第二讲 非线性方程数值解法

目录

- 2.1 对分法
- 2.2 不动点迭代法
- 2.3 Steffensen 迭代法
- 2.4 Newton 迭代法
- 2.5 割线法与抛物线法

https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/SC

$$\boxed{f(x) = 0}$$

- **线性** or **非线性**

$$f(x) = 0$$

- **线性** or **非线性**
- 非线性方程简单应用一: 液体在管道中的摩擦系数

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{k}\ln\left(\mathrm{Re}\cdot\sqrt{x}\right) + \left(14 - \frac{5.6}{k}\right)$$

$$\boxed{f(x) = 0}$$

- **线性** or **非线性**

- 非线性方程简单应用一: 液体在管道中的摩擦系数

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{k} \ln\left(\mathrm{Re} \cdot \sqrt{x}\right) + \left(14 - \frac{5.6}{k}\right)$$

- 非线性方程简单应用二: 代数方程求解

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0.$$

$$f(x) = 0$$

- **线性** or **非线性**
- 非线性方程简单应用一: 液体在管道中的摩擦系数

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{k}\ln\left(\mathrm{Re}\cdot\sqrt{x}\right) + \left(14 - \frac{5.6}{k}\right)$$

- 非线性方程简单应用二: 代数方程求解

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0.$$

非线性方程的解法

非线性方程 (组) 一般不存在直接解法, 通常需要使用 **迭代法** 来求数值解.

一些基本概念

- **解**, **根**, **零点**:

  所有满足 $f(x_*) = 0$ 的数 x_* 都称为方程的解或根, 也称为 $f(x)$ 的零点.

- 解的 **重数**:

  若 $f(x) = (x - x_*)^m g(x)$ 且 $g(x_*) \neq 0$, 则 x_* 为 $f(x) = 0$ 的 m 重解 (根).

- **有解区间**:

  若 $[a, b]$ 内至少存在 $f(x) = 0$ 的一个实数解, 则称 $[a, b]$ 为有解区间.

一些基本概念

- **解**, **根**, **零点**:

  所有满足 $f(x_*) = 0$ 的数 x_* 都称为方程的解或根, 也称为 $f(x)$ 的零点.

- 解的 **重数**:

  若 $f(x) = (x - x_*)^m g(x)$ 且 $g(x_*) \neq 0$, 则 x_* 为 $f(x) = 0$ 的 m 重解 (根).

- **有解区间**:

  若 $[a, b]$ 内至少存在 $f(x) = 0$ 的一个实数解, 则称 $[a, b]$ 为有解区间.

我们研究内容就是在 **有解** 的前提下求出方程 $f(x) = 0$ 的 **近似解**.

一些基本概念

- **解**, **根**, **零点**:

  所有满足 $f(x_*)=0$ 的数 x_* 都称为方程的解或根, 也称为 $f(x)$ 的零点.

- 解的 **重数**:

  若 $f(x)=(x-x_*)^m g(x)$ 且 $g(x_*)\neq 0$, 则 x_* 为 $f(x)=0$ 的 m 重解 (根).

- **有解区间**:

  若 $[a,b]$ 内至少存在 $f(x)=0$ 的一个实数解, 则称 $[a,b]$ 为有解区间.

我们研究内容就是在 **有解** 的前提下求出方程 $f(x)=0$ 的 **近似解**.

✍ 若无特别说明, 本讲我们只考虑实数解, 并假定 $f(x)$ 的表达式中也只包含实数

✍ 非线性方程可能存在多个或无穷多个解, 因此要强调 **求解区域**

2-1 对分法

2.1 对分法

2.1.1　对分法基本思想

2.1.2　对分法的收敛性

2-1-1 对分法基本思想

对分法 (Bisection)

设 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 内至少有一个实数解.

- **对分法的基本思想**: 将这个有解区间进行对分, 并找出解所在的小区间, 记为新的有解区间, 然后再对这个小区间进行对分.
- 依次类推, 直到有解区间的长度足够小为止, 此时有解区间内的任意一点都可以作为 $f(x) = 0$ 的近似解 (实际计算中可以取中点).

2-1-1 对分法基本思想

对分法 (Bisection)

设 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内至少有一个实数解.

- **对分法的基本思想**: 将这个有解区间进行对分, 并找出解所在的小区间, 记为新的有解区间, 然后再对这个小区间进行对分.
- 依次类推, 直到有解区间的长度足够小为止, 此时有解区间内的任意一点都可以作为 $f(x)=0$ 的近似解 (实际计算中可以取中点).

对分法的数学原理: 介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

算法描述

算法 对分法

1: 给定函数 $f(x)$ 和求解区间 $[a,b]$, 以及精度要求 tol > 0

2: 令 $a_1 = a, b_1 = b$

3: 计算 $f(a_1)$ 和 $f(b_1)$,

如果 $|f(a_1)| <$ tol, 则返回数值解 $x = a_1$ 并停止计算;

如果 $|f(b_1)| <$ tol, 则返回数值解 $x = b_1$ 并停止计算;

如果 $f(a_1)f(b_1) > 0$, 则输出算法失败信息并停止计算

4: **for** $k = 1, 2, \ldots,$ **do**

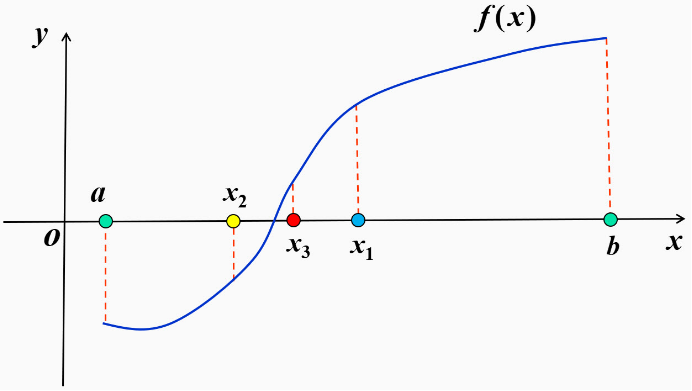
5: 计算 $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ 和 $f(x_k)$

6: 如果 $|f(x_k)| <$ tol 或者 $|b_k - a_k| <$ tol, 则返回数值解 x_k 并停止计算;

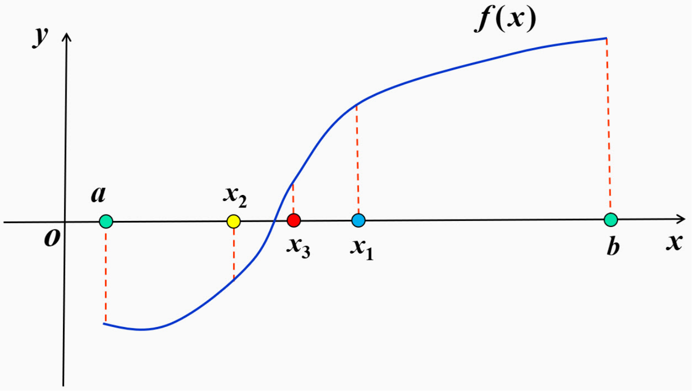
7: 如果 $f(a_k)f(x_k) < 0$, 则令 $a_{k+1} = a_k, b_k = x_k$; 否则令 $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$;

8: **end for**

对分法的几何表示



对分法的几何表示



几点说明

- 这里的采用的停机准则是函数值充分小或者求解区间充分小.
- 用对分法求解时, 可以先画出 $f(x)$ 草图, 以确定一个大致的有解区间.

2-1-2 对分法的收敛性

记第 k 步得到的有解区间为 $[a_k, b_k]$, 中点为 x_k. 则 $a_1 = a, b_1 = b$, 且

$$|x_k - x_*| = \left|\frac{1}{2}(a_k + b_k) - x_*\right| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k).$$

2-1-2 对分法的收敛性

记第 k 步得到的有解区间为 $[a_k, b_k]$, 中点为 x_k. 则 $a_1 = a, b_1 = b$, 且

$$|x_k - x_*| = \left|\frac{1}{2}(a_k + b_k) - x_*\right| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k).$$

由于每次都是对分有解区间, 因此有

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{k-2} - a_{k-2}) = \cdots = \frac{1}{2^{k-1}}(b_1 - a_1).$$

2-1-2 对分法的收敛性

记第 k 步得到的有解区间为 $[a_k, b_k]$, 中点为 x_k. 则 $a_1 = a, b_1 = b$, 且

$$|x_k - x_*| = \left|\frac{1}{2}(a_k + b_k) - x_*\right| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k).$$

由于每次都是对分有解区间, 因此有

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{k-2} - a_{k-2}) = \cdots = \frac{1}{2^{k-1}}(b_1 - a_1).$$

因此

$$|x_k - x_*| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) \le \frac{1}{2^k}(b - a) \quad \to 0 \quad (k \to \infty)$$

定理 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则对分法收敛到 $f(x) = 0$ 的一个解.

关于对分法的几点注记

- 适用范围: 只适合求连续函数的 **单重实根** 或 **奇数重实根**;
- 优点: 简单易用, 只要满足介值定理的条件, 算法总是收敛的;
- 缺点: (1) 收敛速度较慢; (2) 不能求复根和偶数重根; (3) 只能求一个根;

关于对分法的几点注记

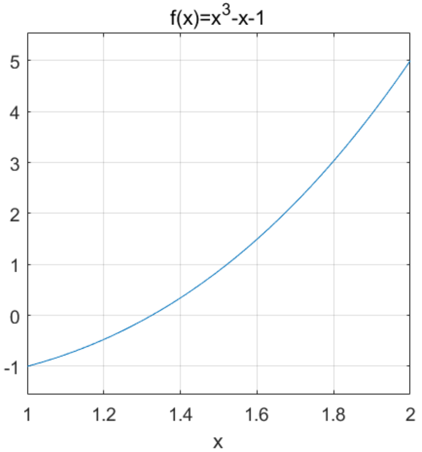
- 适用范围: 只适合求连续函数的 **单重实根** 或 **奇数重实根**;
- 优点: 简单易用, 只要满足介值定理的条件, 算法总是收敛的;
- 缺点: (1) 收敛速度较慢; (2) 不能求复根和偶数重根; (3) 只能求一个根;

一般可先用对分法计算解的一个粗糙估计, 然后用其他方法加速, 如 Newton 法.

例 用对分法求 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $[1,2]$ 内的根. (NLS_bisection.m)

易知 $f(1)=-1<0$, $f(2)=5>0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 内存在零点 (见下图).

k	$a/f(a)$	$b/f(b)$	x	$f(x)$
1	1.0000/-	2.0000/+	1.5000	0.8750
2	1.0000/-	1.5000/+	1.2500	-0.2969
3	1.2500/-	1.5000/+	1.3750	0.2246
4	1.2500/-	1.3750/+	1.3125	-0.0515
5	1.3125/-	1.3750/+	1.3438	0.0826
6	1.3125/-	1.3438/+	1.3281	0.0146
7	1.3125/-	1.3281/+	1.3203	-0.0187
8	1.3203/-	1.3281/+	1.3242	-0.0021
9	1.3242/-	1.3281/+	1.3262	0.0062
10	1.3242/-	1.3262/+	1.3252	0.0020



2-2 不动点迭代法

2.2 不动点迭代法

2.2.1 基本思想

2.2.2 收敛性分析

2.2.3 收敛性阶

2-2-1 基本思想

不动点迭代法

$$\boxed{f(x)=0} \iff \boxed{\varphi(x)-x=0} \quad \text{或} \quad \boxed{x=\varphi(x)}$$

基于该等价方程, 构造出不动点迭代的 **一般迭代格式**:

$$\boxed{x_{k+1}=\varphi(x_k)}, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

其中 x_0 为迭代初始值, 可以任意选取.

这就是 **不动点迭代法** (Fixed-Point iteration), $\varphi(x)$ 称为 **迭代函数**.

不动点迭代法

注记

- x_* 是 $f(x)=0$ 的解当且仅当 $x_*=\varphi(x_*)$, 即 $\varphi(x)$ 的不动点.
- 不动点迭代将 **方程求解** 转化为 **函数求值**, 后者显然要容易很多.

2-2-2 收敛性分析

收敛 or 发散

设 $\varphi(x)$ 连续, 不动点迭代生成的点列为 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$. 如果存在 x_* 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_*,$$

则由连续函数的性质可知

$$x_* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \varphi(x_*).$$

因此 x_* 是 $\varphi(x)$ 的一个不动点, 此时我们称迭代法 **收敛**.

如果点列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 不收敛, 则称不动点迭代是 **发散** 的.

全局收敛性

定理 (不动点迭代的全局收敛性) 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意 $x \in [a,b]$, 都有 $\varphi(x) \in [a,b]$,

(2) 存在常数 L, 满足 $0 < L < 1$, 使得对任意 $x, y \in [a,b]$ 都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y|.$$

则对任意初始值 $x_0 \in [a,b]$, 不动点迭代收敛, 且

$$|x_k - x_*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|,$$

其中 x_* 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内的唯一不动点. (板书)

全局收敛性

定理 (不动点迭代的全局收敛性) 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意 $x \in [a,b]$, 都有 $\varphi(x) \in [a,b]$,

(2) 存在常数 L, 满足 $0 < L < 1$, 使得对任意 $x, y \in [a,b]$ 都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y|.$$

则对任意初始值 $x_0 \in [a,b]$, 不动点迭代收敛, 且

$$|x_k - x_*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|,$$

其中 x_* 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内的唯一不动点. (板书)

✍ 条件 $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y|$ 称为 **Lipschitz 条件**, 当 $L < 1$ 时, 称 $\varphi(x)$ 为 **压缩映射**.

✍ **全局收敛**: 收敛性与迭代初值的选取无关.

一阶连续可导情形

设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则由 Lagrange 中值定理可得

$$\varphi(y)-\varphi(x)=\varphi'(\xi)(y-x),\quad \xi\in(a,b)$$

因此

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|\leq \max_{\xi\in[a,b]}|\varphi'(\xi)|\cdot|y-x|.$$

一阶连续可导情形

设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则由 Lagrange 中值定理可得

$$\varphi(y)-\varphi(x)=\varphi'(\xi)(y-x), \quad \xi\in(a,b)$$

因此

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|\le \max_{\xi\in[a,b]}|\varphi'(\xi)|\cdot|y-x|.$$

推论 设 $\varphi(x)\in C^1[a,b]$ 且对 $\forall\, x\in[a,b]$, 都有 $\varphi(x)\in[a,b]$. 若存在常数 L, 使得

$$|\varphi'(x)|\le L<1, \quad \forall\, x\in[a,b],$$

则对任意初始值 $x_0\in[a,b]$, 不动点迭代收敛, 且

$$|x_k-x_*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|.$$

不动点迭代法举例

例 试构造不动点迭代格式, 计算 $f(x) = x^3 - x - 1$ 在 $[1, 2]$ 中的零点.

(NLS_fixpoint_01.m)

- $\varphi(x) = x^3 - 1$

  (1) $\varphi(x) \in [1, 2]$? $\rightarrow$ **NO**

  (2) $|\varphi'(x)| \leq L < 1$? $\rightarrow$ **NO**

不动点迭代法举例

例 试构造不动点迭代格式, 计算 $f(x)=x^3-x-1$ 在 $[1,2]$ 中的零点.

(NLS_fixpoint_01.m)

- $\varphi(x)=x^3-1$ **无法判断**

  (1) $\varphi(x)\in[1,2]$? $\rightarrow$ **NO**

  (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$? $\rightarrow$ **NO**

不动点迭代法举例

例 试构造不动点迭代格式, 计算 $f(x)=x^3-x-1$ 在 $[1,2]$ 中的零点.

(NLS_fixpoint_01.m)

- $\varphi(x)=x^3-1$ **无法判断**

  (1) $\varphi(x)\in[1,2]?$ $\rightarrow$ **NO**

  (2) $|\varphi'(x)|\le L<1?$ $\rightarrow$ **NO**

- $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1}$

  (1) $1\le\varphi(x)\le 2,\quad \forall\, x\in[1,2]$

  (2) $|\varphi'(x)|=\left|\dfrac{1}{3}(x+1)^{-2/3}\right|\le\frac{1}{3}\sqrt[3]{0.25}<1$

不动点迭代法举例

例 试构造不动点迭代格式, 计算 $f(x) = x^3 - x - 1$ 在 $[1,2]$ 中的零点.

(NLS_fixpoint_01.m)

- $\varphi(x) = x^3 - 1$ **无法判断**

  (1) $\varphi(x) \in [1,2]?$ $\quad \to$ **NO**

  (2) $|\varphi'(x)| \leq L < 1?$ $\quad \to$ **NO**

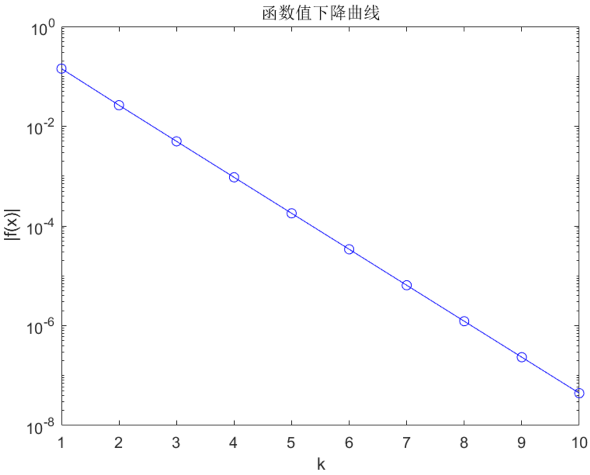
- $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ **全局收敛**

  (1) $1 \leq \varphi(x) \leq 2, \quad \forall\, x \in [1,2]$

  (2) $|\varphi'(x)| = \left| \dfrac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \right| \leq \frac{1}{3}\sqrt[3]{0.25} < 1$

取中点为初始值, 不动点迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \sqrt[3]{x_k + 1}$ 的计算结果:

k	x	$\lvert f(x)\rvert$
1	1.3572	1.43e-01
2	1.3309	2.63e-02
3	1.3259	4.98e-03
4	1.3249	9.44e-04
5	1.3248	1.79e-04
6	1.3247	3.41e-05
7	1.3247	6.47e-06
8	1.3247	1.23e-06
9	1.3247	2.33e-07
10	1.3247	4.43e-08



局部收敛性

定义 设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点, 若存在 x_* 的某个 δ-邻域

$$U_\delta(x_*) \triangleq \{x \in \mathbb{R} : |x - x_*| < \delta\},$$

使得对任意 $x_0 \in U_\delta(x_*)$, 不动点迭代均收敛, 则称该迭代是 **局部收敛** 的.

局部收敛性

定义 设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点, 若存在 x_* 的某个 δ-邻域

$$U_\delta(x_*) \triangleq \{x \in \mathbb{R} : |x - x_*| < \delta\},$$

使得对任意 $x_0 \in U_\delta(x_*)$, 不动点迭代均收敛, 则称该迭代是 **局部收敛** 的.

全局收敛与局部收敛

- 局部收敛意味着只有当初值离真解足够近时, 才能保证收敛. 由于真解是不知道的, 因此如果只具有局部收敛性, 则 **初值选取要求较高**, 很有可能无法保证收敛. 这也是局部收敛与全局收敛的最大区别.
- 实际计算中可以用具有全局收敛性的方法 (比如对分法) 获取一个近似解, 然后再进行迭代.

局部收敛性

定理 设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi'(x)$ 在 x_* 的某个邻域内连续且

$$|\varphi'(x_*)| < 1,$$

则不动点迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ **局部收敛**.

(板书)

2-2-3 收敛阶

收敛阶是衡量迭代法收敛速度快慢的一个重要指标.

定义 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到不动点 x_*. 记 $e_k \triangleq x_k - x_*$, 若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c,$$

其中 $p \geq 1$, 常数 c 与 k 无关, 则称该迭代是 p **阶收敛** 的.

2-2-3 收敛阶

收敛阶是衡量迭代法收敛速度快慢的一个重要指标.

定义 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到不动点 x_*. 记 $e_k \triangleq x_k - x_*$, 若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c,$$

其中 $p \geq 1$, 常数 c 与 k 无关, 则称该迭代是 **p 阶收敛** 的.

(1) 若 $p = 1$ 且 $0 < c < 1$, 则称 **线性收敛**;

(2) 若 $p = 2$, 则称 **二次收敛** 或 **平方收敛**;

(3) 若 $1 < p < 2$ 或 $p = 1$ 且 $c = 0$, 则称 **超线性收敛**.

线性收敛

定理 设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点, 若 $\varphi'(x)$ 在 x_* 的某个邻域内连续且

$$|\varphi'(x_*)| < 1,$$

则不动点迭代至少 **局部线性收敛**.

p 阶收敛

定理 设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点且 $p \geq 2$ 是正整数. 若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x_* 的某个邻域内连续且

$$\varphi'(x_*) = \varphi''(x_*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x_*) = 0, \quad \varphi^{(p)}(x_*) \neq 0, \tag{2.1}$$

则不动点迭代是 **p 阶局部收敛**的, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_*}{(x_k - x_*)^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x_*)}{p!}.$$

例 试构造不同的不动点迭代格式，计算 $f(x) = x^2 - 3$ 的正的零点 $x_* = \sqrt{3}$.

(1) 构造 $\varphi(x) = x^2 - 3 + x$, 则 $\varphi'(x_*) = 2\sqrt{3} + 1 > 1$, 无法判断其收敛性，所以该迭代函数不能用.

(2) 构造 $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2 - 3}{4}$, 则 $\varphi'(x_*) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134 < 1$, 所以该迭代函数可以采用，且一阶局部收敛.

(3) 构造 $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$, 则 $\varphi'(x_*) = 0$, $\varphi''(x_*) = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$, 所以该迭代函数可以采用，且二阶局部收敛.

(`NLS_fixpoint_02.m`)

几点说明

- 一般来说, $|\varphi'(x_*)|$ 越小, 不动点迭代收敛越快!
- 在前面的介绍的迭代法中, 计算 x_{k+1} 时, 只用到点 x_k 的值. 有时, 我们为了利用前面多个点的信息, 比如前 $\ell \geq 2$ 个点, 可以设计下面的迭代法:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, x_{k-1}, ..., x_{k-\ell+1}), \quad k = \ell - 1, \ell, \ell + 1, \ldots. \tag{2.2}$$

我们称之为 **多点迭代法**. 比如后面会提到的割线法和抛物线法, 都是多点迭代.

显然, 多点迭代法一开始需要给定 ℓ 个初始值, 即 $x_0, x_1, \ldots, x_{\ell-1}$.

2-3 Steffensen 迭代法

2.3 Steffensen 迭代法

2.3.1 Aitken 加速技巧

2.3.2 Steffensen 迭代格式

2-3-1 Aitken 加速技巧

迭代两次: $x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad x_{k+2} = \varphi(x_{k+1})$, 可得

$$x_{k+1} - x_* = \varphi(x_k) - \varphi(x_*) = \varphi'(\xi_1)(x_k - x_*),$$

$$x_{k+2} - x_* = \varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_*) = \varphi'(\xi_2)(x_{k+1} - x_*).$$

2-3-1 Aitken 加速技巧

迭代两次: $x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad x_{k+2}=\varphi(x_{k+1})$, 可得

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}-x_* &= \varphi(x_k)-\varphi(x_*)=\varphi'(\xi_1)(x_k-x_*),\\
x_{k+2}-x_* &= \varphi(x_{k+1})-\varphi(x_*)=\varphi'(\xi_2)(x_{k+1}-x_*).
\end{aligned}
$$

假定迭代收敛, 则当 k 较大时, x_k 和 x_{k+1} 都接近 x_*, 因此 ξ_1 与 ξ_2 也相近, 于是 $\varphi'(\xi_1)\approx\varphi'(\xi_2)$:

$$
\frac{x_{k+1}-x_*}{x_{k+2}-x_*}\approx\frac{x_k-x_*}{x_{k+1}-x_*}\quad\Longrightarrow\quad \boxed{x_*\approx x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}}
$$

2-3-1 Aitken 加速技巧

迭代两次: $x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad x_{k+2}=\varphi(x_{k+1})$, 可得

$$\begin{aligned} x_{k+1}-x_* &= \varphi(x_k)-\varphi(x_*)=\varphi'(\xi_1)(x_k-x_*), \\ x_{k+2}-x_* &= \varphi(x_{k+1})-\varphi(x_*)=\varphi'(\xi_2)(x_{k+1}-x_*). \end{aligned}$$

假定迭代收敛, 则当 k 较大时, x_k 和 x_{k+1} 都接近 x_*, 因此 ξ_1 与 ξ_2 也相近, 于是 $\varphi'(\xi_1)\approx\varphi'(\xi_2)$:

$$\frac{x_{k+1}-x_*}{x_{k+2}-x_*}\approx\frac{x_k-x_*}{x_{k+1}-x_*} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{x_*\approx x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}}$$

因此, 上式右端可能是 x_* 的一个更好的近似.

Aitken 加速方法

$$y_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

Aitken 加速方法

$$y_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

这时我们就得到两个迭代序列: $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 和 $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$.

定理 假定原不动点迭代收敛, 且 $\varphi'(x_*) \neq 1$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1} - x_*}{x_k - x_*} = 0.$$

这意味着 y_k 比 x_k 更快地收敛到 x_*.

Aitken 加速方法

$$y_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

这时我们就得到两个迭代序列: $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 和 $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$.

定理 假定原不动点迭代收敛, 且 $\varphi'(x_*) \neq 1$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1} - x_*}{x_k - x_*} = 0.$$

这意味着 y_k 比 x_k 更快地收敛到 x_*.

通过对最近三次迭代解的重新组合, 可以得到一个更好的近似解!

2-3-2 Steffensen 迭代格式

将 Aitken 加速技巧与不动点迭代相结合, 就得到 **Steffensen 迭代法**:

$$\boxed{y_k = \varphi(x_k), \quad z_k = \varphi(y_k), \quad x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

2-3-2 Steffensen 迭代格式

将 Aitken 加速技巧与不动点迭代相结合, 就得到 **Steffensen 迭代法**:

$$\boxed{y_k = \varphi(x_k), \quad z_k = \varphi(y_k), \quad x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

写成不动点迭代形式可得 $\boxed{x_{k+1} = \psi(x_k)}$, 其中迭代函数 $\psi(x)$ 为

$$\boxed{\psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}}$$

收敛性

定理 设 x_* 是 $\psi(x)$ 的不动点, 则 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点. 反之, 若 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点, $\varphi''(x)$ 存在且 $\varphi'(x_*) \neq 1$, 则 x_* 是 $\psi(x)$ 的不动点. 另外, 若原不动点迭代是线性收敛的, 则对应的 Steffensen 迭代二阶收敛.

收敛性

定理 设 x_* 是 $\psi(x)$ 的不动点, 则 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点. 反之, 若 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点, $\varphi''(x)$ 存在且 $\varphi'(x_*) \neq 1$, 则 x_* 是 $\psi(x)$ 的不动点. 另外, 若原不动点迭代是线性收敛的, 则对应的 Steffensen 迭代二阶收敛.

✍ 如果原迭代法是 p 阶收敛的, 则 Steffensen 迭代 $p+1$ 阶收敛.

✍ 若原迭代法不收敛, Steffensen 迭代可能收敛.

Steffensen 迭代举例

例 用 Steffensen 迭代法求 $f(x) = x^3 - x - 1$ 在区间 $[1, 2]$ 内的零点

(取 $\varphi(x) = x^3 - 1$)

(NLS_Steffensen_01.m)

例 用 Steffensen 迭代法求 $f(x) = 3x^2 - e^x$ 在区间 $[3, 4]$ 内的零点

(取 $\varphi(x) = 2\ln(x) + \ln 3$)

(NLS_Steffensen_02.m)

谢谢

THANK YOU