第八讲 数值积分与数值微分

目录

https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA

8-6 Romberg 求积公式

8.6 Romberg 求积公式

8-6-1 外推技巧

出发点

在使用复合求积公式时，由于一开始并不清楚 n 该取多大.

- 如果 n 太小可能达不到计算精度要求
- 如果 n 太大，则会增加额外的工作量.

因此我们可以采用动态的方法，即将区间不断对分，直到所得到的计算结果满足指定的精度为止.

复合梯形法的递推公式

将积分区间 n 等分, 可得复合求积公式

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

复合梯形法的递推公式

将积分区间 n 等分, 可得复合求积公式

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i)+f(x_{i+1})), \quad h=\frac{b-a}{n}.$$

将每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 二等分, 则新的复合梯形公式为

$$T_{2n} = \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right) = \frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(x_i+\frac{1}{2}h\right).$$

这就是复合梯形法的递推公式.

具体的计算过程

(1) 记 $h^{(0)} = b - a$, 计算: (梯形公式)

$$T^{(0)} = \frac{h^{(0)}}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right), \quad x_i = a + ih^{(0)},\ i = 0, 1.$$

具体的计算过程

(1) 记 $h^{(0)} = b - a$, 计算: (梯形公式)

$$T^{(0)} = \frac{h^{(0)}}{2}(f(x_0) + f(x_1)), \quad x_i = a + ih^{(0)},\ i = 0, 1.$$

(2) 将积分区间二等分, 记 $h^{(1)} = \frac{1}{2}h^{(0)} = \frac{b-a}{2}$, 计算: (复合梯形公式)

$$T^{(1)} = \frac{1}{2}T^{(0)} + \frac{1}{2}h^{(0)} \sum_{i=0}^{2^0-1} f(x_{2i+1}), \quad x_i = a + ih^{(1)},\ i = 0, 1, 2.$$

具体的计算过程

(1) 记 $h^{(0)} = b - a$, 计算: (梯形公式)

$$T^{(0)} = \frac{h^{(0)}}{2}(f(x_0) + f(x_1)), \quad x_i = a + ih^{(0)},\ i = 0, 1.$$

(2) 将积分区间二等分, 记 $h^{(1)} = \frac{1}{2}h^{(0)} = \frac{b-a}{2}$, 计算: (复合梯形公式)

$$T^{(1)} = \frac{1}{2}T^{(0)} + \frac{1}{2}h^{(0)}\sum_{i=0}^{2^0-1} f(x_{2i+1}), \quad x_i = a + ih^{(1)},\ i = 0, 1, 2.$$

(3) 再将每个小区间二等分, 即 $h^{(2)} = \frac{1}{2}h^{(1)} = \frac{b-a}{2^2}$, 计算: (复合梯形公式)

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}T^{(1)} + \frac{1}{2}h^{(1)}\sum_{i=0}^{2^1-1} f(x_{2i+1}), \quad x_i = a + ih^{(2)},\ i = 0, 1, \ldots, 2^2.$$

(4) **再将每个小区间二等分, 记** $h^{(3)} = \dfrac{1}{2}h^{(2)} = \dfrac{b-a}{2^3}$, **计算: (复合梯形公式)**

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}T^{(2)} + \frac{1}{2}h^{(2)} \sum_{i=0}^{2^2-1} f(x_{2i+1}), \quad x_i = a + ih^{(3)},\ i = 0, 1, \ldots, 2^3.$$

(4) 再将每个小区间二等分, 记 $h^{(3)} = \dfrac{1}{2}h^{(2)} = \dfrac{b-a}{2^3}$, 计算: (复合梯形公式)

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}T^{(2)} + \frac{1}{2}h^{(2)} \sum_{i=0}^{2^2-1} f(x_{2i+1}), \quad x_i = a + ih^{(3)},\ i = 0, 1, \ldots, 2^3.$$

(5) 依此类推, 对于 $k = 3, 4, 5, \ldots$, 记 $h^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}h^{(k)} = \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$, 计算: (复合梯形公式)

$$T^{(k+1)} = \boxed{\frac{1}{2}T^{(k)} + \frac{1}{2}h^{(k)} \sum_{i=0}^{2^k-1} f(x_{2i+1})}, \quad x_i = a + ih^{(k)},\ i = 0, 1, \ldots, 2^{k+1}.$$

例 用梯形法的递推公式计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, 要求计算精度满足

$$|T_{2n} - T_n| < \varepsilon = 10^{-7}.$$

(`Quad_Trap_recursion.m`)

8-6-2 Romberg 算法

出发点

梯形递推公式算法简单, 易于计算机实现, 但收敛速度较慢.

Romberg 算法: 基于梯形递推公式的加速方法.

Romberg 算法的理论基础

记 $T_n \triangleq T(h)$, 由复合梯形公式余项可知

$$I(f) \triangleq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T(h) - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta).$$

Romberg 算法的理论基础

记 $T_n \triangleq T(h)$, 由复合梯形公式余项可知

$$I(f) \triangleq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T(h) - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta).$$

定理 设 $f(x) \in C^\infty[a,b]$, 则有

$$T(h) = I(f) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots$$

其中 α_k 与 $f(x)$ 有关, 但与 h 无关. (感兴趣的同学可以参考相关资料)

Romberg 算法的理论基础

记 $T_n \triangleq T(h)$, 由复合梯形公式余项可知

$$I(f) \triangleq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T(h) - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta).$$

定理 设 $f(x) \in C^\infty[a,b]$, 则有

$$T(h) = I(f) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots$$

其中 α_k 与 $f(x)$ 有关, 但与 h 无关. (感兴趣的同学可以参考相关资料)

由定理可知 $\boxed{T(h) - I(f) = \mathcal{O}(h^2)}$

Richardson 外推

由于系数 α_k 与 h 无关, 将积分区间再次二等分后可得

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + \alpha_1 \frac{h^2}{4} + \alpha_2 \frac{h^4}{16} + \alpha_3 \frac{h^6}{32} + \cdots$$

Richardson 外推

由于系数 α_k 与 h 无关, 将积分区间再次二等分后可得

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + \alpha_1 \frac{h^2}{4} + \alpha_2 \frac{h^4}{16} + \alpha_3 \frac{h^6}{32} + \cdots$$

因此

$$\boxed{S(h) \triangleq \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3}} = I(f) + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots$$

用 $S(h)$ 来近似 $I(f)$, 则误差阶提高到了 $\mathcal{O}(h^4)$.

Richardson 外推

由于系数 α_k 与 h 无关, 将积分区间再次二等分后可得

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + \alpha_1 \frac{h^2}{4} + \alpha_2 \frac{h^4}{16} + \alpha_3 \frac{h^6}{32} + \cdots$$

因此

$$\boxed{S(h) \triangleq \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3}} = I(f) + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots$$

用 $S(h)$ 来近似 $I(f)$, 则误差阶提高到了 $\mathcal{O}(h^4)$. 事实上, $S(h)$ 就是复合 Simpson 公式.

Richardson 外推

由于系数 α_k 与 h 无关, 将积分区间再次二等分后可得

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + \alpha_1 \frac{h^2}{4} + \alpha_2 \frac{h^4}{16} + \alpha_3 \frac{h^6}{32} + \cdots$$

因此

$$\boxed{S(h) \triangleq \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3}} = I(f) + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots$$

用 $S(h)$ 来近似 $I(f)$, 则误差阶提高到了 $\mathcal{O}(h^4)$. 事实上, $S(h)$ 就是复合 Simpson 公式.

这种通过线性组合提高误差阶的方法就是**外推算法** 或 **Richardson 外推**, 是一个提高计算精度的重要技巧.

Romberg 算法

类似地, 我们可以构造更高阶的计算公式

$$\boxed{C(h) \triangleq \frac{16S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h)}{15}} = I(f) + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots .$$

这时, 误差阶提高到了 $\mathcal{O}(h^6)$. 　事实上, $C(h)$ 就是复合 Cotes 公式.

Romberg 算法

类似地, 我们可以构造更高阶的计算公式

$$\boxed{C(h) \triangleq \frac{16S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h)}{15}} = I(f) + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots .$$

这时, 误差阶提高到了 $\mathcal{O}(h^6)$. 事实上, $C(h)$ 就是复合 Cotes 公式.

这样不断利用外推技巧, 就可以不断提高计算精度, 这个过程就是 **Romberg 算法**.

Romberg 算法计算过程

算法 Romberg 算法

1: 令 $k=0$, $h^{(0)}=b-a$

2: 计算 $T_0^{(0)}=\dfrac{h^{(0)}}{2}(f(a)+f(b))$

3: 利用梯形法的递推公式计算 $T_0^{(k+1)}=\dfrac{1}{2}T_0^{(k)}+\dfrac{1}{2}h^{(k)}\displaystyle\sum_{i=0}^{2^k-1}f(x_{2i+1})$

4: **for** $i=1,2,\ldots,k+1$ **do**

5: 　　计算 $T_i^{(k+1-i)}=\dfrac{4^iT_{i-1}^{(k+2-i)}-T_{i-1}^{(k+1-i)}}{4^i-1}$

6: **end for**

7: 若 $|T_k^{(0)}-T_{k-1}^{(0)}|<\varepsilon$, 则终止计算, 取 $T_k^{(0)}$ 为定积分近似值.

8: 令 $h^{(k+1)}=\dfrac{1}{2}h^{(k)}$, $k=k+1$, 转到第 3 步

Romberg 算法表格

k	$h^{(k)}$	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$\cdots$
0	$b-a$	$T_0^{(0)}$					
1	$h^{(0)}/2$	$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$				
2	$h^{(1)}/2$	$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$			
3	$h^{(2)}/2$	$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$		
4	$h^{(3)}/2$	$T_0^{(4)}$	$T_1^{(3)}$	$T_2^{(2)}$	$T_3^{(1)}$	$T_4^{(0)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$T_0^{(k+1)} = \frac{1}{2}T_0^{(k)} + \frac{1}{2}h^{(k)}\sum_{i=0}^{2^k-1} f(x_{2i+1}),$$

$$T_i^{(k+1-i)} = \frac{4^i T_{i-1}^{(k+2-i)} - T_{i-1}^{(k+1-i)}}{4^i - 1}$$

例 用 Romberg 算法计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, 要求计算精度满足 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon = 10^{-7}$.

(`Quad_Romberg.m`)

谢谢

THANK YOU