第七讲 函数逼近

目录

https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA

潘建瑜 @MATH.ECNU

7-3 最佳平方逼近

7.3 最佳平方逼近

什么是最佳平方逼近

设 $f(x) \in C[a,b]$, 在某个给定的简单易算的函数集 $\Phi \subset C[a,b]$ 中寻找 $S^*(x)$, 使得

$$\|f(x) - S^*(x)\|_2^2 = \min_{S(x)\in\Phi} \|f(x) - S(x)\|_2^2$$

我们称 $S^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 Φ 中的 **最佳平方逼近函数**.

注记

这里的范数 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[a,b]$ 上的 **带权内积** 导出的范数, 即

$$\|f(x) - S(x)\|_2^2 = \int_a^b \rho(x)(f(x) - S(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

7-3-1 怎样求最佳平方逼近

基函数法

设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ 是 Φ 的一组基, 则对任意 $S(x) \in \Phi$, $S(x)$ 可表示为

$$S(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x).$$

因此

$$\|f(x) - S(x)\|_2^2 = \int_a^b \rho(x) \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x) \right)^2 \mathrm{d}x \triangleq I(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

求最佳逼近函数 $S^*(x)$ 就转化为求多元函数 $I(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 的最小值问题.

多元函数最小值

$I(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 取最小值的充要条件是 $\dfrac{\partial I(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_k} = 0$, 即

$$2\int_a^b \rho(x)\left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x)\right)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

也即

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

写成内积形式即为

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}(\varphi_k, \varphi_i)a_i = (\varphi_k, f)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

法方程

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{Ga = d}$$

由于 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ 线性无关, G 非奇异, 因此法方程存在唯一解.

- 求 $S^*(x) \Longleftrightarrow$ 解法方程 $Ga = d$.
- 存在唯一解 $\Longleftrightarrow$ G 非奇异 $\Longleftrightarrow$ $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ 线性无关.
- $S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳逼近 $\Longleftrightarrow (f-S^*,\varphi_k)=0,\ k=0,1,\ldots,n$

$$\Longleftrightarrow (f-S^*)\perp\Phi$$

定理 设 $a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*$ 是法方程的解, 则 $S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳平方逼近, 其中

$$S^*(x) = a_0^*\varphi_0(x) + a_1^*\varphi_1(x) + \cdots + a_n^*\varphi_n(x).$$

(板书)

证明概要. 对任意 $S(x) \in \Phi$, 有 $S(x) - S^*(x) \in \Phi$. 由于 $a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*$ 是法方程的解, 故

$$(f - S^*, \varphi_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

所以有 $(f - S^*, S(x) - S^*(x)) = 0$. 于是

$$\|f - S\|_2^2 = \|(f - S^*) - (S - S^*)\|_2^2 = \|f - S^*\|_2^2 + \|S - S^*\|_2^2 \geq \|f - S^*\|_2^2,$$

其中等号当且仅当 $\|S - S^*\|_2 = 0$, 即 $S = S^*$ 时成立.

误差估计

记 $\delta(x) = f(x) - S^*(x)$ 为平方逼近误差. 由于 $(f - S^*, \varphi_k) = 0$, 因此

$$\|\delta(x)\|_2^2 = (f - S^*, f - S^*) = (f - S^*, f) = \boxed{\|f\|_2^2 - \sum_{i=0}^{n} a_i^* (\varphi_i, f)}.$$

7-3-2 用正交函数计算最佳平方逼近

出发点: 避免解法方程 $\to$ 取正交基, 则 G 为对角矩阵.

设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ 是 Φ 的一组正交基, 则法方程的解为

$$a_k^* = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$\boxed{S^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x)}$$

误差

$$\|\delta(x)\|_2^2 = \|f(x) - S^*(x)\|_2^2 = (f, f) - (S^*, f) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\varphi_k, f)^2}{(\varphi_k, \varphi_k)}.$$

广义 Fourier 级数

设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是正交函数族, 对 $f(x) \in C[a,b]$, 构造级数

$$a_0^*\varphi_0(x) + a_1^*\varphi_1(x) + \cdots + a_n^*\varphi_n(x) + \cdots$$

其中 $a_k^* = \dfrac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$. 这就是关于 $f(x)$ 的**广义 Fourier 级数**, 它是 Fourier 级数的推广, 其中 a_k^* 称为**广义 Fourier 系数**.

若正交函数族取为

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$$

则上述级数就是 Fourier 级数.

7-3-3 最佳平方逼近多项式

最佳平方逼近多项式

设 $\Phi = \mathbb{H}_n$ (次数不超过 n 的所有多项式组成的集合), 则 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳平方逼近就称为 $f(x)$ 的 n **次最佳平方逼近多项式**, 记为 $S_n^*(x)$.

例 设 $[a,b]=[0,1]$, 权函数 $\rho(x)\equiv 1$, 取 $\mathbb{H}_n$ 的一组基 $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$. 求 $f(x)\in C[0,1]$ 的 n 次最佳平方逼近多项式.

解 由于 $\varphi_i(x)=x^i$, 直接计算可得 $(\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{i+j+1}$. 所以法方程的系数矩阵为

$$G=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} \triangleq H,$$

这就是著名的 **Hilbert 矩阵**. 右端项 $d=[d_0,d_1,\dots,d_n]^\mathsf{T}$, 其中

$$d_k=(\varphi_k,f)=\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x,\quad k=0,1,2,\dots,n.$$

解法方程可得 a_k^*, 于是 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式为

$$S_n^*(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k.$$

例 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式.

(板书)

✍ Hilbert 矩阵对称正定, 但高度病态, 当维数较大时, 会给数值求解带来很大的困难. 因此, 我们很少用这种方法来求最佳平方逼近多项式.

7-3-4 正交多项式与最佳平方逼近

定理 设 $f(x) \in C[a,b]$, $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是正交多项式族,

$$S^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x)$$

即 $S_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式, 则

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - S_n^*(x)\|_2 = 0,$$

即 $S_n^*(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. (证明可参见相关资料)

用 Legendre 多项式来计算最佳平方逼近多项式

定理 设 $f(x) \in C[-1,1]$, 权函数 $\rho(x) \equiv 1$, 则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 n 次最佳平方逼近多项式为

$$S_n^*(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + \cdots + a_n^* P_n(x),$$

其中 $P_k(x)$ 为 k 次 Legendre 多项式,

$$a_k^* = \frac{(P_k, f)}{(P_k, P_k)} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P_k(x) f(x) \, \mathrm{d}x.$$

误差

$$\|\delta_n(x)\|_2^2 = \|f(x) - S_n^*(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^* (P_k, f) = \int_{-1}^{1} f^2(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \frac{2\left(a_k^*\right)^2}{2k+1}.$$

例 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的三次最佳平方逼近多项式.

(板书)

误差估计

定理 设 $f(x) \in C^2[-1,1]$, 则对 $\forall\, x \in [-1,1]$ 和 $\forall\, \varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$|f(x) - S_n^*(x)| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

(证明可参见相关资料)

首项系数为 1 的 Legendre 多项式的极小性质

定理 在所有首项系数为 1 的 n 次多项式中, $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的平方逼近误差最小, 即

$$\|\tilde{P}_n(x)\|_2 = \min_{p(x)\in\tilde{\mathbb{H}}_n} \|p(x)\|_2 = \min_{p(x)\in\tilde{\mathbb{H}}_n} \left(\int_{-1}^{1} p^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\tilde{P}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 Legendre 多项式.

(板书)

✍ 这是 Legendre 多项式的一个重要性质, 与 $\tilde{T}_n(x)$ 的 "无穷范数最小" 性质相类似.

一般区间上的最佳平方逼近多项式的计算方法

计算过程如下:

(1) 做变换替换 $x(t)=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$, 将 $f(x)$ 转化为 $g(t)=f(x(t)), t\in[-1,1]$;

(2) 通过 Legendre 多项式计算出 $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上的最佳平方逼近多项式 $S^*(t)$;

(3) 将 $t=\frac{2x-b-a}{b-a}$ 代入 $S^*(t)$, 给出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳平方逼近多项式

$$S^*\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right).$$

7-4 最佳一致逼近

7.4 最佳一致逼近

什么是最佳一致逼近

设 $f(x) \in C[a,b]$, 在某个给定的函数集 $\Phi \subset C[a,b]$ 中寻找 $S^*(x)$, 使得

$$\|f(x) - S^*(x)\|_\infty = \min_{S(x)\in\Phi} \|f(x) - S(x)\|_\infty .$$

我们称 $S^*(x)$ 为 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 在 Φ 中的 **最佳一致逼近函数**.

若 $\Phi = \mathbb{H}_n$, 则称 $S^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 n 次 **最佳一致逼近多项式**.

注记

这里的范数 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C[a,b]$ 上的无穷范数, 即

$$\|f(x) - S(x)\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x) - S(x)|.$$

7-4-1 最佳一致逼近多项式的存在唯一性

定理 (Chebyshev 定理) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的 n 次最佳一致逼近多项式, 且 $p_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式的充要条件是 $f(x) - p_n^*(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少存在 $n+2$ 个交错偏差点 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, 即

$$f(x_i) - p_n^*(x_i) = (-1)^i \max_{a \le x \le b} |p_n^*(x) - f(x)|, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n+1.$$

(证明可参见相关资料)

✍ 该定理揭示了最佳一致逼近多项式的特征, 并描述了最佳一致逼近多项式误差曲线的性态, 是构造最佳一致逼近多项式的主要理论依据.

零次最佳一致逼近多项式

作为例子, 我们考虑 $n = 0$ 和 $n = 1$ 时的情形.

例 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式为

$$p_0^*(x) = \frac{1}{2}\left(\min_{a\leq x\leq b} f(x) + \max_{a\leq x\leq b} f(x)\right).$$

一次最佳一致逼近多项式

例 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 且 $f''(x) > 0$, $x \in [a,b]$, 求 $f(x)$ 的一次最佳一致逼近多项式.

(板书)

✍ 当 $n \geq 2$ 时, 求最佳一致逼近多项式通常非常复杂和困难的 (特殊情形除外).

7-4-2 n 次多项式的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式

如果 $f(x)$ 是一个 n 次多项式, 则我们可以利用首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式与零偏差最小的性质构造其 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式.

定理 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $a_n\neq 0$, 则

$$p_{n-1}^*(x)=f(x)-a_n\tilde{T}_n(x)$$

是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式. (留作练习)

例 设 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$, 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 2 次最佳一致逼近多项式.

证明概要. 由前面的定理可知, $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 2 次最佳一致逼近多项式为

$$p_2^*(x)=f(x)-2\tilde{T}_3(x)=x^2+\frac{7}{2}x-1.$$

思考: 如何计算首项系数非零的 n 次多项式 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式? **(变量代换)**

7-4-3 Chebyshev 级数与近似最佳一致逼近

由于最佳一致逼近多项式的计算非常困难, 在实际应用中, 人们往往更倾向于寻找 **近似最佳一致逼近多项式**.

Chebyshev 级数

Chebyshev 展开是一种很有效的计算近似最佳一致逼近多项式的方法.

设 $f \in C[-1,1]$, $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 在 $f(x)$ 的广义 Fourier 级数中取 $\varphi_k = T_k(x)$, 则可得

$$\frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* T_k(x),$$

这就是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 **Chebyshev 级数**, 其中

$$a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x) f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

注意: 由于 $(T_0, T_0) = \pi$, 因此这里的 $a_0^* = 2\dfrac{(T_0, f)}{(T_0, T_0)}$.

定理 若 $f''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上分段连续, 则 Chebyshev 级数一致收敛, 即

$$f(x)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*T_k(x).$$

记部分和

$$\boxed{C_n^*(x)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^*T_k(x)},$$

则余项为 (级数一致收敛, 余项收敛到 0)

$$f(x)-C_n^*(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^*T_k(x)\approx a_{n+1}^*T_{n+1}(x).$$

由于 $\|\tilde{T}_{n+1}(x)\|_\infty$ 在 $\tilde{\mathbb{H}}_{n+1}$ 中最小, 故 $C_n^*(x)$ 可看作是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的近似最佳一致逼近多项式.

谢谢

THANK YOU