

第八讲 数值积分与数值微分



目录

8.1 数值积分基本概念

8.2 插值型求积公式

8.3 Newton-Cotes 公式

8.4 复合求积公式

8.5 带导数的求积公式

8.6 Romberg 求积公式

8.7 Gauss 求积公式

8.8 多重积分

8.9 数值微分

<https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA>

为什么数值积分

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

- ▶ 在很多情况下, 被积函数的原函数很难求出 (或很复杂), 如 $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$ 的原函数为

$$F(x) = \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{6} \arctan \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.$$

- ▶ 原函数无法用初等函数表示, 如

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) = \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x}.$$

- ▶ 在某些实际应用中, 被积函数 $f(x)$ 的表达式是未知的, 只给出了某些离散点上的值.

 在这些情况下, 我们如何计算定积分 (近似值)?

什么是数值积分

数值积分

数值积分就是研究如何用函数值 (有时也会用到导数值) 的线性组合来近似定积分.

数值积分主要研究的问题

数值积分主要考虑以下问题:

- (1) 求积公式的构造;
- (2) 精确程度的衡量;
- (3) 余项估计/误差估计.

8-1 | 数值积分基本概念

8.1 数值积分基本概念

8.1.1 机械求积公式


8.1.2 代数精度

8.1.3 收敛性与稳定性

8-1-1 | 机械求积公式

设 $f(x) \in C[a, b]$, 取节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, 根据定积分的定义, 有

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n h_i f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad h = \max_i \{h_i\}.$$

 当 h 充分小, n 充分大时, 我们就有下面的近似公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n h_i f(\xi_i).$$

机械求积公式

为了方便起见, 我们将上述公式改写为 (将记号 h_i 和 ξ_i 更换为 A_i 和 x_i)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \triangleq I_n(f)$$

这里 x_i 称为 **求积节点**, 满足 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, 系数 A_i 称为 **求积系数**, 与函数 $f(x)$ 无关. 该求积公式就称为 **机械求积公式**.

👉 机械求积公式只包含函数值, 但求积公式并不局限于机械求积公式, 有些求积公式可能会包含其它信息, 如导数值等.

例 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

➤ 如果用左端点的函数值 $f(a)$ 来近似 $f(\xi)$, 则可得**左矩形公式**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(a)(b - a);$$

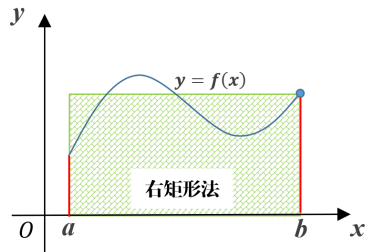
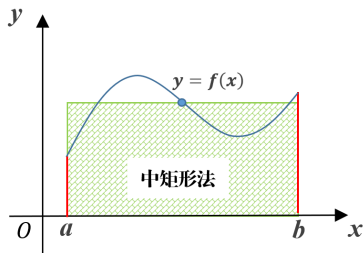
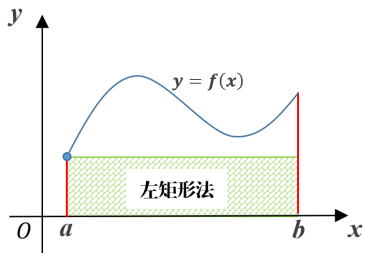
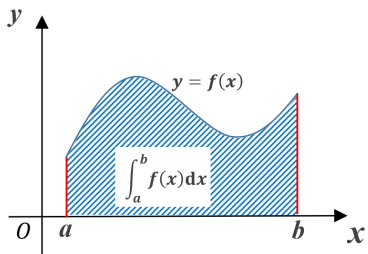
➤ 如果用右端点的函数值 $f(b)$ 来近似 $f(\xi)$, 则可得**右矩形公式**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(b)(b - a);$$

➤ 如果用中点的函数值来近似 $f(\xi)$, 则可得**中矩形公式**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{a + b}{2}\right)(b - a).$$

这类公式称为**矩形公式**, 其几何意义就是用矩形的面积来近似曲边梯形的面积.



8-1-2 | 代数精度

如何衡量一个求积公式的好坏?

如果能对次数较高的多项式精确成立, 那么我们就认为该求积公式具有较高的精度.

定义 如果一个求积公式对所有次数不超过 m 的多项式精度成立, 但对 $m + 1$ 次多项式不精确成立, 则称该求积公式具有 m 次代数精度.

代数精度的计算方法

依次将 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m, \dots$ 代入求积公式, 直到等式不精确成立为止.

例 试确定系数 A_i , 使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度, 并求出此求积公式的代数精度.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1).$$


解 分别取 $f(x) = 1, x, x^2$, 令求积公式精确成立, 可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = b - a \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

求得 $A_0 = \frac{1}{3}, A_1 = \frac{4}{3}, A_2 = \frac{1}{3}$. 因此求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1).$$

将 $f(x) = x^3$ 代入, 公式左边 = 0 = 右边. 将 $f(x) = x^4$ 代入, 公式左边为 $\frac{2}{5}$, 右边为 $\frac{2}{3}$. 因此该求积公式的代数精度为 4.

 公式中含有 $n + 1$ 个参数, 因此可以选取合适的 A_i , 使得公式至少具有 n 次代数精度

非机械求积公式举例

例 试确定下面求积公式中的系数, 使其具有尽可能高的代数精度:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0).$$

(板书)

机械求积公式基本性质

引理 设机械求积公式具有 $m(\geq 0)$ 次代数精度, 则有

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n = b - a. \quad (8.1)$$

(板书, 将 $f(x) = 1$ 代入求积公式, 令等式精确成立即可)

 上面的结论是机械求积公式的一个基本性质.


8-1-3

收敛性与稳定性

定义 记求积公式的余项为 $R[f]$, 若

$$\lim_{h \rightarrow 0} R[f] = 0,$$

则称求积公式是收敛的, 其中 $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$.

 由定义可以, 求积公式的收敛性与定积分的存在性是类似的, 即当分割足够细 (即模趋于 0) 时极限存在, 该极限就是定积分.

机械求积公式的稳定性

为什么要考虑稳定性

在利用机械求积公式计算定积分时, 需要计算函数值. 由于存在舍入误差, 因此最后的结果也会带有误差. 求积公式的稳定性就是考虑这些舍入误差对计算结果的影响.

定义 考虑机械求积公式, 设 \tilde{f}_k 是计算 $f(x_k)$ 时得到的近似值, 如果对任给的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $|f(x_k) - \tilde{f}_k| < \delta$ 对 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 都成立时, 有

$$\left| \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^n A_k \tilde{f}_k \right| < \varepsilon,$$

则称该机械求积公式是 **稳定的**.

稳定性判别方法

定理 若机械求积公式中的求积系数 A_i 都是正数, 则求积公式是稳定的.

(板书)

8-2 | 插值型求积公式

构造求积公式的一个常用方法就是使用插值多项式.

设 $L_n(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 的 n 次插值多项式, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b l_k(x) dx \right) f(x_k) \triangleq \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).\end{aligned}$$

这就是**插值型求积公式**, 其中 $l_k(x)$ 是 n 次 Lagrange 基函数, $A_k = \int_a^b l_k(x) dx$.

余项/误差

由多项式插值余项公式可知, 插值型求积公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b (f(x) - L_n(x)) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) dx,$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

由于 ξ_x 与 x 有关, 上面的误差值是无法得到的, 因此通常用下面的方法来估计误差

$$|R[f]| = \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) dx \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\omega_{n+1}(x)| dx,$$

其中 $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$.

插值型求积公式的代数精度


引理 插值型求积公式 $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 至少具有 n 次代数精度.

(板书, 依次将 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^n$ 代入, 可得 $f^{(n+1)}(\xi_x) = 0$)



事实上, 我们有下面的性质.

定理 机械求积公式 $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ 至少具有 n 次代数精度的充要条件是该公式是插值型的. (板书)

 由该定理可知, 当机械求积公式具有尽可能高的代数精度时, 它总是插值型的.

