第七讲

函数插值

—— 分段低次插值

—— 三次样条插值

为什么分段低次插值

高次多项式插值的病态性质：

$n \to \infty$ 时 $L_n(x)$ 不一定收敛于 $f(x)$

插值多项式的次数并非越高越好！

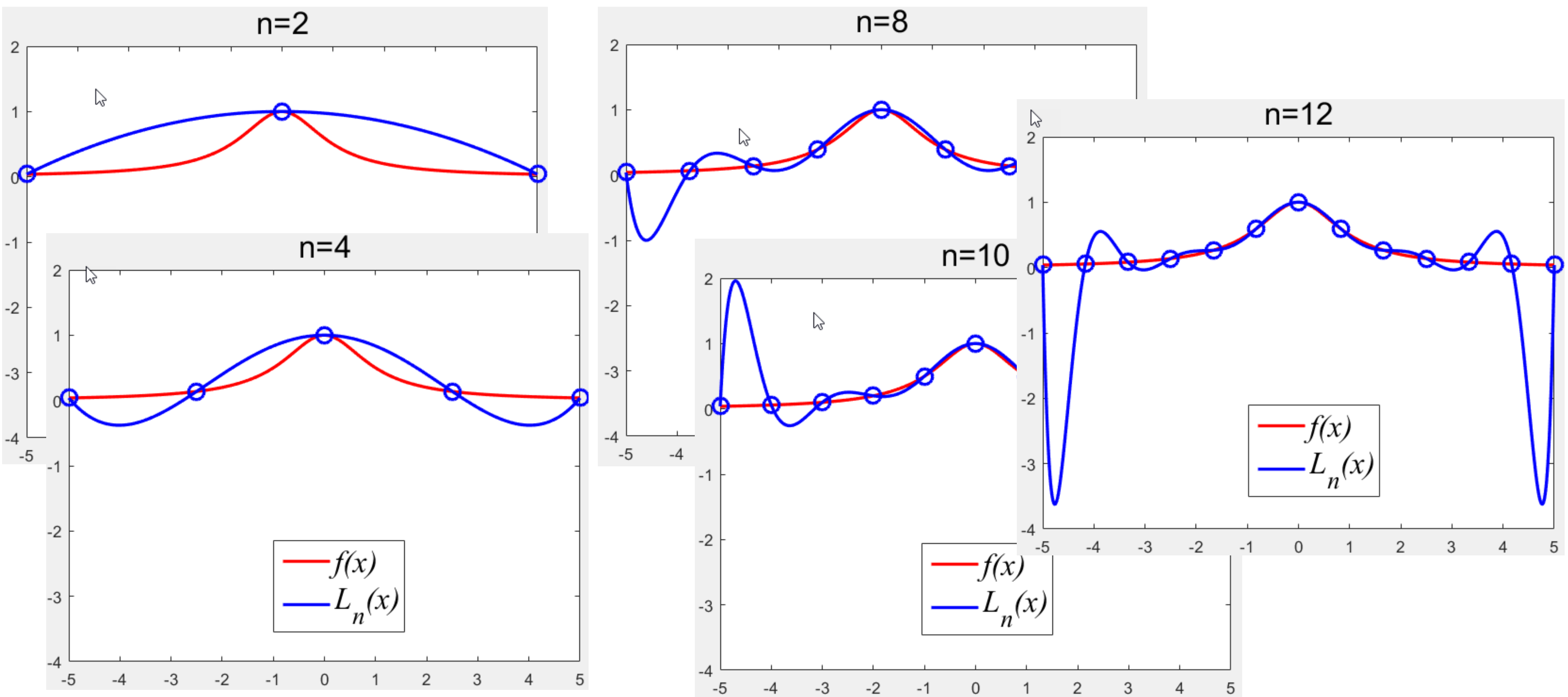
† 高次多项式插值可能还会存在稳定性、大幅度震荡等方面的问题，实际应用中一般较少使用。

插值误差举例

例：函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 [-5, 5]，取等距插值节点，

试画出插值多项式 $L_n(x)$ 的图像。

Interp_Lagrange_Runge.m



分段低次插值

怎么处理这种情况？ ⇒ 分段低次插值

基本思想：用**分段低次多项式**来逼近原函数 $f(x)$ 。

常用的分段低次插值

- 分段线性插值

  —— 每个小区间上用线性多项式来逼近 $f(x)$

- 分段三次 Hermite 插值

  —— 每个小区间上用三次 Hermite多项式来逼近 $f(x)$

- 三次样条插值

  —— 要求插值函数在整个插值区间上 二阶连续可导

5 分段低次插值

- 分段线性插值
- 分段三次 Hermite 插值（两点三次）

分段线性插值

什么是分段线性插值

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，$f(x)$ 在这些节点上的函数值为 $y_0, y_1, \ldots, y_n$，记

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \quad h = \max_k \{h_k\}$$

求 分段函数 $I_h(x)$ 满足:

① $I_h(x) \in C[a,b]$，即函数整体连续

② $I_h(x_k) = y_k$， $k = 0, 1, \ldots, n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数（一次多项式）

分段线性插值

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$I_h(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$，$k = 0, 1, \dots, n-1$

- 这是插值函数在一个区间上的表达式，将所有区间上的表达式合起来才组成整个插值函数。
- 该插值函数不是多项式，而是分段多项式函数。

误差估计

基本思路：先估计每个小区间上的误差，然后再取最大的那个。

在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上有（线性插值）

$$\left|f(x)-I_h(x)\right| = \left|\frac{f''(\xi_x^{(k)})}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right| \le \frac{M_2}{2}\frac{h_k^2}{4}$$

$$M_2 = \max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$$

$$\left|R(x)\right| = \left|f(x)-I_h(x)\right| \le \max_k \left|\frac{f''(\xi_x^{(k)})}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right| \le \frac{M_2}{8}h^2$$

当 $h\to 0$ 时， $R(x) = f(x)-I_h(x) \to 0$

$I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上 一致收敛 到 $f(x)$

缺点： $I_h(x)$ 在节点不可导！

分段三次 Hermite 插值

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，且

$$y_k = f(x_k),\ \ m_k = f'(x_k),\quad k = 0, 1, \ldots, n$$

求 分段函数 $I_h(x)$ 满足：

① $I_h(x) \in C^1[a,b]$，即函数整体连续可导

② $I_h(x_k) = y_k,\quad I_h'(x_k) = m_k,\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

分段三次 Hermite 插值

† 在每个小区间上进行两点三次多项式插值。

分段三次Hermite插值

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$I_h(x) = y_k\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + y_{k+1}\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$
$$+\ m_k(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + m_{k+1}(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

误差估计：

$$|R(x)| = |f(x) - I_h(x)| \le \frac{M_4}{384}h^4$$

$$M_4 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$h = \max_{0\le k\le n-1}\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

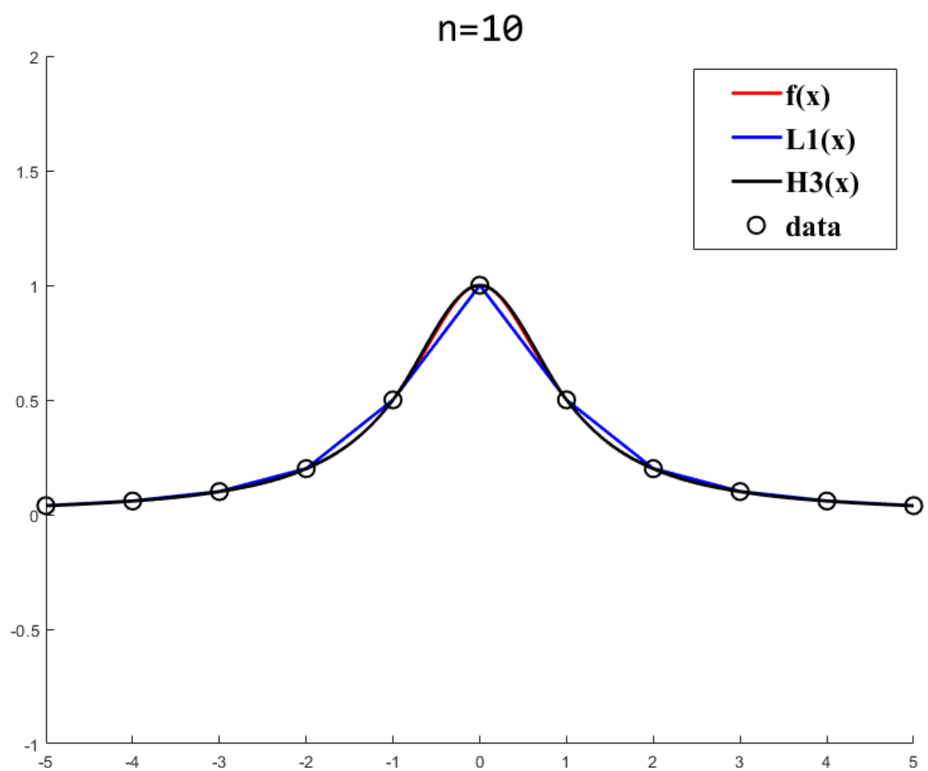
一致收敛，且收敛速度比分段线性插值快一倍。

插值举例

例：函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 [-5, 5]，取等距节点（10 等分），试分别用分段线性插值和分段三次Hermite插值 画出 $f(x)$ 的近似图像。

解：编程实现

Interp_piecewise_poly.m



分段插值注记

基本思想：用分段低次多项式来代替单个多项式

具体作法：(1) 把整个插值区间分割成多个小区间

(2) 在每个小区间上作低次插值

(3) 将所有插值多项式拼接成一个插值函数

优点：公式简单、运算量小、稳定性好、收敛性、 …

† 缺点：分段插值函数的光滑性不高

† 分段三次 **Hermite** 插值比分段线性插值效果更好，但公式较复杂，且需要额外信息（导数）

第七讲

函数插值

—— 三次样条插值

为什么三次样条插值

分段线性插值和分段三次 **Hermite** 插值：

(1) 解决了高次插值的振荡现象和数值不稳定现象；

(2) 插值函数（分段多项式）具有一致收敛性；

(3) 分段线性插值：保证了插值函数整体连续性；

(4) 分段三次 **Hermite** 插值：保证插值函数整体一阶连续可导。

→ 提供了实用的插值方法

但是，某些应用场合，对插值函数具有更高的光滑性要求！

如机翼设计，船体放样等。

什么是三次样条插值

给定插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ 及函数值

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

求一个定义在 $[a, b]$ 上的插值函数 $S(x)$，满足：

① $S(x) \in C^2[a,b]$，即函数整体二阶连续可导

② 插值条件：$S(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$

③ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

→ 三次样条插值

† 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（所谓样条）用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，然后沿木条画下曲线，称为样条曲线。

6 三次样条插值

- 什么是三次样条函数
- 边界条件的处理
- 三次样条函数的计算
- 具体计算过程

三次样条函数

定义： 设插值节点为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n\text{-}1} < x_n = b$$

若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式，则称为**三次样条函数**。

如果 $S(x)$ 同时还满足

$$S(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数。

- 注意：三次样条插值也是分段多项式插值
- 分段线性：连续；分段三次Hermite：可导；三次样条：二阶可导

怎样求三次样条插值函数

$S(x)$ 满足：

① $S(x) \in C^2[a,b]$；

② 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 是三次多项式

③ $S(x_k) = y_k$， $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

其中 $s_k(x)$ 为三次多项式，且满足

$$s_k(x_k) = y_k,\ s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$

二阶连续可导

$$S(x) \in C^2[a,b] \Rightarrow S'(x_k^-) = S'(x_k^+),\ \ S''(x_k^-) = S''(x_k^+)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{k-1}'(x_k^-) = s_k'(x_k^+),\ \ s_{k-1}''(x_k^-) = s_k''(x_k^+)}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$

每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式，有 **4** 个待定系数，所以共有 **$4n$** 个待定系数，故需 **$4n$** 个方程。前面已经得到 $2n+2(n-1) = 4n-2$ 个方程，还缺 **2** 个方程！

† 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的边界条件

第一类边界条件

第一类边界条件

- 给定函数在端点处的一阶导数值，即

$$S'(x_0^+) = f_0' \,,\; S'(x_n^-) = f_n'$$

第二类边界条件

第二类边界条件

- 给定函数在端点处的二阶导数值，即

$$S''(x_0^+) = f_0'' \ , \ S''(x_n^-) = f_n''$$

如果

$$f_0'' = f_n'' = 0$$

则称为自然边界条件，此时样条函数称为自然样条函数。

第三类边界条件

第三类边界条件

- 若 $f(x)$ 是周期函数，且 $x_n - x_0$ 是一个周期，于是要求 $S(x)$ 也是周期函数, 即满足

$$S(x_0) = S(x_n),\ \ S'(x_0^+) = S'(x_n^-),\ \ S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$$

怎么求三次样条插值

计算 $S(x)$ ⟺ 计算 $s_k(x)$，$x\in[x_k, x_{k+1}]$

设 $S''(x_k) = M_k$， $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

由于 $s_k(x)$ 是三次多项式，故 $s_k''(x)$ 为线性函数，且满足

$$s_k''(x_k) = M_k, \qquad s_k''(x_{k+1}) = M_{k+1}$$

由线性插值公式可得

$$s_k''(x) = \frac{x_{k+1}-x}{h_k}M_k + \frac{x-x_k}{h_k}M_{k+1}$$

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

求积分，可得

$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k + \frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1} + c_1x + c_2$$

三次样条函数的计算

将插值条件 $s_k(x_k)=y_k$，$s_k(x_{k+1})=y_{k+1}$ 代入，即可确定积分常数 c_1 和 c_2

整理后可得 $s_k(x)$ 的表达式为：

$$
\begin{aligned}
s_k(x) = {} & \frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x-x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} \\
& + \left(y_k - \frac{M_k h_k^2}{6} \right) \frac{x_{k+1}-x}{h_k} + \left(y_{k+1} - \frac{M_{k+1} h_k^2}{6} \right) \frac{x-x_k}{h_k}
\end{aligned}
$$

$k = 0, 1, \ \ldots, n\text{-}1$

只需确定 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的值，就能给出 $s_k(x)$ 的表达式，从而问题得解。

M_k 的计算

条件： $s_{k-1}'(x_k^-) = s_k'(x_k^+)$

直接计算可得

$$s_k'(x) = -\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1} + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}\left(M_{k+1}-M_k\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{h_{k-1}}{6}M_{k-1} + \frac{h_{k-1}+h_k}{3}M_k + \frac{h_k}{6}M_{k+1} = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}}_{\mu_k}M_{k-1} + 2M_k + \underbrace{\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}}_{\lambda_k}M_{k+1} = \underbrace{\frac{6\left(f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k]\right)}{h_{k-1}+h_k}}_{d_k \;=\; 6f[x_{k-1},\, x_k,\, x_{k+1}]}$$

M_k 的计算

$$\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}M_{k-1}+2M_k+\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}M_{k+1}=\frac{6\left(f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k]\right)}{h_{k-1}+h_k}$$

$$\mu_k M_{k-1}+2M_k+\lambda_k M_{k+1}=d_k$$

$$\mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k},\quad \lambda_k=\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k},\quad d_k=6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]$$

$$\mu_k+\lambda_k=1$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$

共 n-1 个方程 + 边界条件，即可确定 n+1 个未知量 $M_0, M_1, \cdots, M_n$

† 方程有时也写为

$$h_{k-1}M_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)M_k+h_kM_{k+1}=6\left(f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k]\right)$$

第一类边界条件

$$S'(x_0^+) = f_0' \ , \ S'(x_n^-) = f_n' \quad \Rightarrow \quad s_0'(x_0^+) = f_0' \ , \ s_{n-1}'(x_n^-) = f_n'$$

$$2M_0 + M_1 = 6\big((y_1 - y_0)/h_0 - f_0'\big)/h_0 \triangleq d_0$$
$$M_{n-1} + 2M_n = 6\big(f_n' - (y_n - y_{n-1})/h_{n-1}\big)/h_{n-1} \triangleq d_n$$

与前面的 **n-1** 个方程联立可得

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

n+1 阶三对角方程组

第二类边界条件

$$S''(x_0^+) = f_0'' \,,\; S''(x_n^-) = f_n''$$

$$M_0 = f_0'' \,,\; M_n = f_n''$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

***n*-1 阶三对角方程组**

第三类边界条件

$$S'(x_0^+) = S'(x_n^-),\ \ S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$$

$$M_0 = M_n,\ \ \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\lambda_n = h_0/(h_0 + h_{n-1}),\ \ \mu_n = h_{n-1}/(h_0 + h_{n-1})$$
$$d_n = 6\big(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]\big)/(h_0 + h_{n-1})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

n 阶线性方程组

具体计算过程

性质： 上述三个线性方程组都存在唯一解。

具体计算过程

(1) 根据插值条件和边界条件给出 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的方程组

(2) 求解该线性方程组

(3) 将 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入 $s_k(x)$，写出 $S(x)$ 在整个插值区间上的分段表达式

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

三弯矩方程

† 工程上称二阶导数为弯矩。

具体计算过程

将 $s_k(x)$ 写成如下形式

$$s_k(x) = a_3(x - x_k)^3 + a_2(x - x_k)^2 + a_1(x - x_k) + a_0$$

$$s_k(x) = \frac{M_{k+1} - M_k}{6h_k}(x - x_k)^3 + \frac{M_k}{2}(x - x_k)^2 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k(M_{k+1} + 2M_k)}{6}\right)(x - x_k) + y_k$$

† MATLAB 中三次样条插值函数 `spline` 输出的多项式是按上面的格式输出的。

误差估计

定理： 设 $f(x) \in C^4[a,b]$，$S(x)$ 为满足第一或第二类边界条件的三次样条函数，则有

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-S(x)| \le \frac{5}{384}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|h^4$$

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)-S'(x)| \le \frac{1}{24}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|h^3$$

$$\max_{a\le x\le b}|f''(x)-S''(x)| \le \frac{3}{8}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|h^2$$

其中 $h=\max\limits_{0\le k\le n-1} h_k = \max\limits_{0\le k\le n-1}|x_{k+1}-x_k|$ 。

插值举例

例：函数 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$，满足边界条件 $S'(27.7)=3.0$, $S'(30)=-4.0$ 。

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

解：板书

Interp_spline_01.m

插值举例

例: 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 [-5, 5]，取 11 个等距节点，试同时画出 10 次插值多项式 $L_{10}(x)$ 与三次样条插值多项式 $S(x)$ 的函数图形。

解：编程实现

Interp_spline_02.m