当系数矩阵秩亏或者接近秩亏时才使用 (此时 QR 分解法可能会失效)

例 5.3 分别用三种方法求解最小二乘问题, 比较运算时间. (LS_3methods.m)

三种方法的运算时间如下 ($A \in \mathbb{R}^{2n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$, 以秒为单位):

n	正规方程法	QR 分解法	奇异值分解法
2000	0.0870	0.2070	1.4840
2500	0.1910	0.4430	3.1160
3000	0.2500	0.6950	5.9600
3500	0.4640	1.2130	10.0500
4000	0.4940	1.5700	14.8750
4500	0.6690	2.1680	20.6410
5000	1.0720	2.9350	28.6360

✍ 这里结果可能受计算机硬件和代码优化影响, 并不一定能准确反映各种方法的实际运算效率.

5-6 数据拟合

5.6 数据拟合

数据拟合

数据拟合

数据拟合, 也称 **曲线拟合**, 是指选择适当的曲线来拟合通过观测或实验所获得的数据.

为什么数据拟合

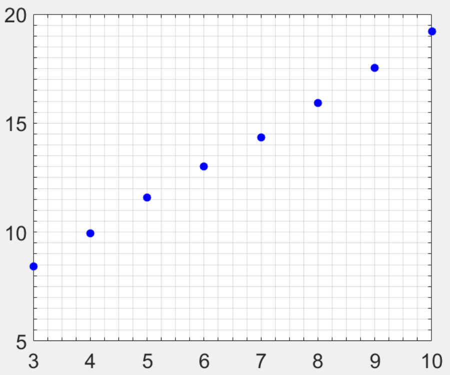
科学和工程中遇到的很多问题, 往往只能通过诸如采样、实验等方法获得若干离散的数据. 根据这些数据, 如果能够找到一个连续的函数（即曲线）或者更加密集的离散方程, 使得实验数据与方程的曲线能够在最大程度上近似吻合, 就可以根据曲线方程对数据进行理论分析和数值预测, 对某些不具备测量条件的位置的结果进行估算.

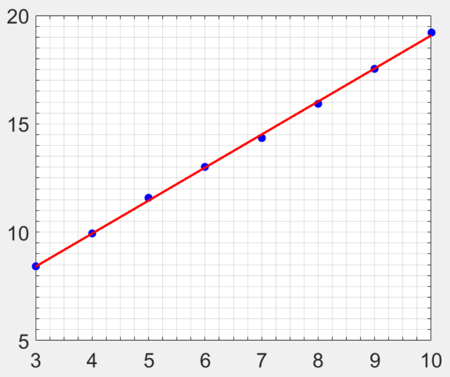
数据拟合举例

例 5.4 回想一下中学物理课的“速度与加速度”实验：假设某物体正在做加速运动，加速度未知，实验人员从时间 $t_0 = 3$ 秒时刻开始，每隔 1 秒时间对这个物体进行测速，得到一组速度和时间的离散数据（见下表）。请根据实验数据推算该物体的加速度。

时间 t (秒)	3	4	5	6	7	8	9	10
速度 v (米/秒)	8.41	9.94	11.58	13.02	14.33	15.92	17.54	19.22

实验法: 在坐标纸中画出这些点, 如下图 (左图) 所示.





可以看出, 测量结果呈现典型的线性特征. 沿着该线性特征画一条直线, 使尽量多的测量点能够位于直线上, 或者与直线的偏差尽量小, 见上图 (右图). 这条直线就是我们根据测量结果拟合的速度与时间的函数关系. 最后测量出直线的斜率 k, 它就是被测物体的加速度. 经过测量, 我们实验测到的物体加速度值约为 1.52 米/秒 ^{2}.

数学方法: 设加速度为 a (米/秒 ^{2}), 则速度 v 与时间 t 之间的关系式为

$$v = v_0 + a(t - t_0).$$

其中 $v_0 = 8.41, t_0 = 3$. 将实验数据 (t_i, v_i) 依次代入可得

$$\begin{cases} 9.94 = 8.41 + a \\ 11.58 = 8.41 + 2a \\ 13.02 = 8.41 + 3a \\ 14.33 = 8.41 + 4a \\ 15.92 = 8.41 + 5a \\ 17.54 = 8.41 + 6a \\ 19.22 = 8.41 + 7a \end{cases}$$

显然, 这个方程组是无解的.

事实上, 由于实验存在误差, 上面的每个方程并不需要严格成立, 因此我们只需要求偏差尽可能地小即可. 也就是说, 使得偏差平方和尽可能地小, 即转化为下面的最小化问题

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{7} \left| v_i - v_0 - a(t_i - t_0) \right|^2.$$

这是一个最小二乘问题, 这就是 **数据拟合的最小二乘法**.

数据拟合

数据拟合: 数学描述

如果只知道函数在部分点上的值 (即数据), 且这些数据带有一定的误差, 需要在函数类 Φ 中寻找一个函数 $p(x)$, 使其在某种度量下是这些数据的 **最佳逼近**, 这就是 **数据拟合**, 也称为 **曲线拟合**.

数据拟合

数据拟合: 数学描述

如果只知道函数在部分点上的值 (即数据), 且这些数据带有一定的误差, 需要在函数类 Φ 中寻找一个函数 $p(x)$, 使其在某种度量下是这些数据的 **最佳逼近**, 这就是 **数据拟合**, 也称为 **曲线拟合**.

怎么做数据拟合?

5-6-1 最小二乘与法方程

给定数据

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{m-1}	x_m
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{m-1}	y_m

在函数族 $\Phi \triangleq \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ 中寻找函数 $S^*(x)$, 使得它与这组数据的偏差平方和最小, 即

$$\sum_{i=0}^{m} |S^*(x_i) - y_i|^2 = \min_{S(x)\in\Phi} \sum_{i=0}^{m} |S(x_i) - y_i|^2. \tag{5.2}$$

这里的 n 通常远远小于 m, 即 $n \ll m$. 因此, 曲线拟合问题就转化为求解一个最小二乘问题, 这就是 **数据拟合的最小二乘法**.

其他拟合方法

✍ 在进行数据拟合时, 也可以使用其他标准 (拟合方法), 如 **极小化偏差的最大值**, 即

$$\max_{0\le i\le m} |S^*(x_i)-y_i| = \min_{S(x)\in\Phi}\max_{0\le i\le m} |S(x_i)-y_i|.$$

但上述极小化问题求解很复杂.

✍ 另一种拟合方法是 **极小化偏差之和**, 即

$$\sum_{i=0}^{m} |S^*(x_i)-y_i| = \min_{S(x)\in\Phi}\sum_{i=0}^{m} |S(x_i)-y_i|.$$

但由于目标函数不可导, 求解也很困难.

数据拟合最小二乘问题求解

对任意 $S(x) \in \Phi = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$, 可设

$$S(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

数据拟合最小二乘问题求解

对任意 $S(x) \in \Phi = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$, 可设

$$S(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

于是原问题就转化为求下面的多元函数的最小值点:

$$I(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \triangleq \sum_{i=0}^{m} |S(x_i) - y_i|^2 = \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(x_i) - y_i \right]^2 .$$

数据拟合最小二乘问题求解

对任意 $S(x) \in \Phi = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$, 可设

$$S(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

于是原问题就转化为求下面的多元函数的最小值点:

$$I(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \triangleq \sum_{i=0}^{m} |S(x_i) - y_i|^2 = \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\varphi_j(x_i) - y_i\right]^2 .$$

由于 $I(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 是正定的, 因此其最小值点就是其驻点. 令偏导数为零, 可得

$$0 = \frac{\partial I(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 2\sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) \left[\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\varphi_j(x_i) - y_i\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

整理后可写为

$$\sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)\right] \alpha_j = \sum_{i=0}^{m} y_i\varphi_k(x_i), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

引入记号

$$(\varphi_j,\varphi_k) \triangleq \sum_{i=0}^{m} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i), \quad (y,\varphi_k) \triangleq \sum_{i=0}^{m} y_i\varphi_k(x_i), \tag{5.3}$$

则上面的方程可简写为

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j,\varphi_k)\alpha_j = (y,\varphi_k), \quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

写成矩阵形式即可得 **法方程**:

$$\boxed{G\alpha = d} \tag{5.4}$$

其中

$$G=\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix}, \quad \alpha=\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad d=\begin{bmatrix} (y,\varphi_0) \\ (y,\varphi_1) \\ \vdots \\ (y,\varphi_n) \end{bmatrix}.$$

将法方程的解记为 $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$, 则最佳平方逼近函数为

$$S^*(x) = \alpha_0^*\varphi_0(x) + \alpha_1^*\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n^*\varphi_n(x).$$

将法方程的解记为 $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$, 则最佳平方逼近函数为

$$S^*(x) = \alpha_0^*\varphi_0(x) + \alpha_1^*\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n^*\varphi_n(x).$$

为了确保法方程的解存在唯一, 我们要求系数矩阵 G 非奇异.

定理 5.3 设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$ 线性无关. 如果 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ 的任意（非零）线性组合在点集 $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ 上至多只有 n 个不同的零点, 则 G 非奇异, 此时法方程 (5.4) 存在唯一解.

上述定理中的条件称为 **Haar 条件**, 显然, 如果取 $\varphi_i(x) = x^i$, 则 Haar 条件成立.

例 5.5 已知数据表如下, 求 $f(x)$ 的最小二乘拟合函数 $S^*(x)$, 并给出拟合误差.

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.102	0.103	0.156	0.167	0.274	0.448	0.562	0.620	0.799	1.00

证明概要. 分两步走: 先确定一组基, 然后求解法方程.

在坐标平面上描出数据点, 根据点的分布情况, 选取基函数

$$\varphi_0(x) = \ln x, \quad \varphi_1(x) = \cos x, \quad \varphi_2(x) = e^x.$$

所以 $n = 2$. 又根据数据表可知 $m = 8$, 直接计算可得

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_0^2(x_i) \approx 6.794, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) \approx -5.347,$$

$$(\varphi_0, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_0(x_i)\varphi_2(x_i) \approx 63.26, \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_1^2(x_i) \approx 5.108,$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) \approx -49.01, \quad (\varphi_2, \varphi_2) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_2^2(x_i) \approx 1003,$$

$$(y, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{m} y_i\varphi_0(x_i) \approx 3.234, \quad (y, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{m} y_i\varphi_1(x_i) \approx -2.489,$$

$$(y, \varphi_2) = \sum_{i=0}^{m} y_i\varphi_2(x_i) \approx 51.77.$$

所以法方程为

$$\begin{bmatrix} 6.794 & -5.347 & 63.26 \\ -5.347 & 5.108 & -49.01 \\ 63.26 & -49.01 & 1003 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.234 \\ -2.489 \\ 51.77 \end{bmatrix}.$$

解得

$$\alpha_0 = 0.00224, \quad \alpha_1 = 0.0172, \quad \alpha_2 = 0.0523.$$

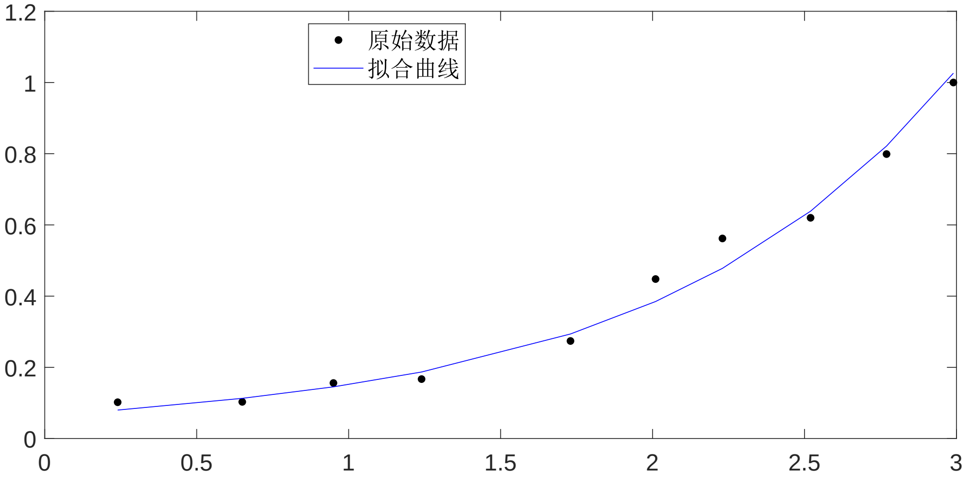
所以最小二乘拟合函数为

$$S^*(x) = 0.00224 \ln x + 0.0172 \cos x + 0.0523 e^x.$$

拟合误差为

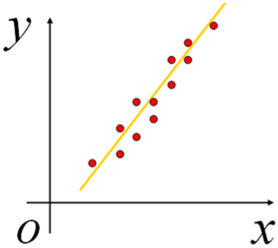
$$\sum_{i=0}^{m} |S^*(x_i) - y_i|^2 \approx 0.0141.$$

(Approxi_Datafit_01.m)

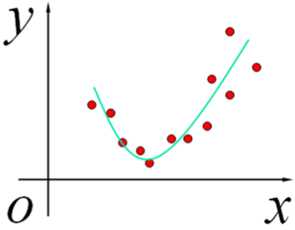


函数空间的选取

✍ 对于数据拟合问题, 如何选择数学模型很重要 (即函数空间 Φ, 也即基函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$), 通常需要根据物理意义或所给数据的分布情况来确定.



$y = ax + b$



$y = ax^2 + bx + c$

5-6-2 多项式数据拟合

在数据拟合时, 如果取 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \ldots, \varphi_n(x)=x^n$, 即 $\Phi=\mathbb{H}_n$, 则法方程为

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i & \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i & \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i^2 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n & \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i y_i \\ \cdots \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n y_i \end{bmatrix}.$$

设解为 $[\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*]^{\mathsf{T}}$, 则

$$S^*(x)=\alpha_0^*+\alpha_1^* x+\cdots+\alpha_n^* x^n$$

即为 $f(x)$ 的 n **次最小二乘拟合多项式**.

例 5.6 已知数据表如下，求 2 次最小二乘拟合多项式.

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

求解概要. 设 2 次最小二乘拟合多项式为 $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. 直接计算得法方程

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.5 & 1.875 \\ 2.5 & 1.875 & 1.5625 \\ 1.875 & 1.5625 & 1.3825 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.7680 \\ 5.4514 \\ 4.4015 \end{bmatrix}.$$

解得

$$\alpha_0 = 1.0052, \quad \alpha_1 = 0.8641, \quad \alpha_2 = 0.8437.$$

所以此组数据的 2 次最小二乘拟合多项式为

$$S_2^*(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2.$$

正交多项式与多项式拟合

✍ 由于当 n 较大时, 直接求解法方程的计算成本较高, 而且系数矩阵是病态的 (与 Hilbert 矩阵类似), 因此该方法不适合计算高次最小二乘拟合多项式, 此时可以借助 **正交多项式** 来进行求解.

5-7 信号恢复与图像处理

5.7 信号恢复与图像处理

5-7-1 信号去噪

在获取数字信号时, 由于各种各样的原因, 最后得到的信号总会带有一定的噪声, 即

$$b = x + \eta,$$

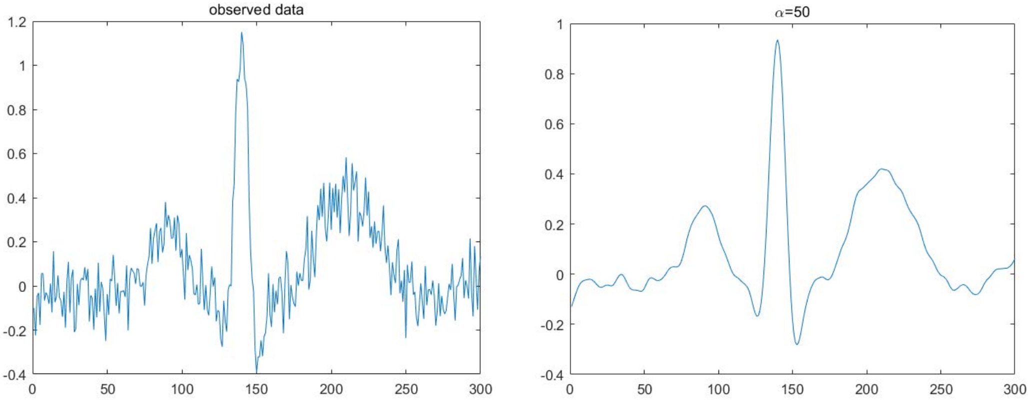
其中 x 是真实的信号, b 是观察到的信号, η 是噪声.

去噪 是数字信号和图像处理中的一个基本问题, 其中一个有效方法就是加权最小二乘法, 即求解

$$\min_{x} \frac{1}{2}\|x - b\|_2^2 + \frac{1}{2}\alpha\|Dx\|_2^2,$$

其中 D 是离散的二阶导算子或 TV 算子等.

例 5.7 数字信号去噪. (LS_denoise.m)



5-7-2 图像恢复

除了带噪声以外, 在获取数字图像时也经常会由于各种原因 (设备仪器, 拍摄环境等) 导致图像模糊. 通常数字图像的获取模型为

$$f = \mathcal{B}(x) + \eta,$$

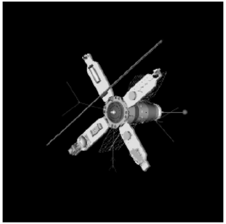
其中 x 是真实图像, f 是观察到的图像, $\mathcal{B}(\cdot)$ 是卷积算子 (代表模糊机制), η 是噪声. 由于问题本身是不适定的, 因此需要进行正则化, 常用模型有 **Tikhonov 正则化** 模型:

$$\min \|\mathcal{B}(x) - f\|_2^2 + \mu^2 \|x\|_2^2$$

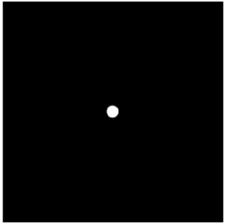
或 **加权正则化** 模型:

$$\min \|\mathcal{B}(x) - f\|_2^2 + \mu^2 \|Dx\|_2^2,$$

其中 D 是广义加权矩阵, 可以是非负对角矩阵或 TV 算子等.



(a) 真实图像



(b) 模糊机制 (out-of-focus)

(a) 获取到的图像 (带有噪声和模糊)

(b) 恢复后的图像 (基于 Tikhonov 正则化模型)

(c) 恢复后的图像 (基于加权正则化模型)

谢谢

THANK YOU