第九讲

数值积分与数值微分

— 复合求积公式

— Romberg 算法

目录页

Contents

2 复合求积公式

- 为什么复合求积
- 复合梯形公式
- 复合抛物线公式

① 基本概念与N-C求积公式

② 复合求积公式

③ Romberg 求积公式

④ Gauss 求积公式

⑤ 多重积分与数值微分

为什么复化求积

提高积分计算精度的常用两种方法

(1) 用复合求积公式

(2) 用非等距节点

什么是复合求积

(1) 首先将积分区间分割成多个小区间

(2) 然后在每个小区间上使用低次 N-C 求积公式

† 复合求积公式 (**Composite** Numerical Integration) 也称为复化求积公式

复合梯形公式

将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ （通常是 n 等分）

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

等距节点复合梯形公式

$$T_n = h\left(\frac{1}{2}[f(a) + f(b)] + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$h = \frac{1}{n}(b-a)$$

† 注：若无特别说明，复合梯形公式一般就指等距节点复合梯形公式。

余项公式

梯形公式余项：$R[f]=-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta)$

将每个小区间上的余项相加，即可得整个积分区间上的余项：

$$R[f]=-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_i^3}{12}f''(\eta_i)$$

$h_i=x_{i+1}-x_i,\quad \eta_i\in(x_i,x_{i+1})$

等距复合梯形公式余项

$$R[f]=-\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)$$

$h=\frac{1}{n}(b-a)$

$\eta\in(a,b)$

$$=-\frac{b-a}{12}h^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)\right)=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

性质：复合梯形公式是收敛的，也是稳定的。

复合抛物线公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

等距节点复合抛物线公式

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right]$$

$$h = \frac{1}{n}(b-a)$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

- 注意：复合抛物线公式实际使用了 $2n+1$ 个点。
- 若无特别说明，复合抛物线公式一般就指等距节点公式。

余项公式

抛物线公式余项：$R[f]=-\dfrac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$

$$R[f]=-\frac{1}{2880}\sum_{i=0}^{n-1}h_i^5 f^{(4)}(\eta_i)$$

$h_i=x_{i+1}-x_i,\quad \eta_i\in(x_i,x_{i+1})$

等距复合抛物线公式余项

$$R[f]=-\frac{(b-a)h^4}{2880}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)\right)=-\frac{(b-a)h^4}{2880}f^{(4)}(\eta)$$

$h=\dfrac{1}{n}(b-a)$

$\eta\in(a,b)$

性质：复合抛物线公式是收敛的，也是稳定的。

举例

例：设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，利用下表中的数据分别用复合梯形公式和复合抛物线公式计算定积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，并估计误差。

x_i	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1.0
$f(x_i)$	1	0.997	0.990	0.977	0.954	0.936	0.909	0.877	0.841

解：板书

解：由复合梯形公式和复合抛物线公式可知

$$T_8=\frac{h_T}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{7}f(x_i)+f(x_8)\right]=0.9456909$$

$h_T=1/8$

$h_S=1/4$

$$S_4=\frac{h_S}{6}\Big[f(x_0)+4\big(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)\big)+2\big(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)\big)+f(x_8)\Big]=0.9460832$$

举例

误差估计

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\quad f^{(k)}(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\cos(xt)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^k\cos\left(xt+\frac{k\pi}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\quad \max_{0\le x\le 1}\left|f^{(k)}(x)\right|\le \max_{0\le x\le 1}\int_0^1\left|t^k\cos\left(xt+\frac{k\pi}{2}\right)\right|\mathrm{d}t\quad\le\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow\quad \left|R_T[f]\right|=\left|-\frac{b-a}{12}h_T^2 f''(\eta)\right|\le 0.434\times 10^{-3}$$

$$\left|R_S[f]\right|=\left|-\frac{b-a}{2880}h_S^4 f^{(4)}(\eta)\right|\le 0.271\times 10^{-6}$$

举例

例：计算定积分 $\int_0^1 e^x \, dx$，用复合梯形公式和复合抛物线公式时，n 分别取多大时才能使得误差不超过 0.5×10^{-5}

解：板书

解：$f(x) = e^x$ ⇒ $\max\limits_{0 \le x \le 1} \left| f^{(k)}(x) \right| = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| e^x \right| = e$

复合梯形公式

$$\left| R_T[f] \right| = \left| -\frac{b-a}{12} h_T^2 f''(\eta) \right| \le \frac{e}{12} \left(\frac{1}{n} \right)^2$$

要使误差不超过 0.5×10^{-5}，需要

$$\frac{e}{12} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \le \frac{1}{2} \times 10^{-5} \Rightarrow n \ge 212.85 \Rightarrow$$

取 n=213

213 等分

举例

复合抛物线公式

$$\left|R_S[f]\right| = \left|-\frac{b-a}{2880}h_S^4 f^{(4)}(\eta)\right| \le \frac{e}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4$$

要使误差不超过 0.5×10^{-5}，需要

$$\frac{e}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4 \le \frac{1}{2}\times 10^{-5} \Rightarrow n \ge 3.71 \Rightarrow$$

取 $n=4$

8 等分

目录页

Contents

3 Romberg 求积公式

- 梯形法的递推化计算
- Romberg 算法基本思想: 外推技巧
- Romberg 算法: 计算过程

自适应步长

利用复合梯形公式、复合抛物线公式等计算定积分时，

如何选取步长 h ？

太 大 → 计算精度可能难以保证

太 小 → 可能会增加额外的计算量

解决办法：采用 变步长算法 / 自适应步长

将积分区间不断对分，即取 $n = 2^k$，反复使用复合求积公式，直到所得到的计算结果满足指定的精度为止。

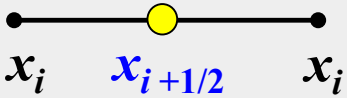
梯形法递推公式

复合梯形公式的递推计算方法

① 将 $[a, b]$ 分成 n 等分 $[x_i, x_{i+1}]$，$x_i = a + i \cdot h, \quad h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

② 步长折半：$[x_i, x_{i+1/2}]$，$[x_{i+1/2}, x_{i+1}]$



$$\Rightarrow T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[\left(f(x_i) + f(x_{i+1/2})\right) + \left(f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})$$

复合梯形法递推公式

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+1/2})=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih+0.5h)$$

$$h=\frac{1}{n}(b-a)$$

$$T_1=\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{h_0}{2}\sum_{i=0}^{0}f(a+ih_0+0.5h_0) \qquad h_0=b-a$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{h_1}{2}\sum_{i=0}^{1}f(a+ih_1+0.5h_1) \qquad h_1=(b-a)/2$$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{h_2}{2}\sum_{i=0}^{3}f(a+ih_2+0.5h_2) \qquad h_2=(b-a)/4$$

…… ……

复合梯形法递推公式

$$T_{2^k} = \frac{1}{2}T_{2^{k-1}} + \frac{h_{k-1}}{2}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_{k-1} + 0.5h_{k-1})$$

$$h_{k-1} = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

记 $T^{(k)} \equiv T_{2^k}$

$$T^{(k)} = \frac{1}{2}T^{(k-1)} + \frac{h_{k-1}}{2}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_{k-1} + 0.5h_{k-1})$$

举例

$I[f]=0.946083070367\cdots$

例：用梯形法的递推公式计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$，要求计算精度满足

$$|T_{2n}-T_n|<\varepsilon=10^{-7}$$

解：

$$T^{(0)}=\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)=0.920735492$$

$$T^{(1)}=\frac{1}{2}T^{(0)}+\frac{h_0}{2}\sum_{i=0}^{0}f(a+ih_0+0.5h_0)=0.939793285$$

$$T^{(2)}=\frac{1}{2}T^{(1)}+\frac{h_1}{2}\sum_{i=0}^{1}f(a+ih_1+0.5h_1)=0.944513522$$

$$T^{(3)}=\frac{1}{2}T^{(2)}+\frac{h_2}{2}\sum_{i=0}^{1}f(a+ih_2+0.5h_2)=0.945690864$$

$\vdots$

k	$T^{(k)}$
0	0.920735492
1	0.939793285
2	0.944513522
3	0.945690864
4	0.945985030
5	0.946058561
6	0.946076943
7	0.946081539
8	0.946082687
9	0.946082975
10	0.946083046

Quad_Trap_recursion.m

梯形法的加速

梯形法递推公式：算法简单，编程方便

但收敛速度较 慢

梯形法的加速 —— 龙贝格 (Romberg) 算法

定理： 设 $f(x)\in C^{\infty}[a,b]$， 记 $T_n = T(h)$， 则有

$$T(h) = I[f] + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_i h^{2i} + \cdots$$

证明：利用 Taylor 展开即可（略）

梯形法的加速

$$T(h) = I[f] + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_i h^{2i} + \cdots \quad = I[f] + O(h^2)$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I[f] + \alpha_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \cdots + \alpha_i \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} + \cdots$$

$$4T(h/2) - T(h) = 3I[f] + (-3/4)\alpha_2 h^4 + (-15/16)\alpha_3 h^6 + \cdots$$

$$S(h) \equiv \frac{1}{3}\left(4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)\right) = I[f] + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots \quad = I[f] + O(h^4)$$

$$C(h) \equiv \frac{1}{15}\left(16S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h)\right) = I[f] + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots \quad = I[f] + O(h^6)$$

$$R(h) \equiv \frac{1}{63}\left(64C\left(\frac{h}{2}\right) - C(h)\right) = I[f] + O(h^8)$$

$\vdots$

Richardson 外推算法

举例

例：计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

$I[f]=0.946083070367\cdots$

① $T^{(0)} = 0.920735492$

② $T^{(1)} = 0.939793285$

④ $T^{(2)} = 0.944513522$

③ $S_1 = \frac{1}{3}\left(4T^{(1)} - T^{(0)}\right) = 0.946145882$

⑤ $S_2 = \frac{1}{3}\left(4T^{(2)} - T^{(1)}\right) = 0.946086934$

⑥ $C_1 = \frac{1}{15}\left(16S_2 - S_1\right) = 0.946083004$

k	$T^{(k)}$
0	0.920735492
1	0.939793285
2	0.944513522
3	0.945690864
4	0.945985030
5	0.946058561
6	0.946076943
7	0.946081539
8	0.946082687
9	0.946082975
10	0.946083046

Quad_Romberg.m

Romberg 算法

记: $T_0^{(k)} = T_{2^k}$

$T_1^{(k)} = S_{2^k}$

$T_2^{(k)} = C_{2^k}$

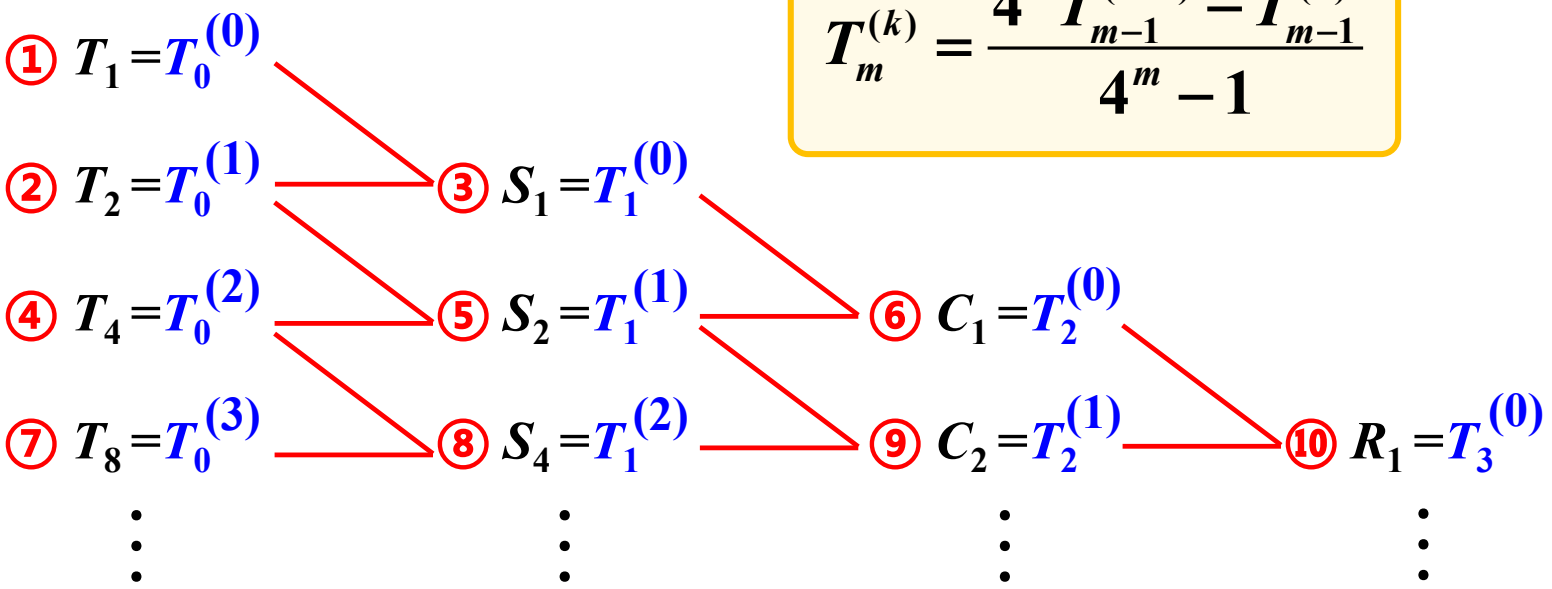
$T_3^{(k)} = R_{2^k}$

$\vdots$

$T_0^{(k)}$: k 次对分后梯形公式计算所得的近似值

$T_m^{(k)}$: m 次加速后所得的近似值

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}$$



Romberg 算法是收敛的

举例

$I[f]=0.4$

例：用 **Romberg** 算法计算定积分 $\int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx$，要求计算精度满足

$$|T_m^{(k)} - T_{m-1}^{(k)}| < \varepsilon = 10^{-7}$$

解：逐步计算可得

Quad_Romberg_B.m

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	0.50000000					
1	0.42677670	0.40236893				
2	0.40701811	0.40043192	0.40030278			
3	0.40181246	0.40007725	0.40005361	0.40004965		
4	0.40046340	0.40001371	0.40000948	0.40000878	0.40000862	
5	0.40011767	0.40000243	0.40000168	0.40000155	0.40000152	0.40000152