第七讲

函数插值

—— 差商与 Newton 插值

为什么 Newton 插值

Lagrange 插值简单易用，但若要增加一个节点时，全部插值基函数 $l_k(x)$ 都需重新计算，工作量巨大，很不方便！

解决办法 → 更换基函数

目标：设计一个可以逐次生成插值多项式的算法，即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别为 $n+1$ 次和 n 次插值多项式。

→ **Newton 插值**

新的插值基函数

设插值节点：$x_0, \dots, x_n$，Newton 插值采用的基函数为：

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = x - x_0$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

优点：当增加一个节点 x_{n+1} 时，只需添加一个基函数

$$\omega_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Newton 插值

此时 $f(x)$ 的 n 次插值多项式可表示为

$$p_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

有两个问题需要解决

① 怎样确定系数 $a_0, \ldots, a_n$?

② 如何从 $p_n(x)$ 得到 $p_{n+1}(x)$?

差商/均差

3 差商与 Newton 插值

- 差商（均差）及其计算方法
- Newton 插值公式
- 差分与等距 Newton 插值公式

什么是差商

设函数 $f(x)$，节点 $x_0, \dots, x_n$

- $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 的**一阶差商**： $f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

- $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的**二阶差商**： $f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$

定义：设 $f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \dots, x_k$ 的 k **阶差商**定义为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

差商的基本性质

性质一： 差商可以表示为函数值的线性组合，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_{k+1}'(x_j)}$$

证明：自行练习（归纳法）

差商与节点的排序无关，即差商具有**对称性**

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]$$

其中 $i_0, i_1, \ldots, i_k$ 是 $0, 1, \ldots, k$ 的一个任意排列

差商的等价定义(教材)：

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\frac{f[x_0,\ldots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

差商的基本性质

性质二：（差商与阶导数之间的关系）若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 k 阶导数，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

证明：留待后面证明

差商的基本性质

性质三:

若 $h(x) = c\,f(x)$，则

$$h[x_0, x_1, \cdots, x_k] = c \times f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

若 $h(x) = f(x) + g(x)$，则

$$h[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] + g[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

证明：自行练习

差商的计算

如何计算差商 → **差商表**

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	$\cdots$	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

差商计算举例

例：已知 $y = f(x)$ 的函数值表，试计算其各阶差商

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

Interp_newton_dq.m

解：差商表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

Newton 插值公式

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

由差商的定义可得

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] \quad \cdots\cdots \quad 1$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \quad \cdots\cdots \quad 2$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$f[x,x_0,\dots,x_{n-1}]=f[x_0,\dots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\dots,x_n] \quad \cdots \quad n-1$$

$$1 + (x-x_0)\times 2 + \dots\dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\times n-1$$

$$f(x)=\boxed{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}$$

$$\boxed{+f[x,x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}$$

$N_n(x)$

$R_n(x)$

Newton 插值公式

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

$$N_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x)$$

其中 $a_0 = f(x_0),\ a_i = f[x_0, \cdots, x_i],\ i = 1, 2, \cdots, n$

$R_n(x_i) = 0 \Rightarrow N_n(x_i) = f(x_i)$， $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$\Downarrow$

$N_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式

Newton VS Lagrange

$f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的 n 次插值多项式存在唯一！

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$ 且余项相同

$$f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$\boxed{f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$$

插值举例

例：已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 **Newton** 线性和抛物线插值计算 $\ln(0.54)$ 的近似值

解：板书

解：取节点 0.5, 0.6, 0.4 作差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

$$N_1(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5)$$

$$\Rightarrow N_1(0.54) = -0.6202$$

$$N_2(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5) - 2.0450(x-0.5)(x-0.6)$$

$$\Rightarrow N_2(0.54) = -0.6153$$

Interp_newton_01.m

- 只需使用差商表对角线上的值
- 节点根据需要排序，不必按大小顺序

Newton 插值

可以看出，当增加一个节点时，牛顿插值公式只需在原来的基础上增加一项，前面的计算结果仍然可以使用。与拉格朗日插值相比，牛顿插值具有灵活增加节点的优点！

† 注：增加插值节点时，须 **排** 在已有插值节点的 **后面**！

向前差分

在实际应用中，通常采用 **等距** 节点：

$$x_i = x_0 + i\,h\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$h>0$ 称为步长

此时，可以使用 **差分** 来简化 Newton 插值公式

定义：向前差分（教材上简称为差分）

$f(x)$ 在 x_i 处步长为 h 的一阶向前差分为

$$\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i)$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \longrightarrow \text{二阶向前差分}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i \longrightarrow n\ \text{阶向前差分}$$

差分与函数值

定义不变算子 $\mathbf{I}$ 与移位算子 $\mathbf{E}$，即 $\boxed{\mathbf{I} f_i = f_i\,,\quad \mathbf{E} f_i = f_{i+1}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i = \mathbf{E} f_i - \mathbf{I} f_i = (\mathbf{E} - \mathbf{I}) f_i$$

$$\Rightarrow \quad \Delta^n f_i = (\mathbf{E} - \mathbf{I})^n f_i = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathbf{E}^{n-k} \right] f_i$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f_{n-k+i}$$

反之，有 $f_{n+i} = \mathbf{E}^n f_i = (\mathbf{I} + \Delta)^n f_i = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k \right] f_i$

规定 $\Delta^0 f_i = f(x_i)$

差分与差商

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta f_0}{h}$$

$$\boxed{f[x_k,x_{k+1}]=\frac{\Delta f_k}{h}}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 f_0}{h^2}$$

$$\boxed{f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]=\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 f_k}{h^2}}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=\frac{1}{3!}\frac{\Delta^3 f_0}{h^3}$$

$$\boxed{f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]=\frac{1}{3!}\frac{\Delta^3 f_k}{h^3}}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{m!}\frac{\Delta^m f_0}{h^m}$$

$$\boxed{f[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{k+m}]=\frac{1}{m!}\frac{\Delta^m f_k}{h^m}}$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$

差分与导数

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{\Delta^m f_k}{h^m}$$

$$\Delta^m f_k = m!\,h^m f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}]$$

$$= m!\,h^m \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

$$= h^m f^{(m)}(\xi)$$

$$\boxed{f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$$

$$\boxed{\xi \in \left(x_k,\, x_{k+m}\right)}$$

差分计算：差分表

差分表

x_i	$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	$\cdots$	n 阶差分
x_0	$f(x_0)$	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\cdots$	$\Delta^n f_0$
x_1	$f(x_1)$	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_{n-3}	$f(x_{n-3})$	Δf_{n-3}	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^3 f_{n-3}$		
x_{n-2}	$f(x_{n-2})$	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-2}$			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	Δf_{n-1}				
x_n	$f(x_n)$					

† Newton 插值只需使用差分表第一行

等距牛顿插值

$$N_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$$

设 $x = x_0 + th$， 用向前差分表示等距牛顿插值公式

牛顿向前插值公式

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th)$$

$$= f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n)h^{n+1}, \quad \xi_x \in (x_0, x_n)$$

插值举例

例：已知 $f(x) = \cos x$ 在等距节点 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 处的函数值，试用 4 次 Newton 前插公式计算 $f(0.048)$ 的近似值，并估计误差。

解：取节点 x=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4，做差分表

x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.0	1.00000	-0.00500	-0.00993	-0.00013	-0.00012
0.1	0.99500	-0.01493 -	-0.00980	-0.00025	
0.2	0.98007	0.02473	-0.00955		
0.3	0.95534	-0.03428			
0.4	0.92106				

插值点 $x = 0.048$ ➡ $t = (x-x_0)/h = 0.48$

Interp_newton_02.m

$$N_4(0.048) = 1.00000 + 0.48*(-0.00500) + \cdots = 0.99884$$

$$|R_4(0.048)| \le |t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)|h^5 M_5/5! \le 1.09212\times10^{-7}$$

向后差分与中心差分

向后差分

$$\nabla^1 f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

规定 $\nabla^0 f_i = f(x_i)$

$$\boxed{\nabla^k f_i = \nabla(\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}}$$

$(k = 1, 2, \ldots,)$

中心差分

$$\delta f_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$$

规定 $\delta^0 f_i = f(x_i)$

$$\boxed{\delta^k f_i = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}}$$

$(k = 1, 2, \ldots,)$