第九讲

数值积分与数值微分

— 多重积分和数值微分

5 多重积分与数值微分

- 多重积分基本思想
- 多重积分计算方法
- 数值微分问题描述
- 数值微分计算方法

二重积分

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}s \qquad \Omega \subseteq \mathrm{R}^2$$

- 基本思想：先化累次积分，然后数值积分

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

举例

例：用两点 Gauss 求积公式计算二重积分

$$\iint_{\Omega}\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s \qquad \Omega=[-1,1]\times[-1,1]$$

解：板书

解：$$\iint_{\Omega}\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(x^2+2y^2\right)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

令 $f(x,y)=x^2+2y^2$，可得

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+2y^2\right)\,\mathrm{d}y\approx f\left(x,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(x,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2x^2+\frac{4}{3}$$

令 $g(x)=2x^2+\frac{4}{3}$，可得

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(x^2+2y^2\right)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\approx\int_{-1}^{1}g(x)\,\mathrm{d}x\approx g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=4$$

复化公式

为了提高计算精度，在计算累次积分时，也可以使用复化求积公式

数值微分

基本思想：用函数值的线性组合来近似函数的导数值。

数值微分

已知 $f(x)$ 在节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数值，对于 $[a, b]$ 中的任意一点，如何计算函数在这点的导数？

- 插值型求导公式
  - 构造出 $f(x)$ 的插值多项式 $p_n(x)$
  - 用 $p_n(x)$ 的导数来近似 $f(x)$ 的导数
- 外推算法

插值型求导公式

$$f'(x) \approx P_n'(x)$$

- **插值型求导公式的余项**

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\left(\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right)' + \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\left(f^{(n+1)}(\xi_x)\right)'$$

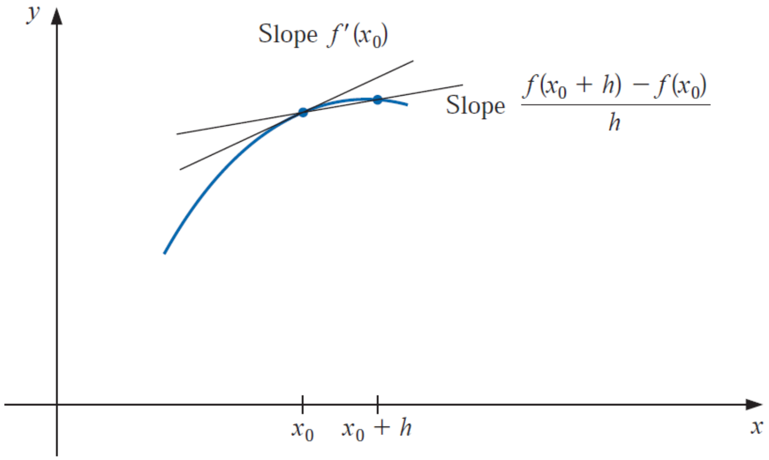
- **在节点 x_i 处的余项**

$$f'(x_i) - P_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$$

我们只考察节点处的导数值！

两点公式

- **节点** x_0 , x_1 ， **步长** $h = x_1 - x_0$



$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$= \frac{-(x - x_1) f(x_0) + (x - x_0) f(x_1)}{h}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h}\big(f(x_1) - f(x_0)\big) \\ f'(x_1) &= \frac{1}{h}\big(f(x_1) - f(x_0)\big) \end{aligned}} \begin{aligned} &- \frac{h}{2} f''(\xi_0) \\ &+ \frac{h}{2} f''(\xi_1) \end{aligned}$$

三点等距公式

- 步长 h， 节点 $x_i = x_0 + ih$， $i = 0, 1, 2$

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

变量代换：$x = x_0 + th$

$$P_2(x(t)) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2) f(x_0) - t(t-2) f(x_1) + \frac{1}{2} t(t-1) f(x_2)$$

三点等距公式

$$\frac{dP_2}{dt}=\frac{1}{2}\left[(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)\right]$$

$$\frac{dP_2}{dx}=\frac{dP_2}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{2h}\left[(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)\right]$$

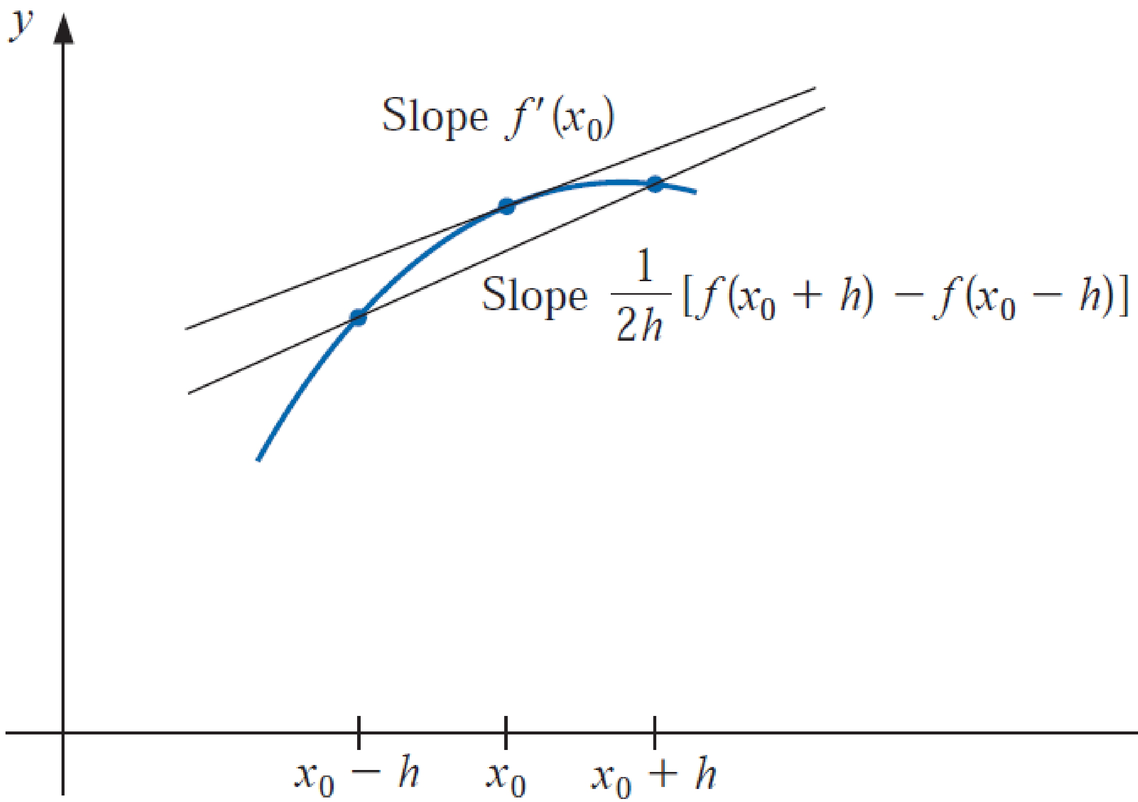
分别令 $t=0,\ 1,\ 2,$ 可得

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right]\ +\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$\boxed{f'(x_1)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right]}\ -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right]\ +\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

三点等距公式



高阶导数的近似

$$\boxed{f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)} \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

- **二阶导数的近似**

$$\boxed{f''(x_1) = \frac{1}{h^2}\big[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\big]} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

$$\boxed{f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\big[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\big]}$$

用差商近似导数

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2!}h^2f''(x)+\frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\cdots$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}+O(h)$$

向前差商

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2!}h^2f''(x)-\frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\cdots$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}}+O(h)$$

向后差商

$$\boxed{f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}+O(h^2)$$

中心差商

Richardson 外推算法

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{1}{2!}h^2 f''(x) + \dfrac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \dfrac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) + \cdots \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \dfrac{1}{2!}h^2 f''(x) - \dfrac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \dfrac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) - \cdots \end{cases}$$

$$G_0(h) \triangleq \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] = f'(x) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots$$

$$G_1(h) \triangleq \frac{4G_0(h/2) - G_0(h)}{3} = f'(x) + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \beta_3 h^8 + \cdots$$

$$\vdots$$

外推算法

$$G_m^{(k)} = \frac{4^m G_{m-1}^{(k+1)} - G_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\text{①} & G_0^{(0)} & & & & & & \\
\text{②} & G_0^{(1)} & \text{③} & G_1^{(0)} & & & & \\
\text{④} & G_0^{(2)} & \text{⑤} & G_1^{(1)} & \text{⑥} & G_2^{(0)} & & \\
\text{⑦} & G_0^{(3)} & \text{⑧} & G_1^{(2)} & \text{⑨} & G_2^{(1)} & \text{⑩} & G_3^{(0)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$