第七讲 函数逼近

目录

什么是函数逼近

函数逼近基本思想

函数逼近的基本思想就是使用 **简单易算** 的函数去近似表达式复杂的函数.

多项式函数逼近

考虑用多项式函数去做函数逼近. 对于闭区间上任意连续函数 $f(x)$, 由 Weierstrass 定理可知, 存在一个多项式序列一致收敛到 $f(x)$. 这就是用多项式函数逼近一般连续函数的理论基础.

本讲主要介绍多项式函数逼近

7-1 多基本概念与预备知识

最佳函数逼近

对于一个给定的复杂函数 $f(x)$, 在某个表达式较简单的函数类 Φ 中寻找一个函数 $p_*(x)$, 使其在某种度量下距离 $f(x)$ 最近, 即 **最佳逼近**, 这就是 **函数逼近**.

几点注记

- $f(x)$ 通常较复杂, 但一般是连续的, 我们主要考虑 $[a, b]$ 上的连续函数
- 函数类 Φ 通常由简单函数构成, 比如多项式, 分段多项式, 有理函数, 三角函数等
- 在不同的度量下, $f(x)$ 的最佳逼近可能不一样

什么是曲线拟合

曲线拟合

如果只知道函数在部分节点上的值, 且这些数值带有一定的误差, 需要在函数类 Φ 中寻找一个函数 $p(x)$, 使其在某种度量下是这些数据的**最佳逼近**, 这就是**曲线拟合**, 也称为**数据拟合**, 可以看作是离散情况下的函数逼近.

思考: 函数逼近、曲线拟合与函数插值有什么区别?

多项式逼近的理论基础

定理 (Weierstrass 逼近定理) 设 $f \in C[a,b]$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在一个多项式 $p(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

在 $[a,b]$ 上一致成立.

✍ 该定理也称为 Weierstrass 第一定理. 该定理表明, 任意一个闭区间上的连续函数都可以用多项式来一致逼近, 即实系数多项式构成的集合在 $C[a,b]$ 内是处处稠密的.

最佳逼近函数

定义 设 Φ 为某个函数空间, 给定函数 $f(x) \in C[a,b]$, 若存在 $g_*(x) \in \Phi$, 使得

$$\|f(x) - g_*(x)\| = \min_{g(x)\in\Phi} \|f(x) - g(x)\|,$$

则称 $g_*(x)$ 为 $f(x)$ 在 Φ 中的 $[a,b]$ 上的**最佳逼近函数**.

✍ $g_*(x)$ 与函数空间 Φ, 范数 $\|\cdot\|$ 和区间 $[a,b]$ 有关.

最佳逼近多项式

定义 设 $\mathbb{H}_n$ 为所有次数不超过 n 的多项式组成的函数空间, 给定函数 $f(x) \in C[a,b]$, 若存在 $p_*(x) \in \mathbb{H}_n$, 使得

$$\|f(x) - p_*(x)\| = \min_{p(x)\in\mathbb{H}_n} \|f(x) - p(x)\|,$$

则称 $p_*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 n 次最佳逼近多项式.

- 若范数为 $\|\cdot\|_\infty$, 则称 $p_*(x)$ 为 n 次最佳一致逼近多项式;
- 若范数为 $\|\cdot\|_2$, 则称 $p_*(x)$ 为 n 次最佳平方逼近多项式.

最小二乘曲线拟合

最小二乘曲线拟合

如果只知道 $f(x)$ 在某些节点上的函数值 $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$, 在某个函数空间 Φ 中寻找 $g_*(x)$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - g_*(x_i)|^2 = \min_{g(x)\in\Phi} \sum_{i=1}^{m} |y_i - g(x_i)|^2,$$

则称 $g_*(x)$ 为 $f(x)$ 的**最小二乘拟合**. 若 Φ 取为 $\mathbb{H}_n$, 则称 $g_*(x)$ 为 $f(x)$ 的 n **次最小二乘拟合多项式**. 这里一般有 $m > n$.

7-2 正交多项式

7.2 正交多项式

7-2-1 正交函数族与正交多项式

定义 (函数正交) 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数, 若

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \,\mathrm{d}x = 0,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交.

定义 (正交函数族) 设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \in C[a,b]$, $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数, 若

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \tau_i > 0, & i = j \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交函数族. 若所有 $\tau_i = 1$, 则称为标准正交函数族.

正交函数举例

例 三角函数系

$$1,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad \cos 2x,\quad \sin 2x, \ldots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上是带权 $\rho(x) = 1$ 的正交函数族.

证明概要. 利用三角函数的“积化和差”公式和被积函数的奇偶性.

$$
\begin{aligned}
&(1,1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \,\mathrm{d}x = 2\pi;\\
&(\sin nx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx) \,\mathrm{d}x = \pi;\\
&(\cos nx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx) \,\mathrm{d}x = \pi;\\
&(\sin nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\big(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\big) \,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n;\\
&(\cos nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\big(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\big) \,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n;\\
&(\cos nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n. \quad \text{(奇函数)}
\end{aligned}
$$

正交多项式

定义 (正交多项式) 设 $p_n(x)$ 是首项系数不为零的 n 次多项式, $n=0,1,2,\ldots$, $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数, 若对 $i,j=0,1,2,\ldots$ 有

$$(p_i,p_j)=\int_a^b \rho(x)p_i(x)p_j(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \tau_i>0, & i=j,\end{cases}$$

则称 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交, 并称 $p_n(x)$ 为 n 次正交多项式.

两个基本性质

基本性质一

设 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 则 $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ 线性无关, 所以它们构成 $\mathbb{H}_n$ 的一组**正交基**, 其中

$$\mathbb{H}_n = \{p(x) \mid \deg(p) \le n\}$$

基本性质二

由于 $p_n(x)$ 与 $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ 都正交, 故 $p_n(x)$ 与 $\mathbb{H}_{n-1}$ 中的任意多项式都正交, 即

$$(p_n(x), p(x)) = \int_a^b \rho(x) p_n(x) p(x) \, \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, p(x) \in \mathbb{H}_{n-1}.$$

正交多项式的三项递推公式

定理 设 $\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上的正交多项式, 且首项系数均为 1, 则有

$$p_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

其中 $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - \alpha_0$,

$$\alpha_n = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \beta_n = \frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

(板书)

✍ 所有首项系数为 1 的正交多项式族都满足这个公式, 该公式也给出了正交多项式的一个 (快速) 递推计算方法.

正交多项式的零点

定理 设 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式, 则当 $n \geq 1$ 时, $p_n(x)$ 在 (a,b) 内有 n 个不同零点.

(板书)

正交多项式的构造: Gram-Schmidt 正交化

事实上, 任意一组线性无关的多项式组 (函数族), 均可通过 Gram-Schmidt 正交化过程生成一组正交的多项式组 (函数族).

Gram-Schmidt 正交化过程

易知 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ 是线性无关的. 相应的 Gram-Schmidt 正交化过程可描述为:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1, \\
p_k(x) &= x^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} p_j(x), \quad c_{kj} = \frac{(x^k, p_j)}{(p_j, p_j)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}
$$

7-2-2 Legendre 多项式

Legendre 多项式

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad x \in [-1,1], \quad n = 1,2,\ldots.$$

首项系数为 $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$; 称 $\tilde{P}_n(x) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)$ 为**首项系数为 1 的 Legendre 多项式**.

正交性

定理 (正交性)

$$(P_n, P_m) = \int_a^b P_n(x) P_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

(板书)

设 $[a,b]=[-1,1]$, 权函数 $\rho(x)=1$, 将线性无关函数组 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化后得到的就是单位化后的 Legendre 多项式, 即 $\dfrac{2n+1}{2}P_n(x)$.

更多性质

定理 (奇偶性) $P_{2k}(x)$ 只含偶次幂, $P_{2k+1}(x)$ 只含奇次幂, 故

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

(留作课外自习, $\varphi(x) = (x^2-1)^n$ 中只包含偶数次幂)

定理 (递推公式)

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中 $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$. (留作课外自习, 参考首项系数为 1 的正交多项式)

定理 (零点) $P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同的零点.

(留作课外自习, 根据正交多项式的零点)

Legendre 多项式

例 给出 5 次 Legendre 多项式 $P_5(x)$ 的表达式.

(`Approxi_Legendre.m`)

解 由递推公式可知

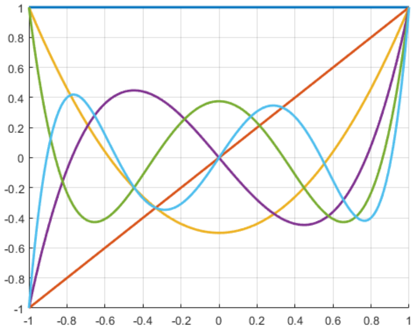
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3xP_1(x) - P_0(x)) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{3}(5xP_2(x) - 2P_1(x)) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{4}(7xP_3(x) - 3P_2(x)) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{5}(9xP_4(x) - 4P_3(x)) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



7-2-3 Chebyshev 多项式

Chebyshev 多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

- $|T_n(x)| \le 1$.
- 令 $x = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, 则 $\theta = \arccos x$, 所以

$$\begin{aligned} T_n(x) = \cos(n\theta) &= \cos^n\theta - C_n^2 \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + C_n^4 \cos^{n-4}\theta \sin^4\theta + \cdots \\ &= x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

故 $T_n(x)$ 是 n 次多项式.

正交性

定理 (正交性)

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^{1} \rho(x) T_n(x) T_m(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

(留作练习)

设 $[a,b] = [-1,1]$, 权函数 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 将线性无关函数组 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化后得到的就是单位化后的 Chebyshev 多项式.

递推公式

定理 (递推公式)

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

其中 $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

证明概要. 令 $x = \cos\theta$, 则由三角恒等式

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

可得

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

更多性质

定理 $T_n(x)$ 的首项系数为 2^{n-1}.

(留作课外自习, 由递推公式直接可得)

✍ 令 $\tilde{T}_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, 则称 $\tilde{T}_n(x)$ 为**首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式**.

定理 (奇偶性) $T_{2n}(x)$ 只含偶次幂, $T_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂, 故

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

(留作课外自习, 由递推公式直接可得)

更多性质

定理 (零点) $T_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同的零点:

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

证明概要. 由 $T_n(x) = 0$ 可得 $n\arccos x = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi$, 即

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

更多性质

定理 (极值点) $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 内有 $n+1$ 个极值点 (含两个端点):

$$\tilde{x}_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

证明概要. 直接求导可得

$$T_n'(x) = \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

令 $T_n'(x) = 0$ 可得极值点

$$\tilde{x}_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

再加上两个端点 $\tilde{x}_0 = 1$ 和 $\tilde{x}_n = -1$.

例 给出 5 次 Chebyshev 多项式 $T_5(x)$ 的表达式.

(Approxi_Chebyshev.m)

解 由递推公式可知

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

7-2-4 Chebyshev 多项式零点插值

定理 设 $\tilde{T}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式, 即 $\tilde{T}_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, 则

$$\max_{-1 \le x \le 1} |\tilde{T}_n(x)| \le \max_{-1 \le x \le 1} |p(x)|, \quad \forall\ p(x) \in \tilde{\mathbb{H}}_n,$$

其中 $\tilde{\mathbb{H}}_n$ 表示次数不超过 n 的所有首项系数为 1 的多项式组成的集合, 且

$$\max_{-1 \le x \le 1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

等价形式

$\tilde{T}_n(x)$ 在 $\tilde{\mathbb{H}}_n$ 中无穷范数最小 (这里的 $\|\cdot\|_\infty$ 是指 $C[-1,1]$ 上的无穷范数)

$$\|\tilde{T}_n(x)\|_\infty = \min_{p(x)\in\tilde{\mathbb{H}}_n} \|p(x)\|_\infty.$$

在所有次数不超过 n 的首项系数为 1 的多项式中, $\tilde{T}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的偏差是最小的 (在无穷范数意义下).

利用该性质, 我们可以采用 Chebyshev 多项式的零点作为节点进行多项式插值, 以使得插值的总体误差达到最小化.

Chebyshev 多项式零点插值

设 $L_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 n 次插值多项式, 插值节点为 $x_0, x_1, \ldots, x_n$, 则插值余项为

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$

所以总体插值误差为

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{-1\leq x\leq 1} |\omega_{n+1}(x)|,$$

其中 $M_{n+1} = \max_{-1\leq x\leq 1} |f^{(n+1)}(x)|$. 因此, 要使得插值误差最小化, 我们就需要极小化

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |\omega_{n+1}(x)| = \|\omega_{n+1}(x)\|_\infty.$$

- **当 $\omega_{n+1}(x) = \tilde{T}_{n+1}(x)$ 时, $\|\omega_{n+1}(x)\|_\infty$ 达到最小, 且最小值为 $\dfrac{1}{2^n}$.**
- **相应的插值节点即为 $\tilde{T}_{n+1}(x)$ 的零点, 也就是 $T_{n+1}(x)$ 的零点.**

插值误差

定理 设 $f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$, 插值节点为 $T_{n+1}(x)$ 的零点, 即

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

令 $L_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 n 次插值多项式, 则插值误差满足

$$\|f(x) - L_n(x)\|_\infty \le \frac{1}{2^n (n+1)!} \|f^{(n+1)}(x)\|_\infty.$$

✍ 上面的定理表明: 若 $f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$, 则当 $n \to \infty$ 时, $L_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

一般区间上的 Chebyshev 零点插值

如果插值区间是 $[a,b]$, 则需要做 **变量替换**

$$x(t)=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2},\quad t\in[-1,1].$$

- 令 t_k 为 Chebyshev 多项式 T_{n+1} 的零点, 则插值节点为

$$x_k=\frac{b-a}{2}t_k+\frac{b+a}{2}=\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi+\frac{b+a}{2},\quad k=0,1,2,\ldots,n,$$

- 总体插值误差

$$\begin{aligned}\max_{a\le x\le b}|f(x)-L_n(x)| &\le \frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{-1\le t\le 1}\left|\frac{\mathrm{d}^{n+1}f}{\mathrm{d}t^{n+1}}\right| \\ &= \frac{1}{2^n(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\max_{-1\le t\le 1}|f^{(n+1)}(x(t))| \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|.\end{aligned}$$

✍ 上面的总体误差也可以直接将插值节点代入 $\omega_{n+1}(x)$ 后获得. 事实上, 由于

$$x - x_k = \frac{b-a}{2}(t - t_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

故

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k) = \prod_{k=0}^{n}\frac{b-a}{2}(t - t_k) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\tilde{T}_{n+1}(t).$$

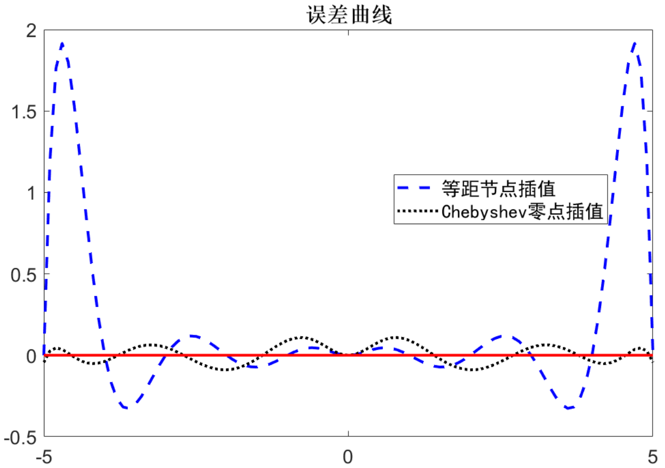
因此

$$\max_{a\le x\le b}|\omega_{n+1}(x)| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\max_{-1\le t\le 1}\tilde{T}_{n+1}(t) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^n}$$

✍ 为了尽可能地减小插值误差, 在可以自由选取插值节点时, 尽量使用 Chebyshev 多项式零点.

例 求 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $[0,1]$ 上的四次插值多项式 $L_4(x)$, 插值节点为 $T_5(x)$ 的零点, 并估计总体误差. (板书) (Approxi_Chebyshev_interp.m)

例 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 在 $[-5,5]$ 上分别用等距节点和 Chebyshev 多项式零点做 10 次多项式插值, 绘图比较两种插值的数值效果. (Approxi_Chebyshev_interp_Runge.m)



7-2-5 其他正交多项式

第二类 Chebyshev 多项式

在区间 $[-1,1]$ 上, 带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 正交的多项式就称为 **第二类 Chebyshev 多项式**

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in[-1,1],\quad n=0,1,2,\ldots.$$

- **正交性**:

$$(U_n,U_m)=\int_{-1}^{1}\rho(x)U_n(x)U_m(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\end{cases}$$

- **递推公式**:

$$U_0(x)=1,\quad U_1(x)=2x,\quad U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots$$

Laguerre 多项式

在区间 $[0,\infty]$ 上, 带权 $\rho(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 正交的多项式就称为 **Laguerre 多项式**

$$L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}),\quad x\in[0,\infty],\quad n=0,1,2,\ldots.$$

- **正交性**:

$$(L_n,L_m)=\int_0^\infty \rho(x)L_n(x)L_m(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ (n!)^2, & m=n\end{cases}$$

- **递推公式**:

$$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=1-x,\quad L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots$$

Hermite 多项式

在区间 $[-\infty, \infty]$ 上, 带权 $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 正交的多项式就称为 **Hermite 多项式**

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2}), \quad x \in [-\infty, \infty], \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- **正交性**:

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) H_n(x) H_m(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{n}, & m = n \end{cases}$$

- **递推公式**:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

谢谢
THANK YOU