# 第九讲

# 数值积分与数值微分

## — 基本概念

## — Newton-Cotes 公式

# 目录页

Contents



自习，不做要求

- 自适应积分方法

# 1 基本概念与 N-C 求积公式



- 为什么要数值积分
- 数值积分基本思想
- 代数精度
- 插值型求积公式
- 收敛性与稳定性
- N-C求积公式及其误差估计

# 为什么数值积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

数学方法：微积分基本公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$

- 但是在许多实际计算问题中

(1) $F(x)$ 表达式可能比较复杂，计算较困难。如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^6}$

(2) $F(x)$ 难求！甚至有时不能用初等函数表示，如

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad f(x)=e^{-x^2}$$

(3) $f(x)$ 表达式未知，只有通过测量或实验得来的数据表

# 数值积分基本思想

**积分第一中值定理**：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

怎么选取 $\xi$？不同的选取方法 ⟹ 不同的求积方法

**矩形公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(a)$$ （左矩形公式，左点法）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(b)$$ （右矩形公式，右点法）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$ （中矩形公式，中点法）

# 数值积分基本思想

换一种思路：怎么近似 $f(\xi)$ 的值?

$$f(\xi) \approx \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$

梯形公式

$$f(\xi) \approx \frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

抛物线公式

为什么 **要** 这么取？为什么 **能** 这么取？

# 数值积分一般公式

一般地，我们可以用 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一些离散点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上的函数值的加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值。

† 这样做的目的：利用 $f(x)$ 的尽可能多的信息，来获得尽可能好的近似值

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

$A_i$：求积系数

$x_i$：求积节点

称为 **机械求积公式**

† 事实上，该公式也可以从定积分的定义出发，推导出来，见课程讲义

# 关于机械求积公式的说明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

- 将定积分计算转化成被积函数的函数值的计算
- 无需求原函数，易于计算机实现
- 求积公式并不局限于机械求积公式，有些求积公式可能会包含导数等信息

**数值积分主要研究内容**

(1) 求积公式的构造

(2) 精确程度的衡量

(3) 误差的估计（余项的估计）

# 代数精度

代数精度是衡量求积公式精确程度的一个重要指标。

**定义：** 如果对于所有次数不超过 $m$ 的多项式 $f(x)$，求积公式都精确成立，但对次数为 $m+1$ 的多项式不精确成立，则称该求积公式具有 $m$ 次代数精度

## 代数精度的验证方法

(1) 将 $f(x)=1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^m$ 依次代入，公式精确成立；

(2) 将 $f(x)=x^{m+1}$ 代入，公式不精确成立。

# 代数精度举例

例：试确定 $A_i$，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度

$$I(f) \triangleq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \triangleq I_n(x)$$

解：依次将 $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^n$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \cdots + A_n = b - a \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n = \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = \dfrac{1}{3}(b^3 - a^3) \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \cdots + A_n x_n^n = \dfrac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 存在唯一解：$A_0^*, A_1^*, \ldots, A_n^*$

所以求积公式为：$\displaystyle \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i^* f(x_i)$

具有至少 $n$ 次代数精度

# 代数精度举例

例：试确定系数 $A_i$，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

解：将 $f(x) = 1, x, x^2$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = (b-a)/1 = 2 \\ -A_0 + A_2 = (b^2 - a^2)/2 = 0 \\ A_0 + A_2 = (b^3 - a^3)/3 = 2/3 \end{cases}$$

解得 $A_0=1/3$, $A_1=4/3$, $A_2=1/3$

所以求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left[f(-1) + 4f(0) + f(1)\right]$$

将 $f(x) = x^3$ 代入可得：公式左边$=0$，公式右边$=0$，公式精确成立。

将 $f(x) = x^4$ 代入可得：公式左边$=2/5$，公式右边$=2/3$，公式不精确成立。

所以此求积公式具有 3 次代数精度。

# 代数精度举例

例：(非机械求积公式) 试确定下面求积公式中的系数，使其具有尽可能高的代数精度

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$$

解：将 $f(x) = 1, x, x^2$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_1 + B_0 = 0.5 \\ A_1 = 1/3 \end{cases}$$

解得 $A_0 = 2/3$, $A_1 = 1/3$, $A_2 = 1/6$

所以求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0)$$

将 $f(x) = x^3$ 代入可得，公式左边=1/4，公式右边=1/3，公式不精确成立。所以该求积公式具有 2 次代数精度。

# 代数精度

- 左矩形公式 和 右矩形公式 具有 0 次 代数精度
- 中矩形公式 和 梯形公式 具有 1 次 代数精度

练习：抛物线公式具有几次代数精度?

**性质**：任意具有 $m\ (\geq 0)$ 次代数精度的机械求积公式一定满足

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = A_0 + A_1 + \cdots + A_n = b - a$$

将 $f(x) = 1$ 代入求积公式，使其精确成立即可

# 插值型求积公式

**插值型求积公式：**

用插值多项式代替原函数，得到的求积公式就是插值型求积公式

设求积节点为：$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，若 $f(x_i)$ 已知，则可构造 $f(x)$ 的 $n$ 次多项式插值：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

这就是插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中 $A_i = \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x$

余项：$R[f] = \int_a^b \big(f(x) - L_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

# 插值型求积公式

**性质**：插值型求积公式具有至少 $n$ 次代数精度。

当 $f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^n$ 时，$L_n(x)\equiv f(x)$

**定理**：下面的求积公式具有至少 $n$ 次代数精度的充要条件是该公式是插值型的

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

证明：板书

† 由此可知，当机械求积公式具有尽可能高的代数精度时，它总是插值型的

# 求积公式的收敛性

设求积节点为：$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

定义：如果求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 满足

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$h = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

则称该求积公式是收敛的。

# 求积公式的稳定性

**定义：** 对 $\forall \varepsilon > 0$，若存在 $\delta > 0$，使得当 $\left|\tilde{f}_i - f(x_i)\right| \le \delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ 时，有

$$\left|\sum_{i=0}^{n} A_i \tilde{f}_i - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)\right| \le \varepsilon$$

则称该求积公式是 **稳定的**。

**定理：** 若 $A_i > 0$，$i = 0, 1, \ldots, n$，则下面的求积公式是稳定的

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

证明：板书

† 收敛意味着公式可以用，稳定意味着可以放心用。

# Newton-Cotes 公式

基于等分节点的插值型求积公式就称为 **Newton-Cotes 公式**

- 积分区间：$[a,\ b]$
- 求积节点：$x_i = a + i \times h$ $\quad$ $h = (b-a)/n$

**N-C** 求积公式： $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

其中 $$C_i^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_i^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}\,\mathrm{d}t \qquad x = a + th$$

Cotes 系数

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(t-k)\,\mathrm{d}t$$

# 几个典型 N-C 公式

$n=1$: $C_0^{(1)}=\frac{1}{2}$, $C_1^{(1)}=\frac{1}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \equiv T$$

梯形公式

代数精度 $=1$

$n=2$: $C_0^{(2)}=\frac{1}{6}$, $C_1^{(2)}=\frac{2}{3}$, $C_2^{(2)}=\frac{1}{6}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)] \equiv S$$

抛物线公式（也称 Simpson 公式）

代数精度 $=3$

# 几个典型 N-C 公式

$n = 4$:

科特斯 (Cotes) 公式

代数精度 = 5

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right] \equiv C$$

$$x_i = a + i\cdot h,\quad h = (b-a)/4$$

- **Cotes** 系数与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a, b]$ 无关
- **Cotes** 系数可通过查表获得

| $n$ | $C_i^{(n)}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | | | |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | | | | | | |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | | | | | |
| 4 | $\frac{7}{90}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{7}{90}$ | | | | |
| 5 | $\frac{19}{288}$ | $\frac{25}{96}$ | $\frac{25}{144}$ | $\frac{25}{144}$ | $\frac{25}{96}$ | $\frac{19}{288}$ | | | |
| 6 | $\frac{41}{840}$ | $\frac{9}{35}$ | $\frac{9}{280}$ | $\frac{34}{105}$ | $\frac{9}{280}$ | $\frac{9}{35}$ | $\frac{41}{840}$ | | |
| 7 | $\frac{751}{17280}$ | $\frac{3577}{17280}$ | $\frac{1323}{17280}$ | $\frac{2989}{17280}$ | $\frac{2989}{17280}$ | $\frac{1323}{17280}$ | $\frac{3577}{17280}$ | $\frac{751}{17280}$ | |
| 8 | $\frac{989}{28350}$ | $\frac{5888}{28350}$ | $\frac{-928}{28350}$ | $\frac{10496}{28350}$ | $\frac{-4540}{28350}$ | $\frac{10496}{28350}$ | $\frac{-928}{28350}$ | $\frac{5888}{28350}$ | $\frac{989}{28350}$ |

# N-C 公式

## Cotes 系数的特点

(1) $\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1$

(2) $C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$

(3) 当 $n \geq 8$ 时，出现负数，稳定性得不到保证，

而且当 $n$ 较大时，由于 **Runge** 现象的存在，收敛性也无法保证。

一般不采用高阶的 **N-C** 求积公式

当 $n \leq 7$ 时，**N-C** 公式是稳定的

# N-C 公式代数精度

**定理：** $n$ 阶 N-C 公式至少有 $n$ 次代数精度

**定理：** 当 $n$ 为偶数时，N-C 公式至少有 $n+1$ 次代数精度

证明：板书

证：只要证明当 $n$ 为偶数时，公式对 $f(x)=x^{n+1}$ 精确成立。

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x$$

$x=a+th$

$$=h^{n+2}\int_0^n \prod_{i=0}^{n}(t-i)\,\mathrm{d}t$$

$t=n-s$

$$=(-1)^{n+1}h^{n+2}\int_0^n \prod_{i=0}^{n}\big(s-(n-i)\big)\,\mathrm{d}s$$

$$=(-1)^{n+1}h^{n+2}\int_0^n \prod_{i=0}^{n}(s-i)\,\mathrm{d}s$$

$$R[f]=-R[f]$$

$$R[f]=0$$

# 余项估计

例：试确定梯形公式的余项表达式

$$R[f] = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta)$$

解：板书

例：试确定抛物线公式的余项表达式

$$R[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$$

解：板书

# 余项估计三步曲

求积公式余项估计三步曲：

(1) 计算代数精度，设为 $m$

(2) 构造 $f(x)$ 的 $m$ 次插值多项式 $p_m(x)$，使得 $I_n(f)=I_n(p_m)$，求插值余项

注 1：根据求积公式中的函数值或导数值，确定插值条件

注 2：确保插值余项中的 $\omega_n(x)$ 在求积区间内不变号

(3) 计算求积公式的余项：

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-I_n(f)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b p_m(x)dx$$

# 余项估计 — 非机械求积公式

例：试确定下面的求积公式的余项表达式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)$$

解：板书

# N-C 公式的余项

**定理：** 当 $n$ 是奇数时，设 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$，则 N-C 公式的余项可表示为

$$R[f]=\frac{h^{n+2}f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t \qquad \eta\in(a,b)$$

当 $n$ 是偶数时，设 $f(x)\in C^{n+2}[a,b]$，则 N-C 公式的余项可表示为

$$R[f]=\frac{h^{n+3}f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t \qquad \eta\in(a,b)$$

† 注：不适用非等步长的求积公式和非机械求积公式！