第七讲

函数插值

—— Hermite 插值

为什么 Hermite 插值

在许多实际应用中，不仅要求函数值相等，而且要求若干阶导数也相等，如机翼设计等。

$$f(x) \approx p(x) \iff p(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

$$p'(x_i) = f'(x_i)$$

$$p^{(2)}(x_i) = f^{(2)}(x_i)$$

$$\vdots$$

$$p^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i)$$

满足函数值相等且若干导数也相等的插值方法称为 **Hermite插值**

4 Hermite 插值

- 重节点差商与 Taylor 插值
- 三点三次 Hermite 插值
- 两点三次 Hermite 插值

† 本节只考虑对一阶导数有要求的情形

重节点差商

差商的一个重要性质

定理：设 $f(x) \in C^n[a, b]$， $x_0, \ldots, x_n$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，则 $f[x_0, \ldots, x_n]$ 是其变量的连续函数。

证明：自行练习（利用差商性质）

重节点差商

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

$$f[x_0, x_0, x_0] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2!} f''(x_0)$$

一般地，n 阶重节点差商定义为

$$f[x_0, \ldots, x_0] = \lim_{x_i \to x_0} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Taylor插值

在 Newton 插值公式中，令 $x_i \to x_0$，$i=1,\ldots,n$，则

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

→ **Taylor 插值**

余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

† **Taylor 插值就是在一个节点 x_0 上的 n 次 Hermite 插值**

Hermite 插值

两个典型的 Hermite 插值

三点三次 Hermite 插值

- 插值节点：x_0，x_1，x_2
- 插值条件：$p(x_i)=f(x_i)$，$i=0, 1, 2$，$p'(x_1)=f'(x_1)$

两点三次 Hermite 插值

- 插值节点：x_0，x_1
- 插值条件：$p(x_i)=f(x_i)$，$p'(x_i)=f'(x_i)$，$i=0, 1$

三点三次Hermite 插值

插值节点：x_0，x_1，x_2

插值条件：$p(x_0)=f(x_0)$， $p(x_1)=f(x_1)$， $p(x_2)=f(x_2)$，$p'(x_1)=f'(x_1)$

可设

$$\begin{aligned} p(x) = f(x_0) &+ f[x_0,x_1](x-x_0) \\ &+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &+ \alpha(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

将 $p'(x_1)=f'(x_1)$ 代入可得

$$\alpha = \frac{f'(x_1) - f[x_0,x_1] - f[x_0,x_1,x_2](x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

† 不用记公式，应该掌握其推导思想。

余项

由于 x_0, x_1, x_2 是 $R(x)$ 的零点，且 x_1 是二重零点，故可设

$$R(x) \triangleq f(x) - p(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

与 Lagrange 插值余项公式的推导过程类似，利用罗尔定理，可得

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

其中 ξ_x 位于 由 x_0, x_1, x_2 和 x 所界定的区间 内。

† 类似于取插值节点 x_0, x_1, x_1, x_2

插值举例

例：函数 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$，插值条件如下

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8},\ f(1)=1,\ f\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{27}{8},\ f'(1)=\frac{3}{2}$$

试给出三次 Hermite 插值多项式，并写出余项。

解：板书

解：作差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
1/4	1/8		
1	1	7/6	
9/4	27/8	19/10	11/30

$$\Rightarrow p(x)=\frac{1}{8}+\frac{7}{6}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{30}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)+\alpha\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)\left(x-\frac{9}{4}\right)$$

将 $p'(1)=f'(1)=3/2$ 代入可得：$\alpha=-\dfrac{14}{225}$

插值举例

$$\Rightarrow \quad p(x) = -\frac{14}{225}x^3 + \frac{263}{450}x^2 + \frac{233}{450}x - \frac{1}{25}$$

余项 $R(x) = f(x) - p(x)$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4})$$

$$= \frac{9\xi^{-5/2}}{4!\times 16}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4}) \qquad \xi \in \left(\frac{1}{4},\ \frac{9}{4}\right)$$

两点三次Hermite 插值

插值节点：x_0，x_1

插值条件： $p(x_i)=f(x_i)=y_i$， $p'(x_i)=f'(x_i)=m_i$， $i=0,1$

仿照 Lagrange 多项式的思想，设插值多项式为

$$H_3(x)=a_0\alpha_0(x)+a_1\alpha_1(x)+b_0\beta_0(x)+b_1\beta_1(x)$$

其中 $\alpha_0(x),\alpha_1,\beta_0(x),\beta_1(x)$ 均为 3 次多项式，且满足

$$\begin{aligned}\alpha_j(x_i)&=\delta_{ji}, & \alpha_j'(x_i)&=0,\\ \beta_j(x_i)&=0, & \beta_j'(x_i)&=\delta_{ji}\end{aligned} \qquad i,\ j=0,1$$

$$\delta_{ji}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

由插值条件可知

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+m_0\beta_0(x)+m_1\beta_1(x)$$

两点三次Hermite 插值

如何确定 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 的表达式?

$\alpha_0(x)$

$$\alpha_0(x_0)=1,\quad \alpha_0'(x_0)=0,\quad \alpha_0(x_1)=0,\quad \alpha_0'(x_1)=0$$

$$\alpha_0(x_1)=0,\quad \alpha_0'(x_1)=0 \;\Rightarrow\; \alpha_0(x)=(ax+b)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\alpha_0(x_0)=1,\quad \alpha_0'(x_0)=0$$

$$a=\frac{2}{x_1-x_0},\quad b=\frac{x_1-3x_0}{x_1-x_0}=1-\frac{2x_0}{x_1-x_0}$$

两点三次Hermite 插值

整理后可得

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

同理可得

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

相类似地，可以求出

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

两点三次Hermite 插值

所以，满足插值条件

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0,\ \ p'(x_0)=f'(x_0)=m_0$$
$$p(x_1)=f(x_1)=y_1,\ \ p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

的三次 **Hermite** 插值多项式为

$$H_3(x)=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$
$$+\ m_0(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+m_1(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

余项

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4\,!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

$$\xi_x\in\left(\min\{x_0,x_1\},\ \max\{x_0,x_1\}\right)$$