



第八讲

函数逼近

— 最佳平方逼近



3

最佳平方逼近

- ① 预备知识与基本概念
- ② 正交多项式
- ③ 最佳平方逼近
- ④ 曲线拟合的最小二乘法

- 怎么计算最佳平方逼近函数
- 最佳平方逼近多项式
- 正交多项式与最佳平方逼近多项式
- Chebyshev 级数 (了解)

什么是最佳平方逼近

设 $f(x) \in C[a, b]$, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \in C[a, b]$ 线性无关, 令

$$\Phi = \text{span} \{ \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$$

求 $S^*(x) \in \Phi$, 使得

$$\|f(x) - S^*(x)\|_2^2 = \min_{s(x) \in \Phi} \|f(x) - S(x)\|_2^2$$

我们称 $S^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳平方逼近。

† 这里的范数是带权内积导出范数, 即

$$\|f(x) - S(x)\|_2^2 = \int_a^b \rho(x) (f(x) - S(x))^2 dx$$

怎么计算最佳平方逼近

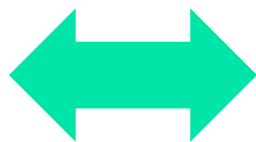
对任意 $S(x) \in \Phi$, 可设

$$S(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x)$$

则 “求 $S^*(x)$ ” 等价于 “求下面的多元函数的最小值点”

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \rho(x) \left(f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) \right)^2 dx$$

最小值点



$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

最佳平方逼近的计算 (续)

$$\text{即 } \frac{\partial I}{\partial a_k} = 2 \int_a^b \rho(x) \left(f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) \right) \varphi_k(x) dx = 0$$

$$\longleftrightarrow \sum_{j=0}^n a_j (\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_k, f) \quad k = 0, 1, \dots, n$$

法方程

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

记为:

$$Ga = d$$

性质: $(f - S^*, \varphi_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n$

最佳平方逼近的存在唯一性

法方程存在唯一解



$$\det(G) \neq 0$$



$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 线性无关

设法方程的解为： $a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*$ ，并令

$$S^*(x) = a_0^* \varphi_0 + a_1^* \varphi_1 + \dots + a_n^* \varphi_n$$

定理： $S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的唯一最佳平方逼近函数，且逼近误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2 = \|f(x) - S^*(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{j=0}^n a_j^* (\varphi_j, f)$$

证明：板书

最佳平方逼近多项式

$f(x) \in C[a, b]$ 在 H_n 中的最佳平方逼近就是最佳平方逼近多项式, 记为 S_n^*

若 $[a, b] = [0, 1]$, 取 H_n 的一组基: $1, x, x^2, \dots, x^n$, 得法方程

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad \text{记为: } \boxed{Ha = d}$$

† H 称为 **Hilbert 矩阵**, 严重病态, 该方法只适合求低次最佳平方逼近

举例

例：求 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式，并计算误差。

解：板书

解： $d_0 = (\varphi_0, f) = (1, f) = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx \approx 1.147$

$$d_1 = (\varphi_1, f) = (x, f) = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} \, dx \approx 0.609$$

法方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_0 \approx 0.934, \quad a_1 \approx 0.426$$

$$S_1^*(x) \approx 0.934 + 0.426x$$

误差估计： $\|\delta(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{j=0}^n a_j^* (\varphi_j, f) \approx 0.0026$

$$\|\delta(x)\|_\infty \approx 0.066$$

用正交基求最佳平方逼近

若 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 正交, 则法方程的解为

$$a_k^* = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$S^*(x) = \frac{(\varphi_0, f)}{(\varphi_0, \varphi_0)} \varphi_0(x) + \frac{(\varphi_1, f)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \varphi_1(x) + \dots + \frac{(\varphi_n, f)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n(x)$$

误差估计

$$\|\delta(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{(\varphi_k, f)^2}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$


$$\sum_{k=0}^n \frac{(\varphi_k, f)^2}{(\varphi_k, \varphi_k)} \leq \|f(x)\|_2^2$$

Bessel 不等式

广义 Fourier 级数

设 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ 是正交函数族, 则称

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \varphi_k(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + a_2^* \varphi_2(x) + \dots$$

为 $f(x)$ 的 广义 Fourier 级数。 其中

$$a_k^* = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

为 广义 Fourier 系数。

正交多项式最佳逼近

定理： 若 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 是正交多项式族, $S_n^*(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_n^*(x)\|_2 = 0$$

证明：略

$$S_n^*(x) = \frac{(\varphi_0, f)}{(\varphi_0, \varphi_0)} \varphi_0(x) + \frac{(\varphi_1, f)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \varphi_1(x) + \dots + \frac{(\varphi_n, f)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n(x)$$

Legendre 最佳平方逼近

设 $f(x) \in C[-1, 1]$, $\rho(x) = 1$, 则 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式为

$$S_n^*(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + \cdots + a_n^* P_n(x)$$

$$\text{其中 } a_k^* = \frac{(P_k, f)}{(P_k, P_k)} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) f(x) dx$$

误差估计

$$\|\delta_n(x)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{(P_k, f)^2}{(P_k, P_k)} = \int_{-1}^1 f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} (a_k^*)^2$$

Legendre 最佳平方逼近

定理：若 $f(x) \in C^2[-1, 1]$ ，则对任意 $x \in [-1, 1]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$ ，当 n 充分大时，有

$$|f(x) - S_n^*(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

证明：略

定理：在所有首项系数为 1 的 n 次多项式中， $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上与零的平方逼近误差最小，即

$$\|\tilde{P}_n(x)\|_2 = \min_{p \in \tilde{H}_n, \deg(p)=n} \|p(x)\|_2$$

其中 $\tilde{P}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次 Legendre 多项式。

证明：略

举例

例：求 $f(x) = e^x$ 在 $[-1, 1]$ 上的三次最佳平方逼近多项式，并估计误差。

解：板书

解：直接计算可得

$$(P_0, f) = \int_{-1}^1 e^x dx \approx 2.3504$$

$$(P_1, f) = \int_{-1}^1 x e^x dx \approx 0.7358$$

$$(P_2, f) = \int_{-1}^1 (1.5x^2 - 0.5)e^x dx \approx 0.1431$$

$$(P_3, f) = \int_{-1}^1 (2.5x^3 - 1.5x)e^x dx \approx 0.02013$$



$$S_3^*(x) \approx 0.1761x^3 + 0.5367x^2 + 0.9979x + 0.9963$$

$$\text{误差估计: } \|\delta_3(x)\|_2^2 = \int_{-1}^1 f^2(x) dx - \sum_{k=0}^3 \frac{2}{2k+1} (a_k^*)^2 \approx 0.0084$$

$$\|\delta_3(x)\|_\infty \approx 0.0112$$

一般区间上的最佳平方逼近多项式

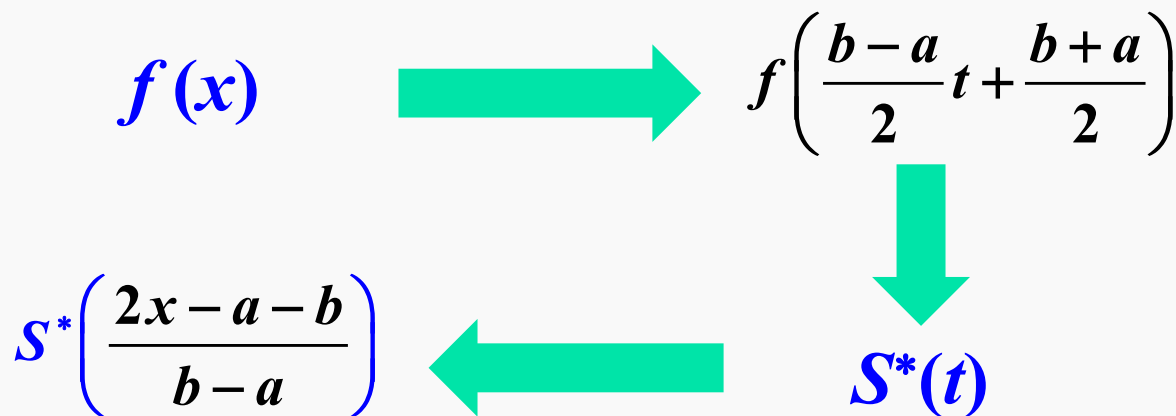
设 $f(x) \in C[a, b]$, $\rho(x) = 1$,

计算 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最佳平方逼近多项式。

基本思想：变量代换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$[a, b] \longrightarrow [-1, 1]$$



Chebyshev 级数

在广义 Fourier 级数中取 $\varphi_k = T_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 可得 Chebyshev 级数

$$C^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* T_k(x)$$

$$\text{其中 } a_k^* = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(x) f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos k\theta d\theta$$

一致收敛性：若 $f''(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上分段连续，则

$$f(x) = C^*(x)$$

Chebyshev 级数

部分和

$$C_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^* T_k(x)$$

误差

$$f(x) - C_n^*(x) \approx a_{n+1}^* T_{n+1}(x)$$

结论： $C_n^*(x)$ 可看作是 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的 n 次近似最佳一致逼近多项式。