



華東師範大學

EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

<http://math.ecnu.edu.cn/~jypan>

第八讲

函数逼近

什么是函数逼近

给定数据表，寻找到一个简单易算的 $p(x)$ ，使得

$$p(x_i) = y_i$$

函数插值

x	x_0	x_1	$\dots$	x_m
$f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_m

给定 $f(x)$ ，在某个简单易算的函数类中找一个 $p(x)$ ，使得 $p(x)$ 在某种度量下距离 $f(x)$ 最近。

函数逼近

给定数据表（带误差），在某个简单易算的函数类中找一个 $p(x)$ ，使得 $p(x)$ 在某种度量下距离 $f(x)$ 最近。

曲线拟合 / 数据拟合

† 注意区分三者的区别！



目录页

Contents

1

预备知识与基本概念

2

正交多项式

3

最佳平方逼近

4

曲线拟合的最小二乘法



1

预备知识与基本概念

- ① 预备知识与基本概念
- ② 正交多项式
- ③ 最佳平方逼近
- ④ 曲线拟合的最小二乘法

- 范数、内积、带权内积
- 什么是最佳函数逼近
- 什么是曲线拟合/数据拟合

预备知识

- 线性空间、线性相关、线性无关
- 线性空间的基、维数、有限维空间与无限维空间
- 范数、内积、带权内积、权函数、Gram 矩阵

定理：（Weierstrass 定理）

设 $f(x) \in C[a, b]$ ，则对 $\forall \varepsilon > 0$ ，总存在一个多项式 $p(x)$ ，使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

在 $[a, b]$ 上一致成立。

证明：略

函数逼近

什么是最佳逼近

定义：记 Φ 为某个函数空间，给定函数 $f(x) \in C[a, b]$ ，若 $g^*(x) \in \Phi$ 满足

$$\|f(x) - g^*(x)\| = \min_{g(x) \in \Phi} \|f(x) - g(x)\|$$

则称 $g^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 Φ 中的 $[a, b]$ 上的最佳逼近函数。

函数逼近中的两个关键点：

- (1) **函数空间**，即用什么样的函数来逼近 $f(x)$
- (2) **度量标准**，即采用什么样的评判标准

最佳逼近多项式

如果是在多项式中找最佳逼近，那就是最佳多项式逼近。

定义： 记 H_n 为所有次数不超过 n 的多项式组成的集合，给定函数 $f(x) \in C[a, b]$ ，若 $p^*(x) \in H_n$ 使得

$$\|f(x) - p^*(x)\| = \min_{p(x) \in H_n} \|f(x) - p(x)\|$$

则称 $p^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 n 次最佳逼近多项式。

† 取不同的范数，可以定义不同的最佳逼近方式。

两类常用的最佳逼近

- 最佳平方逼近多项式

$$\|f(x) - p^*(x)\|_2 = \min_{p(x) \in H_n} \|f(x) - p(x)\|_2$$

- 最佳一致逼近多项式

$$\|f(x) - p^*(x)\|_\infty = \min_{p(x) \in H_n} \|f(x) - p(x)\|_\infty$$

曲线拟合

x	x_0	x_1	$\dots$	x_m
$f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_m

什么是最小二乘拟合

给定数据表, 寻找 $g^*(x) \in \Phi$, 使得

$$\sum_{i=1}^m |y_i - g^*(x_i)|^2 = \min_{g \in \Phi} \sum_{i=1}^m |y_i - g(x_i)|^2$$

称 $g^*(x)$ 为 $f(x)$ 的最小二乘拟合函数。

若 $\Phi = H_n$, 则称 $g^*(x)$ 为 n 次最小二乘拟合多项式。

† 最小二乘是数据拟合方法中常用的一种方法。



2

正交多项式

- ① 预备知识与基本概念
- ② 正交多项式
- ③ 最佳平方逼近
- ④ 曲线拟合的最小二乘法

- 正交函数族与正交多项式
- Legendre 正交多项式
- Chebyshev 正交多项式
- Chebyshev 零点插值
- 其他正交多项式（了解）

函数正交

函数的正交

定义：设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, $\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交。

正交函数族

定义：设函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \dots \in C[a, b]$,

$\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数, 若

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数族。

- 若所有 $A_i=1$, 则称为 标准正交函数族。

正交函数举例

例：三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上是带权 $\rho(x)=1$ 的正交函数族。

证明：板书

证：通过直接计算可得

$$(1, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$(1, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad (1, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx = 0$$

$(m = 1, 2, 3, \dots)$

$$(\cos nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \pi \cdot \delta_{nm}$$

$$(\sin nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \cdot \delta_{nm} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(\cos nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

正交多项式

定义：设 $\varphi_k(x)$ 是首项系数不为 0 的 k 次多项式， $\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交，称 $\varphi_k(x)$ 为 k 次正交多项式。

正交多项式

性质 1: 设 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, H_n 为所有次数不超过 n 的多项式组成的线性空间, 则

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$$

构成 H_n 的一组基。

证明: 自行练习

† 结论对任意 n 都成立。

正交多项式

性质 2: 设 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 则对 $\forall p(x) \in H_{n-1}$, 有

$$(p(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \rho(x) p(x) \varphi_n(x) dx = 0$$

即 φ_n 与所有次数小于 n 的多项式正交。

证明：自行练习

正交多项式

性质 3: 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 且首项系数均为 1, 则

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n\varphi_{n-1}(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中

$$\varphi_{-1} = 0, \quad \varphi_0 = 1, \quad \alpha_n = \frac{(x\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad \beta_n = \frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}$$

证明: 板书

† 这就是正交多项式著名的三项递推公式! 所有首项系数为 1 的正交多项式族都满足这个公式, 该公式也是计算正交多项式的重要方法。

正交多项式

性质 4: 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式, 则 $\varphi_n(x)$ 在 (a, b) 内有 n 个不同的零点。

证明：板书

勒让德 (Legendre) 多项式

在 $[-1, 1]$ 上带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式称为 勒让德多项式

记为: $P_0, P_1, P_2, \dots$

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

$P_n(x)$ 首项 x^n 的系数为:
$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

令 $\tilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, 则 $\tilde{P}_n(x)$ 是首项系数为 1 的勒让德多项式

Legendre 多项式的性质

性质 (1): 正交性

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

Legendre 多项式的性质

性质 (2): 奇偶性

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

即: $P_{2n}(x)$ 只含偶次幂, $P_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂。

Legendre 多项式的性质

性质 (3): 递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

其中 $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$

Legendre 多项式的性质

性质 (4): $P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同的零点。

① $P_n(x)$ 的零点都在 $(-1,1)$ 内

② $P_n(x)=0$ 的根都是实数

Legendre 多项式

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

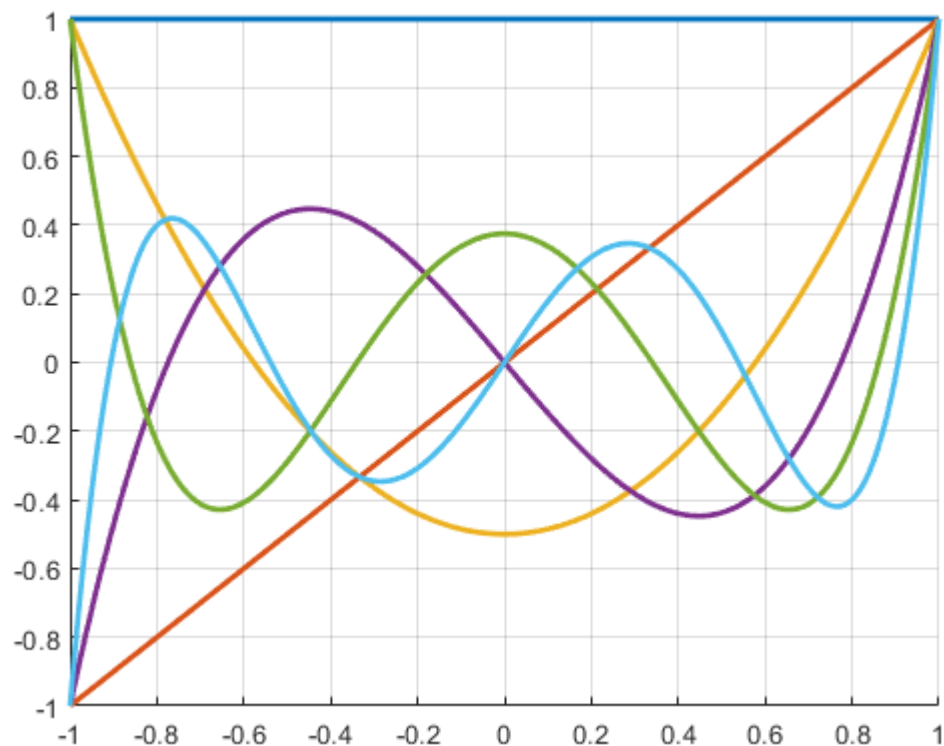
$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

⋮



[Approximate_Legendre.m](#)

切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

在 $[-1, 1]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式称为切比雪夫多项式, 其中

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

记为: $T_0, T_1, T_2, \dots$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$T_n(x)$ 首项 x^n 的系数为 2^{n-1} , 且 $|T_n(x)| \leq 1$

令 $\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$, 则 $\tilde{T}_n(x)$ 是首项系数为 1 的切比雪夫多项式。

Chebyshev 多项式的性质

性质 (1): 正交性

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi / 2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

证明：自行练习 ($x = \cos \theta$)

Chebyshev 多项式的性质

性质 (2): 奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

即: $T_{2n}(x)$ 只含偶次幂, $T_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂。

Chebyshev 多项式的性质

性质 (3): 递推公式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

其中 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$

证明：自行练习 ($\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta$)

† 前两项与 Legendre 多项式相同，但递推公式不同。

Chebyshev 多项式的性质

性质 (4): $T_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同的零点

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

① $T_n(x)$ 的零点都在 $(-1,1)$ 内

② $T_n(x)=0$ 的根都是实数

性质 (5): $T_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 $n+1$ 个不同的极值点

$$\tilde{x}_k = \cos\frac{k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式

定理： 记 $\tilde{H}_n$ 为所有首项系数为 1 的 n 次多项式组成的集合，则对 $\forall p(x) \in \tilde{H}_n$ ，都有

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|$$

$$\text{且 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

等价描述：

$$\|\tilde{T}_n(x)\|_{\infty} \leq \|p(x)\|_{\infty}, \quad \forall p(x) \in \tilde{H}_n$$

即 $\tilde{T}_n(x)$ 在集合 $\tilde{H}_n$ 中无穷范数最小：
$$\tilde{T}_n(x) = \arg \min_{p \in \tilde{H}_n(x)} \|p(x)\|_{\infty}$$

首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式

几点注记

- ① 这里的无穷范数是指 $C[-1, 1]$ 上的无穷范数
- ② 定理中的结论可推广为 “在所有次数不超过 n 的首项系数为 1 的多项式中, $\tilde{T}_n(x)$ 的无穷范数最小”
- ③ 该结论可用于计算 n 次多项式在 $[-1, 1]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式

性质: 设 $f(x) \in H_n$, 且首项系数为 $a_n \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式为

$$f(x) - a_n \tilde{T}_n(x)$$

最佳一致逼近举例

例：求 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式。

解：板书

解：设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式，由性质可知

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x) - a_3 \tilde{T}_3(x) \\ &= 2x^3 + x^2 + 2x - 1 - 2\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) \\ &= x^2 + \frac{7}{2}x - 1 \end{aligned}$$

思考 如何计算 n 次多项式在 $[a, b]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式？

Chebyshev 多项式

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

⋮



[Approxi_Chebyshev.m](#)

Chebyshev 零点插值

为什么用 Chebyshev 多项式的零点插值?

插值误差 $|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$

→ $\|f(x) - L_n(x)\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}(x)\|_\infty$

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

定理：记 $\tilde{H}_n$ 为所有首项系数为 1 的 n 次多项式组成的集合，则对

$\forall p(x) \in \tilde{H}_n$, 都有

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|$$

$$\text{且 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

定理：设 $f(x) \in C^{n+1}[-1, 1]$ ，若插值节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为 $T_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点，则 $\|f(x) - L_n(x)\|_\infty$ 达到最小，且

$$\|f(x) - L_n(x)\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}(x)\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}$$

用 Chebyshev 多项式的零点插值，可以使得总体插值误差最小！

Chebyshev 零点插值

如何做 $f(x)$ 在一般区间 $[a, b]$ 上的 Chebyshev 零点插值?



作变量替换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$



插值节点

$$x_k = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi + \frac{b+a}{2}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n)$$

插值整体误差

$$\|f(x) - L_n(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \times \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \|f^{(n+1)}(x)\|_{\infty}$$

举例

例：求 $f(x) = e^x$ 在 $[0, 1]$ 上的四次 Chebyshev 插值多项式 $L_4(x)$ ，并估计误差。

$$x_k = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi + \frac{b+a}{2}$$

解：板书

解：插值节点为 $x_k = \frac{1}{2} \cos \frac{2k+1}{2(4+1)} \pi + \frac{1}{2} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

根据 Lagrange 插值公式，并整理后可得

$$L_4(x) \approx 0.06849x^4 + 0.1418x^3 + 0.5090x^2 + 0.9989x + 1.0$$

插值误差

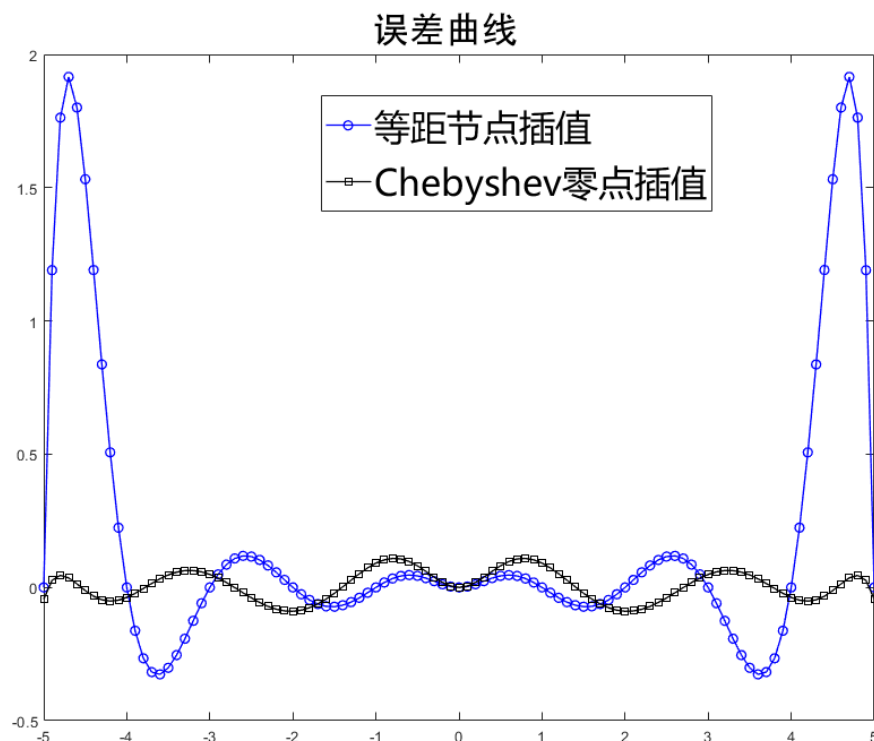
$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - L_4(x)| &\leq \frac{1}{2^4(4+1)!} \times \frac{1}{2^{4+1}} \times \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)| \\ &= \frac{1}{2^9 \times 5!} \max_{0 \leq x \leq 1} |e^x| \approx 4.4 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

举例

例：函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，插值区间 $[-5, 5]$ ，编写程序，分别用等距节点和 Chebyshev 零点作 10 次多项式插值，画图比较两种插值的数值效果。

解：编程实现

Approxi_Chebyshev_interp.m



观察 n 越来越大时的结果

其他正交多项式

- 第二类 Chebyshev 多项式
- 拉盖尔 (Laguerre) 多项式
- 埃尔米特 (Hermite) 多项式

第二类 Chebyshev 多项式

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x \in [-1, 1], n = 0, 1, 2, \dots$

- 在 $[-1, 1]$ 上带权 $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ 正交, 即

$$(U_n, U_m) = \int_{-1}^1 \rho(x) T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

- 递推公式:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

其中 $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, n = 1, 2, \dots$

拉盖尔 (Laguerre) 多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

$$x \in [0, \infty], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- 在 $[0, \infty]$ 上带权 $\rho(x) = e^{-x}$ 正交, 即

$$(L_n, L_m) = \int_0^\infty \rho(x) L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ (n!)^2, & m = n \end{cases}$$

- 递推公式:

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

$$\text{其中 } L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1-x, \quad n = 1, 2, \dots$$

埃尔米特 (Hermite) 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$x \in (-\infty, +\infty), n = 0, 1, 2, \dots$

- 在 $(-\infty, +\infty)$ 上带权 $\rho(x) = e^{-x^2}$ 正交, 即

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{n}, & m = n \end{cases}$$

- 递推公式:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

其中 $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, n = 1, 2, \dots$